考试名家指导

考研辅导教材系列

考研

概率论与数理统计讲义（提高篇）

北京大学　姚孟臣　编著

3

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研辅导教材系列

概率论与数理统计讲义

（提高篇）

北京大学　姚孟臣　编著

机械工业出版社

本书是工学类、经济和管理学类硕士研究生入学考试科目"概率论与数理统计"的应试指导书，它是作者多年来在全国各地考研辅导班(提高班)的讲稿基础上整理而成的. 全书共分五讲：随机事件和概率(6学时)，随机变量及其分布(3学时)，多维随机变量及其分布(5学时)，随机变量的数字特征与中心极限定理(6学时)，数理统计(5学时). 附录A"历年真题分析"给出2000年至2005年的"试题分析""内容分布"和"题型分布". 附录B中的B2～B5分别给出了按照最新国家标准颁布的正态分布、χ^2分布、t分布和F分布的分位数表，这些表在考研中已正式使用. 为方便考生复习，本书每小节都对应掌握的考核点提出若干问题供思考，并在书中留空以便考生填写.

本书作者多年在全国各地考研辅导班(提高班)上讲课，具有丰富的教学经验，深知考生的疑难与困惑，因而本书能紧扣考试大纲，贴切考试实践，在每一讲编制了知识网络图和考核要求，有针对性地对重点、难点内容进行多侧面、多角度的剖析，同时对考核要点提出问题请考生思考，对典型例题用多种解法进行讲解，以开拓学生思路，从而迅速提高考生在做习题以及实际应用方面分析、解决问题的能力.

本书可作为工学类、经济和管理类硕士研究生入学考试数学一、三、四"概率论与数理统计"考研辅导班(提高班)的辅导用书或教学参考书，也可作为理工类、经济管理类的本科生及数学工作者的学习用书或参考书.

本书最早由北京大学出版社于2001年5月首次出版，历经3次修订，此次为第4次修订，并改由机械工业出版社出版.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计讲义. 提高篇/姚孟臣编著. —北京：机械工业出版社，2005.3
(考研辅导教材系列)
ISBN 7-111-16284-6

Ⅰ. 概… Ⅱ. 姚… Ⅲ. ①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料 ②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第020601号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
策划编辑：边 萌 徐春涛
责任编辑：徐春涛 责任印制：石 冉
三河市宏达印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2005年3月第1版第1次印刷
787mm×1092mm 1/16 · 12.75印张 · 273千字
定价：18.50元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话：(010)68326294
本社服务热线电话：(010)68311609
本社服务邮箱：marketing@mail.machineinfo.gov.cn
投稿热线电话：(010)68354423
投稿邮箱：sbs@mail.machineinfo.gov.cn

前　　言

“概率论与数理统计”是全国硕士研究生入学数学考试的一个重要组成部分．从研究必然问题到处理随机问题，不仅大多数初学者感到比较困难，对于曾经学过（或只学过）概率论的广大考生来说也觉得问题不少，特别是在做习题以及解决实际应用方面遇到的问题会更多一些．从近几年的硕士研究生入学数学考试阅卷结果也可以看出这部分试题得分率普遍较低，有些考生甚至完全放弃这部分试题．为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生能在较短的时间内全面、系统地复习有关的内容，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关“概率论与数理统计”的要求，结合我们多年参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验，先后编写了《概率论与数理统计讲义（基础篇）》、《概率论与数理统计讲义（提高篇）》．

《概率论与数理统计讲义（提高篇）》一书是作者多年来在全国各地考研辅导班（提高班）的讲稿基础上整理而成的．全书按考核要求及目前的实际授课时数（25 学时）分为五讲：第一讲“随机事件和概率”（6 学时）；第二讲“随机变量及其分布”（3 学时）；第三讲“多维随机变量及其分布”（5 学时）；第四讲“随机变量的数字特征与中心极限定理”（6 学时）；第五讲“数理统计”（5 学时）．为了方便广大考生的复习，我们在每一讲中编制了知识网络图和考核要求，通过网络图和考核要求使得考生了解到：“大纲”中每部分的内容是什么，需要掌握到什么程度．每一位考生便可以根据自己复习的情况，明确在什么地方适量增加练习，提高复习的效率，从而迅速提高考生在做习题以及实际应用方面分析、解决问题的能力．在附录 A“历年真题分析”中分别给出了 2000 年至 2005 年的“试题分析”“内容分布”和“题型分布”，在此基础上，对各章的重点考核点及常考的题型进行归纳和总结，有利于广大考生在复习时能抓住要害，突出重点．附录 B 中的 B2～B5，分别给出了按照最新国家标准颁布的正态分布、χ^2 分布、t 分布、F 分布的分位数表，这些表在考研中已正式使用．

本书出版，一方面使得参加辅导班的同学在听讲时可以少记或不记笔记，避免出现“顾得上听，顾不上记”的矛盾；另一方面也可以使得不能参加辅导班的同学了解辅导班讲课的内容．由于篇幅的限制，我们不可能将课上所讲的内容一字不落地写出，特别是“典型例题”中有针对性的分析等仍然需要参加辅导班的同学根据本人领会的情况在课上作一些记录．因此，本书不可能全面代替辅导班的作用．需要指出的是，读者在阅读本书前应该对：《概率论与数理统计讲义（基础篇）》一书的基本内容有所了解．

本书不仅是硕士研究生入学考试概率统计科目应试者的提高阶段的复习用书，也可作为理工类、经济管理及文科类的本科生及数学工作者的学习用书或参考书．

张清允同志参加了本书的资料整理及有关章节的编写工作．由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请广大读者批评指正．

编　者

2005 年 3 月于北京大学中关园

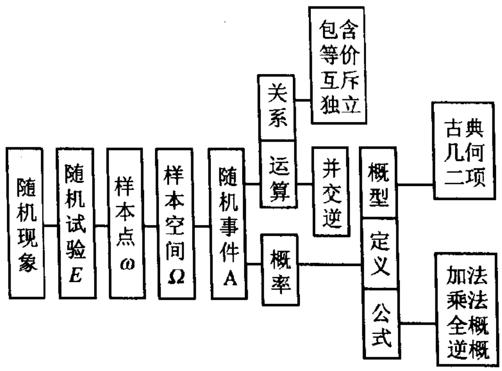
目　录

前言
第 1 讲　随机事件和概率 …………………………………………（1）
1.1　知识网络图 …………………………………………（1）
1.2　重点考核点的分布 …………………………………………（1）
1.3　课上复习内容 …………………………………………（1）
1.3.1　预备知识 …………………………………………（1）
1.3.2　样本空间与随机事件 …………………………………………（7）
1.3.3　事件之间的关系与运算 …………………………………………（8）
1.3.4　概率的定义与性质 …………………………………………（10）
1.3.5　条件概率与概率的乘法公式 …………………………………………（15）
1.3.6　全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式 …………………………………………（18）
1.3.7　伯努利(Bernoulli)概型 …………………………………………（21）
1.3.8　练习题 …………………………………………（21）
1.4　典型例题分析 …………………………………………（23）
第 2 讲　随机变量及其分布 …………………………………………（33）
2.1　知识网络图 …………………………………………（33）
2.2　重点考核点的分布 …………………………………………（33）
2.3　课上复习内容 …………………………………………（33）
2.3.1　随机变量的概念及分类 …………………………………………（33）
2.3.2　常见分布 …………………………………………（38）
2.3.3　函数的分布 …………………………………………（42）
2.3.4　练习题 …………………………………………（46）
2.4　典型例题分析 …………………………………………（47）
第 3 讲　多维随机变量及其分布 …………………………………………（56）
3.1　知识网络图 …………………………………………（56）
3.2　重点考核点的分布 …………………………………………（56）
3.3　课上复习内容 …………………………………………（56）
3.3.1　多维随机变量的概念及分类 …………………………………………（56）
3.3.2　随机变量的独立性 …………………………………………（64）
3.3.3　函数的分布 …………………………………………（68）
3.3.4　几个重要结论 …………………………………………（73）
3.3.5　练习题 …………………………………………（75）
3.4　典型例题分析 …………………………………………（77）

第 4 讲　随机变量的数字特征与中心极限定理 …… (83)
4.1　知识网络图 …… (83)
4.2　重点考核点的分布 …… (83)
4.3　课上复习内容 …… (83)
4.3.1　随机变量的数学期望的概念与性质 …… (83)
4.3.2　随机变量的方差的概念与性质 …… (87)
4.3.3　常见分布的数学期望与方差 …… (88)
4.3.4　随机变量矩、协方差和相关系数 …… (89)
4.3.5　二维随机向量的数字特征 …… (92)
4.3.6　中心极限定理 …… (94)
4.3.7　练习题 …… (100)
4.4　典型例题分析 …… (102)
第 5 讲　数理统计 …… (110)
5.1　知识网络图 …… (110)
5.2　重点考核点的分布 …… (110)
5.3　课上复习内容 …… (111)
5.3.1　基本概念 …… (111)
5.3.2　参数估计 …… (115)
5.3.3　假设检验 …… (122)
5.3.4　练习题 …… (125)
5.4　典型例题分析 …… (128)
附录 …… (135)
附录 A　历年真题分析 …… (135)
A1　2000 年真题分析 …… (135)
A2　2001 年真题分析 …… (141)
A3　2002 年真题分析 …… (148)
A4　2003 年真题分析 …… (155)
A5　2004 年真题分析 …… (163)
A6　2005 年真题分析 …… (172)
附录 B …… (182)
B1　正态分布函数表 …… (182)
B2　正态分布分位数表 …… (183)
B3　χ^2 分布分位数表 …… (184)
B4　t 分布分位数表 …… (186)
B5　F 分布分位数表 …… (188)
B6　泊松分布表 …… (198)

第 1 讲　随机事件和概率

1.1　知识网络图



1.2　重点考核点的分布

(1) 样本空间与随机事件；

*(2) 概率的定义与性质(含古典概型、几何概型、加法公式)；

*(3) 条件概率与概率的乘法公式；

**(4) 事件之间的关系与运算(含事件的独立性)；

**(5) 全概公式与贝叶斯(Bayes)公式；

(6) 伯努利(Bernoulli)概型.

各个考核点前面加“**”表示重点考核点；“*”表示次重点考核点；括号前没有标注的表示一般考核点(下同).

1.3　课上复习内容

1.3.1　预备知识

在“概率论”复习之前，我们需要掌握“二值集合”、“组合分析中的几个定理”、“随机现象及其统计规律”和“微积分”等内容，下面将有关内容作一简单介绍：

1.3.1.1 二值集合

集合是一个不能给出数学定义的概念，尽管如此，我们仍然可以给它一个定性描述. 所谓集合就是按照某些规定能够识别的一些具体对象或事物的全体. 构成集合的每一个对象或事物叫做集合的元素.

通常集合用大写字母 A,B,C 表示，其元素用小写字母 a,b,c 表示.

设 A 是一个集合，如果 a 是 A 的元素，记作 $a\in A$，用"1"表示这一隶属关系；如果 a 不是 A 的元素，记作 $a\overline{\in} A$(或 $a\notin A$)，用"0"表示这一隶属关系.

因此，我们称这种集合为"二值集合"，在初等概率论中，我们只研究这样的集合.

有关二值集合的表示方法、基本性质在初等数学中已作过详细讨论，这里不再重复. 下面仅就集合的"相等"与"等价"概念以及集合分类情况作一简单介绍.

例 1 设 $A=\{2,4,8\}$，则集合 A 的所有子集是 $\varnothing$，$\{2\}$，$\{4\}$，$\{8\}$，$\{2,4\}$，$\{2,8\}$，$\{4,8\}$，$\{2,4,8\}$. 注意，在考虑集合 A 的所有子集时，不要把空集 $\varnothing$ 和它本身忘掉.

设 A,B 是两个集合. 如果 $A\subset B$，$B\subset A$，那么称集合 A 与 B **相等**，记作

$$A = B.$$

很明显，含有相同元素的两个集合相等.

例 2 设 $A=\{0,2,3\}$，$B=\{x\mid x$ 为方程 $x^3-5x^2+6x=0$ 的解$\}$，则 $A=B$.

设 A,B 是两个集合. 如果 B 的每一个元素对应于 A 的惟一的元素，反之 A 的每一个元素对应于 B 的惟一的元素，那么就说在 A 和 B 的元素之间建立了一一对应关系，并称 A 与 B **等价**，记作

$$A \sim B.$$

与自然数集 N 等价的任何集合，称为**可列集**. 显然，一切可列集彼此都是等价的. 今后我们常称这类集合中元素的个数为可列个(或可数个)，并把有限个或可列个统称为**至多可列个**(或**至多可数个**).

例 3 设 $A=\{a\mid a=2n,n\in \boldsymbol{N}\}$，$B=\{b\mid b=n^2+1,n\in \boldsymbol{N}\}$，则 $A\sim B$.

由上面的讨论可以看出，集合的**分类**如下：

- 集合
  - 有限集
  - 无限集
    - 可列集
    - 不可列集

1.3.1.2 组合分析中的几个定理

1. 加法原理

定理 1 设完成一件事有 n 类方法，只要选择任何一类中的一种方法，这件事就可以完成. 若第一类方法有 m_1 种，第二类方法有 m_2 种，…，第 n 类方法有 m_n 种，并且这 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法里，任何两种方法都不相同，则完成这件事就有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法.

2. 乘法原理

定理 2 设完成一件事有 n 个步骤,第一步有 m_1 种方法,第二步有 m_2 种方法,…第 n 步有 m_n 种方法,并且完成这件事必须经过每一步,则完成这件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种方法.

3. 排列

定义 1 从 n 个不同元素中,每次取出 m 个元素,按照一定顺序排成一列,称为从 n 个元素中每次取出 m 个元素的排列.

定理 3 从 n 个不同元素中,有放回地逐一取出 m 个元素进行排列(简称为可重复排列),共有 n^m 种不同的排列.

例 4 袋中有 N 个球,其中 M 个为白色,从中有放回地取出 n 个:

① $N=10, M=2, n=3$; ② $N=10, M=4, n=3$.

考虑以下各事件的排列数:

(i) 全不是白色的球; (ii) 恰有两个白色的球;

(iii) 至少有两个白色的球; (iv) 至多有两个白色的球;

(v) 颜色相同; (vi) 不考虑球的颜色.

答案是:① 当 $M=2$ 时,

(i) 8^3; (ii) $3\times2^2\times8$; (iii) $3\times2^2\times8+2^3$;

(iv) $3\times2^2\times8+3\times2\times8^2+8^3$(或 10^3-2^3); (v) 2^3+8^3; (vi) 10^3.

② 当 $M=4$ 时,将上面的 $2\to4, 8\to6$ 即可.

分析 这是一个可重复的排列问题. 由定理 3,可求出其排列数.

问题 恰有两个白色球的答案中为什么是 3 倍的 $2^2\times8$,而不是 1 倍或 6 倍的?

提示 根据加法原理.

定理 4 从 n 个不同元素中,无放回地取出 m 个($m\leqslant n$)元素进行排列(简称为选排列)共有

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

种不同的排列. 选排列的种数用 A_n^m(或 P_n^m)表示,即

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!},$$

特别地,当 $m=n$ 时的排列(简称为全排列)共有

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$$

种不同排列. 全排列的种数用 P_n(或 A_n^n)表示,即

$$P_n=n!,$$

并规定 $0!=1$.

4. 组合

定义 2 从 n 个不同元素中，每次取出 m 个元素不考虑其先后顺序作为一组，称为从 n 个元素中每次取出 m 个元素的组合.

定理 5 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合(简称为一般组合)共有

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

种不同的组合. 一般组合的组合种数用 C_n^m(或 $\binom{n}{m}$)表示，即

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!},$$

并且规定 $C_n^0=1$. 不难看出

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}.$$

例 5 袋中有 N 个球，其中 M 个为白色，从中任取 n 个：

① $N=10, M=2, n=3$； ② $N=10, M=4, n=3$.

考虑以下各事件的组合数：

(i) 全不是白色的球； (ii) 恰有两个白色的球；

(iii) 至少有两个白色的球； (iv) 至多有两个白色的球；

(v) 颜色相同； (vi) 不考虑球的颜色.

答案是：① 当 $M=2$ 时，

(i) $C_8^3C_2^0$； (ii) $C_2^2C_8^1$； (iii) $C_2^2C_8^1$；

(iv) $C_2^2C_8^1+C_2^1C_8^2+C_2^0C_8^3$(或 C_{10}^3)；

(v) C_8^3； (vi) C_{10}^3.

② 当 $M=4$ 时，

(i) $C_6^3C_4^0$； (ii) $C_4^2C_6^1$； (iii) $C_4^2C_6^1+C_4^3C_6^0$；

(iv) $C_4^2C_6^1+C_4^1C_6^2+C_4^0C_6^3$(或 $C_{10}^3-C_4^3$)； (v) $C_4^3+C_6^3$； (vi) C_{10}^3.

分析(略)

定理 6 从不同的 k 类元素中，取出 m 个元素. 从第 1 类 n_1 个不同元素中取出 m_1 个，从第 2 类 n_2 个不同的元素中取出 m_2 个，…，第 k 类 n_k 个不同的元素中取出 m_k 个，并且 $n_i\geqslant m_i>0(i=1,2,\cdots,k)$(简称为**不同类元素的组合**)，共有

$$C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}\cdots C_{n_k}^{m_k}=\prod_{i=1}^{k}C_{n_i}^{m_i}$$

种不同取法.

例 6 从 3 个电阻，4 个电感，5 个电容中，取出 9 个元件，问其中有 2 个电阻，3 个电感，4 个电容的取法有多少种？

解 这是一个不同类元素的组合问题. 由定理 6 知，共有

$$C_3^2\cdot C_4^3\cdot C_5^4=C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_5^1=60$$

即 60 种取法.

例 7 五双不同号的鞋，从中任取 4 只，取出的 4 只都不配对（即不成双），求(i) 排列数；(ii) 组合数.

答案是：(i) $C_{10}^1C_8^1C_6^1C_4^1$；　(ii) $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$.

分析（略）

1.3.1.3 微积分

概率论可以分为“高等概率论”与“初等概率论”. 初等概率论是建立在排列组合和微积分等数学方法的基础上的. 全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中的“概率论”就是初等概率论.

微积分作为初等概率论的基础知识，除了我们已经比较了解的“函数、极限、连续、可导、可积”等概念之外，还应了解下面的有关概念.

1. 可求积与不可求积

在微积分中，求不定积分与求导数有很大不同，我们知道任何初等函数的导数仍为初等函数，而许多初等函数的不定积分，例如

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int \frac{1}{\ln x}dx,\quad \int \sin x^2 dx,\quad \int \sqrt{1+x^3}dx$$

等，虽然它们的被积函数的表达式都很简单，但在初等函数的范围内却积不出来. 这不是因为积分方法不够，而是由于被积函数的原函数不是初等函数的缘故. 我们称这种函数是“**不可求积**”的. 因此我们可以将函数划分为：

- 函数
  - 可积
    - 可求积
    - 不可求积
  - 不可积

在初等概率论中，正态分布密度函数就是属于可积而不可求积的一类函数.

2. 绝对收敛

(1) 任意项级数的绝对收敛

所谓任意项级数是指级数的各项可以随意地取正数、负数或零. 下面给出绝对收敛与条件收敛两个概念.

定义 3 若任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的各项取绝对值所成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**绝对收敛的**；若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**条件收敛的**.

例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 是收敛的，但各项取绝对值所成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的，因而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$是条件收敛. 又如，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$各项取绝对值所成级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\right|=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

是收敛的，因而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$是绝对收敛的.

定理 7 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛.

证明 令

$$v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)=\begin{cases}u_n & (u_n\geqslant 0),\\ 0 & (u_n<0),\end{cases}\quad (n=1,2,\cdots)$$

于是
$$|u_n|\geqslant v_n\geqslant 0\quad (n=1,2,\cdots).$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，根据正项级数的比较判别法，可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是收敛的.

考虑到
$$u_n=2v_n-|u_n|,$$

根据级数的基本性质，可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也是收敛的.

根据上面的定理，判断任意一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性，可以先判断它是否绝对收敛. 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛. 这样一来，我们可以借助于正项级数的判别法来判断任意项级数的敛散性了. 但是，当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散时，不能由此推出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

在初等概率论中，我们将用绝对收敛这一概念来给出离散型随机变量均值的定义.

(2) 无穷积分的绝对收敛

定义 4 如果函数 $f(x)$在任何有限区间$[a,b]$($b>a$)上可积，并且积分

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

收敛，那么，我们称积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

是绝对收敛的. 此时，我们也称函数 $f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上**绝对可积**.

定理 8 若积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛.

上面的定理的逆定理并不成立，也就是说，从$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性，不能推出$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 也收敛，例如，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

是收敛的,但是积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$$

却发散. 这一点与定积分不同,对于定积分,从$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的存在性,必能推出$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$存在.

若积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛,而积分$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$发散时,则称积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$为**条件收敛**的. 例如积分$\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$是条件收敛的.

在初等概率论中,我们将用绝对可积这一概念来给出连续型随机变量均值的定义.

1.3.2 样本空间与随机事件

1. 随机现象及其统计规律性

在客观世界中存在着两类不同的现象:确定性现象和随机现象.

在一组不变的条件 S 下,某种结果必定发生或必定不发生的现象称为**确定性现象**. 这类现象的一个共同点是:事先可以断定其结果.

在一组不变的条件 S 下,具有多种可能发生的结果的现象称为**随机现象**. 这类现象的一个共同点是:事先不能预言多种可能结果中究竟出现哪一种.

一般来说,随机现象具有两重性:表面上的偶然性与内部蕴含着的必然规律性. 随机现象的偶然性又称为它的**随机性**. 在一次实验或观察中,结果的不确定性就是随机现象随机性的一面;在相同的条件下进行大量重复实验或观察时呈现出来的规律性是随机现象必然性的一面,称随机现象的必然性为**统计规律性**.

2. 随机试验与随机事件

为了叙述方便,我们把对随机现象进行的一次观测或一次实验统称为它的一个试验. 如果这个试验满足下面的三个条件:

(1) 在相同的条件下,试验可以重复地进行;

(2) 试验的结果不止一种,而且事先可以确知试验的所有结果;

(3) 在进行试验前不能确定出现哪一个结果.

那么我们就称它是一个**随机试验**,以后简称为**试验**. 一般用字母 E 表示.

问题 “一个具体的人,在一次乘车郊游时,因发生交通事故而受伤”,是否为随机试验?

在随机试验中,每一个可能出现的不可分解的最简单的结果称为随机试验的**基本事件**或**样本点**,用 ω 表示;而由全体基本事件构成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**,记为 Ω.

例 8 设 E_1 为在一定条件下抛掷一枚匀称的硬币,观察正、反面出现的情况. 记 ω_1 是出

现正面，ω_2 是出现反面. 于是 Ω 由两个基本事件 ω_1, ω_2 构成，即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

例 9 设 E_2 为在一定条件下掷一粒骰子，观察出现的点数. 记 ω_i 为出现 i 个点($i=1,2,\cdots,6$). 于是有 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$.

问题 例 8、例 9 中样本空间 Ω 的子集个数是多少？为什么？

所谓**随机事件**是样本空间 Ω 的一个子集，随机事件简称为**事件**，用字母 A,B,C 等表示. 因此，某个事件 A 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 ω 发生，记为 $\omega \in A$.

在例 9 中，$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$，而 E_2 中的一个事件是具有某些特征的样本点组成的集合. 例如，设事件 $A=\{$出现偶数点$\}$，$B=\{$出现的点数大于 4$\}$，$C=\{$出现 3 点$\}$，可见它们都是 Ω 的子集. 显然，如果事件 A 发生，那么子集 $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ 中的一个样本点一定发生，反之亦然，故有 $A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$；类似地有 $B=\{\omega_5, \omega_6\}$ 和 $C=\{\omega_3\}$. 一般而言，在例 9 中，任一由样本点组成的 Ω 的子集也都是随机事件.

1.3.3 事件之间的关系与运算

事件之间的关系有："包含"、"等价(或相等)"、"互不相容(或互斥)"以及"独立"四种.

事件之间的基本运算有："并"、"交"以及"逆".

如果没有特别的说明，下面问题的讨论我们都假定是在同一样本空间 Ω 中进行的.

1. 事件的包含关系与等价关系

设 A,B 为两个事件. 如果 A 中的每一个样本点都属于 B，那么称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

如果 $A \supset B$ 与 $B \supset A$ 同时成立，那么称事件 A 与事件 B **等价**或**相等**，记为 $A=B$.

在下面的讨论中，我们经常说"事件相同、对应概率相等"，这里的"相同"指的是两个事件"等价".

2. 事件的并与交

设 A,B 为两个事件. 我们把至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的**并**或**和**，记为 $A \cup B$ 或 $A+B$.

设 A,B 为两个事件. 我们把同时属于 A 及 B 的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的**交**或**积**，记为 $A \cap B$ 或 $A \cdot B$，有时也简记为 AB.

3. 事件的互不相容关系与事件的逆

设 A,B 为两个事件，如果 $A \cdot B = \varnothing$，那么称事件 A 与 B 是**互不相容**的(或**互斥**的).

对于事件 A，我们把不包含在 A 中的所有样本点构成的集合称为事件 A 的**逆**(或 A 的**对立事件**)，记为 $\overline{A}$. 我们规定它是事件的基本运算之一.

在一次试验中，事件 A 与 $\overline{A}$ 不会同时发生(即 $A \cdot \overline{A} = \varnothing$，称它们具有**互斥性**)，而且 A 与 $\overline{A}$ 至少有一个发生(即 $A + \overline{A} = \Omega$，称它们具有**完全性**). 这就是说，事件 A 与 $\overline{A}$ 满足：

$$\begin{cases} A \cdot \overline{A} = \varnothing, \\ A + \overline{A} = \Omega. \end{cases}$$

问题 (1) 事件的互不相容关系如何推广到多于两个事件的情形？

(2) 三个事件 A,B,C，$ABC=\varnothing$ 与

$$\begin{cases} AB = \varnothing, \\ AC = \varnothing, \\ BC = \varnothing \end{cases}$$

关系如何？

根据事件的基本运算定义，这里给出事件之间运算的几个重要规律：

(1) $A(B+C)=AB+AC$（分配律）；　　(2) $A+BC=(A+B)(A+C)$（分配律）；

(3) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$（德·摩根律）；　　(4) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$（德·摩根律）.

有了事件的三种基本运算我们就可以定义事件的其他一些运算. 例如，我们称事件 $A\overline{B}$ 为事件 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$. 可见，事件 $A-B$ 是由包含于 A 而不包含于 B 的所有样本点构成的集合.

例 10 在数学系学生中任选一名学生. 设事件

$A=$｛选出的学生是男生｝，　$B=$｛选出的学生是三年级学生｝，　$C=$｛选出的学生是科普队的｝.

(1) 叙述事件 $AB\overline{C}$ 的含义.

(2) 在什么条件下，$ABC=C$ 成立？

(3) 在什么条件下，$C\subset B$ 成立？

解 (1) 事件 $AB\overline{C}$ 的含义是，选出的学生是三年级的男生，不是科普队员.

(2) 由于 $ABC\subset C$，故 $ABC=C$ 当且仅当 $C\subset ABC$. 这又当且仅当 $C\subset AB$，即科普队员都是三年级的男生.

(3) 当科普队员全是三年级学生时，C 是 B 的子事件，即 $C\subset B$ 成立.

4. 事件的独立性

设 A,B 是某一随机试验的任意两个随机事件，称 **A 与 B 是相互独立**的，如果

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

可见事件 A 与 B 相互独立是建立在概率基础上事件之间的一种关系. 所谓事件 A 与 B 相互独立就是指其中一个事件发生与否不影响另一个事件发生的可能性，即当 $P(B)\neq 0$ 时，A 与 B 相互独立也可以用

$$P(A|B) = P(A)$$

来定义.

由两个随机事件相互独立的定义，我们可以得到：若事件 A 与 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

如果事件 A,B,C 满足

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 **A,B,C 相互独立**.

注意,事件 A,B,C 相互独立与事件 A,B,C 两两独立不同,两两独立是指上述四个式子中前三个式子成立.因此,相互独立一定是两两独立,但反之不一定.

例 11 将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:A={掷第一次出现正面},B={掷第二次出现正面},C={正、反面各出现一次},则事件 A,B,C 是相互独立,还是两两独立?

解 由题设,可知 $P(AB)=P(A)P(B)$,即 A,B 相互独立.而

$$P(AC)=P(A(A\overline{B}+\overline{A}B))=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=\frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} P(A)P(C) &= P(A)P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A)(P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)) \\ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

故 A,C 相互独立,同理 B,C 也相互独立.但是

$$P(ABC)=P(\varnothing)=0,$$

而
$$P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

即
$$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C),$$

因此 A,B,C 两两独立.

问题 (1) 两个事件的"独立"与"互斥"之间有没有关系?在一般情况下,即 $P(A)>0$, $P(B)>0$ 时,有关系吗?为什么?

(2) 设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$. 问 A 与 B 是否独立,为什么?由此可以得到什么结论?

1.3.4 概率的定义与性质

1. 概率的公理化定义

定义 5 设 E 是一个随机试验,Ω 为它的样本空间,以 E 中所有的随机事件组成的集合为定义域,定义一个函数 $P(A)$(其中 A 为任一随机事件),且 $P(A)$满足以下三条公理,则称函数 $P(A)$为事件 A 的**概率**.

公理 1(非负性) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

公理 2(规范性) $P(\Omega)=1$.

公理 3(可列可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$两两互斥,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

由上面三条公理可以推导出概率的一些基本性质.

性质 1(有限可加性) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

性质 2(加法公式) 设 A, B 为任意两个随机事件,则

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

性质 3 设 A 为任意随机事件,则

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

性质 4 设 A, B 为两个任意的随机事件,若 $A \subset B$,则

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

由于 $P(B-A) \geqslant 0$,根据性质 4 可以推得,当 $A \subset B$ 时,

$$P(A) \leqslant P(B).$$

例 12 设 A, B, C 是三个随机事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(CB)=0$,$P(AC)=\frac{1}{8}$,求 A, B, C 中至少有一个发生的概率.

解 设 $D=\{A, B, C$ 中至少有一个发生$\}$,则 $D=A+B+C$,于是

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A + B + C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC). \end{aligned}$$

又因为

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, \quad P(AB)=P(CB)=0, \quad P(AC)=\frac{1}{8},$$

而由 $P(AB)=0$,有 $P(ABC)=0$,所以

$$P(D)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

问题 怎样由 $P(AB)=0$ 推出 $P(ABC)=0$?

提示 利用事件的关系与运算导出.

例 13 设事件 A 与 B 相互独立,$P(A)=a$,$P(B)=b$.若事件 C 发生,必然导致 A 与 B 同时发生,求 A, B, C 都不发生的概率.

解 由于事件 A 与 B 相互独立,因此

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = a \cdot b.$$

考虑到 $C \subset AB$,故有

$$\overline{C} \supset \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B} \supset \overline{A}\,\overline{B},$$

因此