

高中数学

综合复习72讲

西安市八十五中学数学教研组 编

陕西人民出版社

高中数学综合复习72讲

西安市 85 中学数学组 编

陕西人民出版社

高中数学综合复习 72 讲

西安市 85 中学数学组编

陕西人民出版社出版

(西安北大街131号)

陕西省新华书店发行 国营五二三厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 17.875 字数 374,000

1984 年 12 月第 1 版 1984 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—75,500

统一书号: 7094·430 定价: 1.95 元

前 言

高中数学是数学体系中承上启下的重要一环，是学习高等数学的重要基础。搞好综合复习是教学中不可缺少的重要环节。如何在有限的时间内，在不搞“题海战术”，减轻师生过重负担的条件下，搞好复习教学，使学生把所学知识系统化，在认识上加深一步并得到综合提高，这是当前高中数学教学中值得很好研究的课题之一。我们总结多年来进行复习教学的经验教训，编写了这本书，企图为解决上述问题贡献一点微薄的力量。

编写这本书时，我们努力遵循的基本原则是：狠抓双基，精讲精练，注重思路方法，适当综合提高。据此，在内容上，本书紧扣大纲和现行数学统编教材编写，全书分为十八章七十二讲。前十七章每章开始先编写了“基础知识”部分，力求帮助读者把知识系统化；最后一章为“综合解题的思路与方法”，可帮助读者提高综合解题的能力。在形式上，本书没有重复已学知识的讲述，而是把加深对“双基”的理解和运用渗透在典型例题的讲述之中。特别加强了对问题的“分析”和“回顾”，试图弥补课本在这方面的不足，以利于培养学生分析与解决问题的能力。

本书在编写过程中，我们参阅了其它一些有经验的教师发表的有关资料，在此一并表示衷心感谢。

本书由范光中、贾安全、熊风鸣、江树基、李铭祺、袁

秀君编写。全书由董上元、范光中审校。

由于我们水平有限，时间仓促，定有不少缺点与错误，
敬请读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 数与式

基础知识	(1)
第一讲 复数 (一)	(5)
习题一	(9)
第二讲 复数 (二)	(10)
习题二	(13)
第三讲 代数式	(14)
习题三	(17)

第二章 方程 (组) 与不等式 (组)

基础知识	(19)
第四讲 行列式	(24)
习题四	(28)
第五讲 线性方程组	(29)
习题五	(32)
第六讲 一元二次方程的讨论	(33)
习题六	(36)
第七讲 含绝对值符号的方程与不等式	(37)
习题七	(39)
第八讲 不等式证明 (一)	(39)
习题八	(42)
第九讲 不等式证明 (二)	(43)

习题九	(47)
第三章 函数	
基础知识	(49)
第十讲 集合与映射	(58)
习题十	(61)
第十一讲 正、反比例与一、二次函数	(61)
习题十一	(64)
第十二讲 指数函数、幂函数	(65)
习题十二	(67)
第十三讲 对数函数	(67)
习题十三	(72)
第十四讲 反函数、初等代数函数	(73)
习题十四	(75)
第十五讲 指数方程、对数方程	(76)
习题十五	(79)
第四章 排列、组合、二项式定理	
基础知识	(81)
第十六讲 排列、组合数公式与性质	(83)
习题十六	(85)
第十七讲 排列组合应用题	(86)
习题十七	(90)
第十八讲 二项式定理	(91)
习题十八	(94)
第五章 数列	
基础知识	(96)
第十九讲 数列 (一)	(97)

习题十九	(101)
第二十讲 数列(二)	(102)
习题二十	(105)
第二十一讲 数列求和	(106)
习题二十一	(109)
第六章 三角函数	
基础知识	(110)
第二十二讲 三角函数的定义及性质	(115)
习题二十二	(120)
第二十三讲 三角函数的图象	(121)
习题二十三	(125)
第七章 三角函数式的变换	
基础知识	(127)
第二十四讲 三角函数的求值问题	(128)
习题二十四	(135)
第二十五讲 三角恒等式的证明	(136)
习题二十五	(143)
第二十六讲 条件等式的证明	(143)
习题二十六	(149)
第二十七讲 三角函数的极值与不等式	(150)
习题二十七	(155)
第八章 反三角函数与三角方程	
基础知识	(156)
第二十八讲 反三角函数	(159)
习题二十八	(166)
第二十九讲 三角方程	(167)

习题二十九	(174)
第九章 解三角形	
基础知识	(175)
第三十讲 解三角形	(178)
习题三十	(184)
第十章 直线与平面	
基础知识	(186)
第三十一讲 平面和异面直线	(191)
习题三十一	(195)
第三十二讲 直线、平面的平行	(196)
习题三十二	(199)
第三十三讲 直线、平面的垂直	(200)
习题三十三	(204)
第三十四讲 距离与角	(204)
习题三十四	(211)
第十一章 多面体与旋转体	
基础知识	(213)
第三十五讲 多面体	(213)
习题三十五	(223)
第三十六讲 旋转体	(223)
习题三十六	(227)
第三十七讲 截面	(228)
习题三十七	(233)
第三十八讲 综合练习 (一)	(233)
习题三十八	(238)
第三十九讲 综合练习 (二)	(239)

习题三十九	(244)
第十二章 直线与圆	
基础知识	(245)
第四十讲 直线	(255)
习题四十	(260)
第四十一讲 圆	(261)
习题四十一	(266)
第十三章 圆锥曲线	
基础知识	(268)
第四十二讲 椭圆	(278)
习题四十二	(285)
第四十三讲 双曲线	(286)
习题四十三	(293)
第四十四讲 抛物线	(294)
习题四十四	(299)
第四十五讲 坐标变换与方程化简	(300)
习题四十五	(306)
第十四章 极坐标与参数方程	
基础知识	(307)
第四十六讲 极坐标	(313)
习题四十六	(319)
第四十七讲 参数方程	(320)
习题四十七	(328)
第四十八讲 解析法与坐标系的选取	(328)
习题四十八	(335)
第四十九讲 设参消参求参	(336)

习题四十九	(342)
第五十讲 求轨迹方程	(343)
习题五十	(351)
第五十一讲 曲线系问题	(352)
习题五十一	(357)
第十五章 极限与连续	
基础知识	(359)
第五十二讲 极限 (一)	(363)
习题五十二	(368)
第五十三讲 极限 (二)	(369)
习题五十三	(375)
第十六章 导数与微分	
基础知识	(377)
第五十四讲 导数的概念与计算	(380)
习题五十四	(385)
第五十五讲 导数的应用 (一) 切线与函数的 增减性	(386)
习题五十五	(392)
第五十六讲 导数的应用 (二) 极值与最大 (小) 值	(392)
习题五十六	(397)
第五十七讲 微分及其应用	(398)
习题五十七	(400)
第十七章 积分	
基础知识	(402)
第五十八讲 不定积分的概念和计算 (一)	(406)

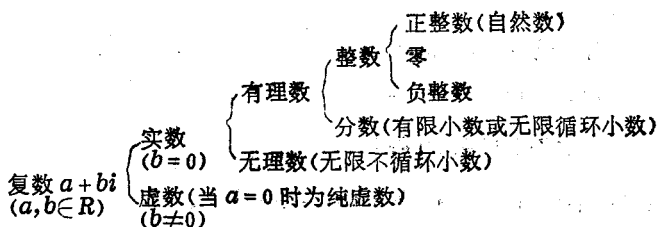
习题五十八	(411)
第五十九讲 不定积分的计算(二)	(411)
习题五十九	(420)
第六十讲 定积分及其应用	(421)
习题六十	(428)
第十八章 综合解题的思想和方法	
第六十一讲 充要条件	(431)
习题六十一	(437)
第六十二讲 基本数学思想 方程与函数	(438)
习题六十二	(442)
第六十三讲 基本数学方法 配方与换元	(443)
习题六十三	(448)
第六十四讲 基本数学方法 待定系数与基本量 法	(449)
习题六十四	(454)
第六十五讲 证题方法 综合、分析、比较	(454)
习题六十五	(459)
第六十六讲 证题方法 反证、归纳	(460)
习题六十六	(464)
第六十七讲 解题思路 分析综合、类比联想	(464)
习题六十七	(469)
第六十八讲 解题思路 观察试验、猜想归纳	(470)
习题六十八	(474)
第六十九讲 解题思路 形数结合	(474)
习题六十九	(478)
第七十讲 一题多解	(479)

习题七十	(487)
第七十一讲 多题一解	(488)
习题七十一	(492)
第七十二讲 综合题举例	(493)
习题七十二	(499)
习题答案或提示	(501)

第一章 数与式

基础知识

一、 数的系统表



二、 数的一些重要概念和性质

1 单位 实数的单位是 1, 1 不是质数, 也不是合数。
纯虚数的单位是 i , $i^2 = -1$, i 可以和实数在一起进行四则运算。 i 的幂具有周期性, 即:

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i. \quad (n \in \mathbb{N})$$

2 表示法

$$\text{复数 } z = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = \overset{\rightarrow}{OZ}$$

(代数表示) (三角表示) (向量表示)

其中 $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$, 模 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, 幅角主值 $0 \leq \theta < 2\pi$.

复数 $a+bi$ 和复平面上的点 $Z(a,b)$ 一一对应。实数和实数轴上的点一一对应，纯虚数和虚轴（不包括原点）上的点一一对应。

若 n 是整数，则 $2n$ 表示偶数， $2n+1$ 表示奇数。

有理数都可以用既约分数的形式表示。

3 绝对值（模）

若复数 $z=a+bi$ ，则 $r=|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

$=|\vec{OZ}|$ 。实数的绝对值 $|a|=\begin{cases} a(a\geq 0), \\ -a(a<0). \end{cases}$ 纯虚数的绝对值 $|bi|=|b|>0$ 。

实数中关于绝对值的定理，在复数中也成立，即

$$|z_1|-|z_2|\leq|z_1\pm z_2|\leq|z_1|+|z_2|,$$

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

注意： $|a^2|=a^2$ ，当且仅当 a 为实数时成立。

4 相反与共轭

(1) 复数 $z=a+bi$ 的相反复数 $-z=-a-bi$ 。

(2) 复数 $z=a+bi$ 的共轭复数 $\bar{z}=a-bi$ ，它们关于实轴对称，其模相等其积为实数。有下列性质： $z+\bar{z}=2a$ ，

$$z-\bar{z}=2bi, \quad z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2=r^2,$$

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2, \quad \overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

特别地，若 $|z|=1$ ，则 $\bar{z}=\frac{1}{z}$ 。

5 有序与无序

(1) 实数有顺序性；

(2) 复数无顺序性。

6 两个复数相等的充要条件是它们的实部和虚部分别相等。

7 运算

(1) 在复数集中可施行加、减、乘、除（除数非0）、乘方、开方六种代数运算。

(2) 满足交换律，结合律，分配律。

(3) 运算法则：

① 复数的代数形式相加、减、乘可按多项式加、减、乘法法则进行，两个复数相除可先将分母实数化。

② 复数三角形式的运算公式是：

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)];$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)];$$

$$z^n = [r (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta);$$

(棣莫佛定理)

$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ 的 n 次方根是：

$$z_n = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) .

三、代数式的分类

$$\text{代数式} \begin{cases} \text{有理式} \begin{cases} \text{整式} \begin{cases} \text{单项式} \\ \text{多项式} \end{cases} \\ \text{分式} \end{cases} \\ \text{无理式(根式)} \end{cases}$$

四、代数式的恒等变形

1 有理式

(1) 乘法公式 (略)。

(2) 因式分解的方法：提公因式法；应用公式法；十字相乘法；分组分解法；变量代换法；补项拆项法等。

(3) 配方法。

(4) 分式的基本性质，约分与通分。

(5) 整式与分式的四则运算法则。

2 根式 (在算术根的条件下，以下法则成立)

(1) 基本性质： $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{mp}}$, ($a \geq 0, m, n, p \in \mathbb{N}, n > 1$)。

(2) 运算法则：

① 加减法：先把各个根式化成最简根式，再合并同类根式。

② 乘除法： $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ 。

③ 乘方开方： $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}$ 。

3. 指数

(1) 定义：

① 正整指数 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个}}, (n \in \mathbb{N})$;

② 零指数 $a^0 = 1, (a \neq 0)$;

③ 负指数 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$;

④ 分数指数 $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, (m, n \in \mathbb{N} \text{ 且 } m > 1,)$

(当 $a < 0, n$ 为奇数 m 为偶数时，无意义)；