



普通高等教育“十五”国家级规划教材
上海市精品课程教材

数学模型

谭永基 蔡志杰 俞文钊 编著



博学·数学系列



复旦大学

出版社

www.fudanpress.com.cn



普通高等教育“十五”国家级规划教材
上海市精品课程教材

数学模型

谭永基 蔡志杰 俞文飏 编著



博学·数学系列



复旦大学

出版社

www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

数学模型/谭永基等编著. —上海:复旦大学出版社,
2005.2
ISBN 7-309-04306-5

I. 数… II. 谭… III. 数学模型-高等学校-教材
IV. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 137131 号

数学模型

谭永基 蔡志杰 俞文鲋 编著

出版发行 复旦大学出版社

上海市国权路 579 号 邮编 200433

86-21-65118853(发行部) 86-21-65109143(邮购)

fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>

责任编辑 范仁梅

总编辑 高若海

出品人 贺圣遂

印刷 上海第二教育学院印刷厂

开本 787×960 1/16

印张 25.25 插页 2

字数 467 千

版次 2005 年 2 月第一版第一次印刷

印数 1—6 000

书号 ISBN 7-309-04306-5/O·336

定价 38.00 元

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社发行部调换。

版权所有 侵权必究



谨以此书献给复旦大学建校100周年

DEDICATED TO THE 100TH ANNIVERSARY OF THE FOUNDING OF FUDAN UNIVERSITY

内 容 提 要

本书是上海市精品课程教材和普通高等教育“十五”国家级规划教材。书中通过物理、化学、生物、医学、交通、人口、生态、经济管理和工程技术中众多数学模型的实例，阐明建立各种现实问题模型的主要方法和基本规律。书中每章内容后还设置了“习题”和“实践与思考”，前者是帮助读者加深对本章内容理解的练习；后者实际上是为建立与本章内容有关的实际问题的数学模型的实践活动提供课题，其中有些还是国内外数学建模竞赛的赛题。阅读本书有助于读者提高分析问题和解决问题的能力。

本书可用作高等学校应用数学专业、理工科各有关专业和经济管理有关专业的教材，亦可供高等学校教师、研究生、科研和工程技术人员参考。

第一版序言

近几十年来,随着科学技术的发展和社会的进步,数学这一重要的基础学科迅速地向自然科学和社会科学的各个领域渗透,并在工程技术、经济建设及金融管理等方面发挥出愈来愈明显、甚至是举足轻重的作用.数学与电子计算机技术相结合,已形成一种重要的、可以实现的技术.“高技术本质上是一种数学技术”的提法,已为愈来愈多的人们所认识和接受.然而,一个现实世界中的问题,包括科学技术中的问题,往往并不是自然地以一个现成的数学问题的形式出现的.要充分发挥数学的作用,首先要将所考察的现实世界中的问题归结为一个相应的数学问题,即建立该问题的数学模型.这是一个关键性的步骤,在此基础上才有可能利用数学的概念、方法和理论进行深入的分析 and 研究,从而从定量或定性的角度,为解决现实问题提供精确的数据或可靠的指导.努力提高建立数学模型方面的修养,自觉培养这方面的能力并注意积累有益的知识 and 经验,对于有志于学习与运用数学的广大大学生和研究生以及众多的应用科学工作者来说,均是一项十分重要的基本建设.

不同的现实问题,往往有不同的数学模型;即使对同一现实问题,也可能从不同的角度或根据不同精度的要求而归结出颇不相同的数学模型.另一方面,同一个数学模型又往往可同时用来描述表面上看来毫无关联的自然现象或社会规律.至于归结数学模型的方法,则更是各有千秋,多姿多彩,不可能希冀有一个可以到处生搬硬套的固定程式.尽管如此,人们在用数学工具解决各种各样实际问题的过程中,通过大量归结数学模型的实践,已逐步发现和总结了一些建立数学模型的规律,数学模型这一新的学科分支以及相应的课程设置便因此应运而生.近年来,数学模型这一新兴的课程已在国际上愈来愈多的学校开设,它不仅成为数学系各专业的重要课程,而且引起了其他各类学科专业学生的浓厚兴趣,选修这门课程的人数日益增多.以建立数学模型为主要内容的各类数学竞赛活动,也

相应地在国内外迅速开展起来,并取得了愈来愈大的影响。

本书的两位作者自 1982 年起,相继为复旦大学应用数学专业本科学生开设数学模型课程,10 余年来从未间断,并多次为其他系科的学生或数学系的进修教师开设了相应的课程或讲座,还积极参与及组织了多次数学模型竞赛活动,积累了大量的素材,取得了丰富的经验。在此基础上,经过数年的酝酿和准备,这本盼望已久的教材终于脱稿并正式出版,这是很值得庆贺的。

本书通过一些经过精心选择,内容涉及物理、化学、生物、医学、经济、管理、生态、交通、能源和工程技术等众多方面的数学建模的实例,向读者展示了建立数学模型的方法和用数学解决实际问题的全过程和一般规律。特别值得指出的是:这不是一本“纸上谈兵”的作品。作者们曾经多次参加过建立数学模型,并有成功解决重大实际问题的实践,有着自己切身的经验和体会。书中所列举的实例中除有相当一些取材于国内外其他教材和有关文献外,还包含了不少作者及其研究集体历年来的研究成果。这使这本教材具有了自己鲜明的特色。

根据建立数学模型的特点,学习这门课程,重要的不在于知识的积累,而应着眼于能力的提高。希望广大读者将本书提供的一些实例均作为案例来对待,通过解剖麻雀,体会建立数学模型的思路和方法,掌握数学建模的一般规律,而不要仅仅满足于学习一些数学知识,更不要满足于对个别实例的机械模仿。这样,才可能开拓思路,培养分析问题和解决问题的能力,真正达到学习这门课程的效果。

李大潜

1996 年 2 月 25 日于复旦大学

前言

本书是在 1997 年出版的《数学模型》的基础上修订而成的. 它也是国家教育部第十个五年计划重点教材项目和上海市精品课程建设项目的成果.

本书第一版出版后, 已作为大学本科数学类专业的数学模型基础课教材被许多高等院校使用, 得到了肯定, 同时他们也对本书提出了许多宝贵意见.

为了更加适合教材现代化的要求, 进一步体现教材的先进性、科学性与适用性, 我们根据自己的教学实践和兄弟院校同行的意见和建议, 用 1 年多的时间进行了修订. 在修订中, 我们删除了两章, 新增了 6 章, 对其余部分章节也作了较大改动. 蔡志杰副教授参加了本书的修订工作.

这次删除的两章是“计算复杂性简介”和“模型的数值求解与 MATLAB 软件”. 虽然模型求解的计算复杂性是评价一个数学模型优劣的重要标准之一, 但教学实践表明, 结合对具体数学模型的评价和检验讨论数学模型求解的计算复杂性的效果会更好. 因此, 我们不再将计算复杂性单独列为一章. 和本书初版时相比, MATLAB 数学软件在高校中普及的程度有了很大的提高. 有的学校将其作为一门课程或者作为数学软件课程的一个重要组成部分进行讲授, 有的学校将其作为数学实验课程的主要软件平台. 所以, 现在已没有必要再在数学模型课程中专门介绍, 因此我们删除了这一章. 有关模型的数值求解的内容, 在各章中结合具体模型分别讲述.

增加的各章内容我们是基于以下 3 方面的考虑选择的: 第一, 保持原书包含相当数量从实践中总结出来的数学模型的特色, 继续充实这方面的新鲜素材, 使新版的这一特色更加鲜明; 第二, 增加了部分数学内容比较浅显的初等数学模型, 便于教师根据同学的实际情况和开设本课程的不同年级进行适当的选择; 第三, 增加的内容向离散数学模型倾斜, 使书中连续和离散两类模型的分配更加均衡合理.

在新版中我们还将练习分为“习题”和“实践与思考”两种类型. 前者是帮助

读者加深对本章内容理解的练习;后者实际上是为建立与本章有关的实际问题的数学模型的实践活动提供课题,其中有些是国内外数学建模竞赛的赛题.我们认为开展这种实践活动对提高学生数学建模和解决实际问题的能力,培养创新精神是十分重要的.同时,这类问题也为采用“小课题”、开展课堂讨论等更好地实现师生互动的教学方法提供了素材.

在这次修订中我们还对文字进行了推敲修改,以期达到叙述更加科学、准确和更加通俗易懂的目的.

尽管在修订中我们作了一定努力,但囿于我们的水平,谬误之处在所难免,敬请读者予以批评指正.

中科院院士李大潜对本书的修订十分关心,他为本书初版所写的序言对我们的修订有重要的指导意义,我们表示特别的感谢.

我们曾经与数学界的许多同行就数学模型的教学与科研进行过有益的讨论.这些同志中有叶其孝、姜启源、陈叔平、唐焕文、向隆万、蒋鲁敏、桂子鹏、丁颂康、盛子宁、朱德通、曹沅、鲁习文、谢金星、周义仓、李功胜教授等.这些讨论对本书的修订是十分有帮助的.复旦大学吴宗敏、金路、陆立强与华东理工大学谢国瑞、张建初、李瑞遐等同志对本书的修订予以关心,复旦大学出版社范仁梅同志为本书的修订再版付出了艰辛的劳动.对此,我们一并表示衷心的感谢.

本书的原编著者之一俞文魮教授在 2002 年秋不幸逝世.俞文魮教授于 1982 年起在复旦大学为应用数学专业学生开设《数学模型》课程,这是国内首次为本科生开设的数学模型课程.1989 年,他作为主要发起人之一在上海筹备并于 1990 年开始举办大学生数学建模竞赛,然后推向全国.作为中国工业与应用数学学会数学模型专业委员会主任、全国大学生数学建模竞赛组织委员会副主任和成员,他为我国数学模型课程的建设 and 数学建模竞赛活动的开展发挥了重要的作用.我们谨以本书的修订再版表示对俞文魮教授的深切怀念.

谭永基

2004 年 8 月 30 日

目 录

第一章 引言	1
§ 1.1 什么是数学模型	1
§ 1.2 研究数学模型的意义	2
§ 1.3 数学模型的特点与方法	6
§ 1.4 学习本书的建议	8
第二章 驾驶问题	10
§ 2.1 问题的提出	10
§ 2.2 限定区域的问题	11
§ 2.3 具有优先方向的运动	12
§ 2.4 加速度有限制的运动	15
§ 2.5 曲率有限制的情形	18
习题	21
实践与思考	21
第三章 流水线设计	23
§ 3.1 问题的提出与简化	23
§ 3.2 模型的建立	24
§ 3.3 模型的求解和应用	30
§ 3.4 进一步的讨论	31
习题	31
实践与思考	32
第四章 投资效益、加工次序及其他	33
§ 4.1 投资效益问题	33
§ 4.2 加工次序问题	38
§ 4.3 两辆平板车的装载问题	41
§ 4.4 拼板问题	46
习题	50

实践与思考	51
第五章 飞行管理问题	53
§ 5.1 问题的提出	53
§ 5.2 假设与记号	53
§ 5.3 非线性规划模型	54
§ 5.4 非线性规划模型的求解	58
§ 5.5 线性规划模型	61
习题	64
实践与思考	64
第六章 实验数据的分解问题	65
§ 6.1 问题的提法与分析	65
§ 6.2 选择适当的算法	67
§ 6.3 解的跟踪信息	67
§ 6.4 用数值例子说明跟踪方法	68
§ 6.5 讨论	70
习题	70
第七章 投入产出综合平衡模型	72
§ 7.1 引言	72
§ 7.2 价值型投入产出模型	73
§ 7.3 开放的投入产出模型	76
习题	80
第八章 密码的加密与解密	81
§ 8.1 引言	81
§ 8.2 置换密码	82
§ 8.3 仿射变换密码	84
§ 8.4 Hill 密码	86
§ 8.5 公开密钥系统	90
习题	95
实践与思考	96
第九章 CT 的图像重建	97
§ 9.1 引言	97

§ 9.2 基本原理	97
§ 9.3 数学模型的建立	101
§ 9.4 求解线性代数方程组的迭代法	103
§ 9.5 含有测量误差的处理	108
习题	113
实践与思考	114
第十章 分子模型	117
§ 10.1 平面型碳氢化合物分子	117
§ 10.2 图和矩阵模型	118
§ 10.3 奇偶类顶点差的计算	121
§ 10.4 双键的配置	122
习题	125
第十一章 网络流及其应用	127
§ 11.1 引言	127
§ 11.2 什么是网络流	127
§ 11.3 最大流的增量算法	129
§ 11.4 露天矿井问题	132
§ 11.5 最小费用流的增量算法	134
§ 11.6 带有库存的生产计划问题	135
习题	136
第十二章 扫雪问题	137
§ 12.1 问题的提出	137
§ 12.2 单车双车道的情形	138
§ 12.3 单车单车道的情形	143
§ 12.4 双车双车道的情形	146
习题	147
实践与思考	147
第十三章 房屋隔热经济效益核算	150
§ 13.1 问题的提出	150
§ 13.2 模型的建立	150
§ 13.3 模型的应用	154

习题	155
实践与思考	155
第十四章 为什么制造三级运载火箭	156
§ 14.1 问题的提出	156
§ 14.2 卫星的速度	157
§ 14.3 火箭推力问题	158
§ 14.4 火箭系统的质量	159
§ 14.5 理想化的可随时抛去结构质量的火箭	160
§ 14.6 多级火箭的速度公式	161
习题	164
第十五章 万有引力定律	165
§ 15.1 引言	165
§ 15.2 从开普勒三定律推出万有引力定律	166
§ 15.3 从万有引力定律推出开普勒三定律	169
习题	173
第十六章 生物群体模型	175
§ 16.1 单物种群体模型	175
§ 16.2 相互竞争的二物种群体系统	178
§ 16.3 一种弱肉强食模型	184
习题	188
实践与思考	188
第十七章 植物生长模型	190
§ 17.1 问题的提出	190
§ 17.2 植物生长过程中的能量转换	190
§ 17.3 初步模型	191
§ 17.4 考虑碳氮需求比例的模型	192
§ 17.5 根叶模型	197
习题	200
实践与思考	200
第十八章 用放射性同位素测定局部脑血流量	201
§ 18.1 问题的提出	201

§ 18.2 假设和建模	202
§ 18.3 参数的辨识	206
§ 18.4 模型的评价	209
习题	210
实践与思考	210
第十九章 糖尿病检测模型	212
§ 19.1 葡萄糖耐量试验	212
§ 19.2 假设与糖代谢调节系统模型的建立	213
§ 19.3 模型的应用与评价	216
习题	218
实践与思考	219
第二十章 风险决策	221
§ 20.1 设备的定期维修问题	221
§ 20.2 风险决策的矩阵形式	222
§ 20.3 最小期望机会损失原则	224
§ 20.4 决策树	225
习题	226
实践与思考	227
第二十一章 对策模型	228
§ 21.1 问题的提出	228
§ 21.2 两人零和纯策略对策	230
§ 21.3 混合策略对策	233
§ 21.4 在水雷战中的应用	236
§ 21.5 两人非零和对策	240
习题	246
实践与思考	248
第二十二章 乳腺癌的诊断	249
§ 22.1 问题的提出	249
§ 22.2 人工神经网络方法	249
§ 22.3 特征选择方法	257
习题	261

实践与思考	261
第二十三章 从容器中流出的液体	265
§ 23.1 问题的提出	265
§ 23.2 流体动力学方程组和贝努里定律	266
§ 23.3 液体排完时间的计算	269
§ 23.4 实际应用	271
习题	274
实践与思考	274
第二十四章 激光钻孔	275
§ 24.1 物理模型	275
§ 24.2 数学模型	276
§ 24.3 钻孔的极限速度	279
§ 24.4 摄动解	281
习题	286
实践与思考	287
第二十五章 变分模型与有限元	288
§ 25.1 最速下降线和悬链线	288
§ 25.2 细弦和薄膜的平衡	292
§ 25.3 平面热传导模型和薄膜比拟	295
§ 25.4 差分法和有限元素法	300
习题	308
实践与思考	308
第二十六章 传染病模型	310
§ 26.1 问题的提出	310
§ 26.2 SI 模型	310
§ 26.3 SIS 模型	313
§ 26.4 SIR 模型	314
§ 26.5 定常出生的 SIR 模型	317
§ 26.6 更精致的模型	318
§ 26.7 参数辨识	320
习题	320

实践与思考	321
第二十七章 人口的预测与控制	322
§ 27.1 马尔萨斯模型和自限模型	322
§ 27.2 随机模型	324
§ 27.3 考虑年龄结构的人口模型	329
§ 27.4 人口控制	335
习题	342
实践与思考	342
第二十八章 交通流模型和路口交通管理	343
§ 28.1 交通流和连续性方程	343
§ 28.2 如何使隧道中的交通流量最大	345
§ 28.3 被火车阻隔的交通流	348
§ 28.4 路口交通管理	353
§ 28.5 路口等待时间的随机模型	358
§ 28.6 交通运输规划模型简介	362
习题	367
实践与思考	367
第二十九章 电阻率测井的数学模型	369
§ 29.1 数学模型的建立	369
§ 29.2 变分模型	375
§ 29.3 有限元数值解	377
§ 29.4 等值面边值问题的优点	382
§ 29.5 测井反问题	383
习题	388
实践与思考	388
参考文献	389

第一章 引言

随着社会的发展和科技的进步,特别是近年来电子计算机技术的发展,数学愈来愈向其他科技领域渗透,数学模型的研究愈来愈广泛和深入,数学模型也逐步成为一门独立的课程在世界各地的大学中开设.我们将首先介绍什么是数学模型,研究数学模型有什么意义,以及学习和研究数学模型的正确方法是什么.

§ 1.1 什么是数学模型

近年来,数学模型成为一个十分流行的词汇.经济学家经常讨论一个国家的宏观经济数学模型或某一经济行为特定的数学模型;巨型的化工或钢铁联合企业的管理人员经常研究用于生产过程自动控制的数学模型;在企业管理、医药工程、环境与人口等领域,为了得到定量化的规律,也离不开数学模型.那么,究竟什么是数学模型呢?

在现实世界中经常会遇到这样的问题,需要揭示某些数量的关系、模式或空间形式,数学就是解决这种问题的科学与技术.

数量规律和空间形式往往隐藏在各种五光十色的现象背后,要用数学去解决现实问题必须去粗取精、去伪存真,从各种现象中抽象出数学问题来.同时,现实世界的问题往往又是十分复杂的,在从实际中抽象出数学问题的过程中,我们必须忽略一些次要的因素,抓住主要的因素,作一些必要的简化,使抽象所得的数学问题可以用适当的方法进行求解.

以解决某个现实问题为目的,从该问题中抽象、归结出来的数学问题就称为数学模型.较著名的数学模型的定义是本德(E. A. Bender)给出的,他认为,数学模型是关于部分现实世界为一定目的而作的抽象、简化的数学结构.更简洁地,也可以认为数学模型是用数学术语对部分现实世界的描述.

既然数学模型是为解决现实问题而建立起来的,它必须反映现实,也就是反映现实问题的数量方面.然而既然是一种模型,它就不可能是现实问题的一种拷贝.它忽略了现实问题的许多与数量无关的因素,有时还忽略一些次要的数量因素,作了必要的简化,从而它在本质上更加集中地反映现实问题的数量规律.