GAOZHONG
SHUXUE
JIETI
CELUE

高中数学
解题策略

唐盛昌 康士凯 忻再义等著

上海教育出版社

高中数学
解题策略

GAOZHONG
SHUXUE
JIETI
CELUE

唐盛昌　康士凯　忻再义等著

高中数学解题策略

唐盛昌　康士凯　忻再义 等

上海教育出版社出版发行

（上海永福路 123 号）

（邮政编码：200031）

各地新华书店经销　上海中华印刷厂印刷

开本 850×1156　1/32　印张 7.25　插页 4　字数 186,000

1997 年 3 月第 1 版　1997 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—,3150 本

ISBN 7-5320-4856-X/G·4826　定价：（软精）10.50 元

编者的话

学习数学当然免不了要解题，问题是在解题过程中如何才能训练得法，事半功倍，有助于学生数学素养与能力的提高，真正体现数学教学由应试教学向素质教学的转轨，这就提出了数学解题策略的问题.

数学解题策略是国外数学教学界十分关注的问题，但在国内却接触较少. 本书从解题策略的角度出发，主要研究了以下三个方面的内容：一是数学解题时的思维过程；二是各类数学题的结构、作用与特点；三是如何针对数学题的情况与思维过程，找到恰当的解题策略. 这对于提高学生的数学素养与解题能力都会有很大帮助的.

本书的几位作者既有多年的教学经验，又在数学教学研究方面作过一定的探讨，故在行文之时，就比较注意既有较高的立意，又能切合教学实际；既有系统的分析，又能提供各种的解题策略；既有典型的范例，又配置了一定数量的精选习题，如此纵横交叉，保证了本书的内容有较广的覆盖面.

由于本书从数学思维过程着眼，从数学的通性通法入手，总结了数学解题的策略，因此既可供高中学生学习数学时使用，也可用作数学教师与其他数学爱好者的参考书.

参加本书编写的有唐盛昌、康士凯、忻再义、汪祖亨、陆建新、薛公望，尽管我们为保证本书的质量作了相当的努力，但肯定仍有不足之处，敬请广大读者指正。

唐盛昌

1996年4月15日

目　录

第一章　数学解题的思维过程

一题上手，凝神静思，许多人都有不知从何入手的经历，这种尴尬的事情倘若发生在考场，更会令人汗颜．为了帮助学生掌握数学解题的金钥匙，探求数学解题的思路和方法，本章将着重考察数学解题过程中的审题、探索、表述这三大环节，介绍有关解数学问题的基本知识和策略．

第一节　审　　题

解题应从何入手呢？

也许有人认为，这个问题提得没有意思，要想解题，只要不管三七二十一试着去解即可．事实上，有许多学生在解数学题，甚至是考试时就是这样做的，他们一拿到问题，马上就亟不可待地试着做起来．这时，他们的思维是盲目的，或者说，是无条理的，最终往往难以得到正确的答案．那么到底应该怎样入手解题呢？我们认为首先必须审清题意，这是探索解题思路的先决条件，一般可从以下四方面进行：

一、明确条件和结论

匆匆回答一个你尚未明白的问题是欠明智的，但是这种现象在解题时却经常发生着，要避免陷入这种劳而无功的困境，就要在解题时先明确条件与结论．条件是探求解题思路的依据，结论是要达到的最终目标，是推理的终点．明确条件和结论，对于找出正确的解题方法起着思维定向的作用．

审题时，明确条件与结论的具体做法是将已知条件一项一项

地列出来，把结论也一项一项地仔细列出来. 可能有人认为这还不简单！我们认为这件工作水平的高低体现了一个人的数学解题能力的强弱. 因为对于同样的数学材料，数学解题能力强的人能获得更多信息，能最大限度地沟通已知条件之间的联系，沟通条件与结论之间的联系，会注意到同一个条件可以有几种不同的表现方式，因此在一项一项地列出已知条件时，他会尽可能把问题中的条件写成易于进行运算和推理的形式；同时在一项一项地列出结论时，他也会注意选择结论最恰当的表现形式.

*例 1　已知 $\log_{18}9=a$, $18^b=5$, 求 $\log_{36}45$. [1]

分析：先考察审题时列出已知条件方面的工作：

题设中，$\log_{18}9=a$ 与 $18^b=5$ 是两个形式不同的已知条件，把条件"$18^b=5$"写成"$\log_{18}5=b$"便可以使它与条件"$\log_{18}9=a$"在形式上一致，于是就能达到易于运算、推导的目的.

结论是："求 $\log_{36}45$"，为了达到表达明确的要求，可把结论改写成"将 $\log_{36}45$ 用 a、b 表达".

于是问题实质是

条件：$\log_{18}9=a$, $\log_{18}5=b$.

结论：将 $\log_{36}45$ 用 a、b 表达.

解　由题设可知　$\log_{18}9=a$, $\log_{18}5=b$, 于是得

$$\log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{\log_{18}18+\log_{18}2}$$

$$=\frac{a+b}{1+(\log_{18}18-\log_{18}9)}=\frac{a+b}{2-a}.$$

说明：本题是指数、对数的综合运算题. 在这类涉及多种形式的式的综合运算题中，条件中的某种运算形式往往有其他的表达形式，把所给条件尽可能选择同一种运算形式来表达的审题策略，显然容易获得合理的解题思考途径.

例 2　已知二次函数的图象关于直线 $x+2=0$ 对称，且与直线 $y=2x+1$ 相切，又二次函数图象在 x 轴上截得的线段长为 $2\sqrt{2}$,

[1] 本书中带有"*"号的例题均是历届全国或上海高考试题.

求二次函数的解析式.

分析：条件"已知二次函数的图象关于直线$x+2=0$对称"可表达为"二次函数的对称轴为$x=-2$"，条件"二次函数图象在 x 轴上截得的线段长为 $2\sqrt{2}$"联系前一个条件可表达为"二次函数图象与 x 轴的两个交点为$(-2+\sqrt{2},0)$、$(-2-\sqrt{2},0)$". 于是容易想到可设所求二次函数解析式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 x_1、x_2 为二次函数图象与 x 轴两个交点的横坐标.

条件"二次函数图象与直线 $y=2x+1$ 相切"可表达为"方程 $a(x-x_1)(x-x_2)=2x+1$ 有重根"，由此可确定 a 的值，因此可将结论改写成"确定二次函数 $y=a(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})$的系数 a".

解 由题意可知，二次函数的对称轴为 $x=-2$，又因为它在 x 轴上截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，故与 x 轴的两个交点的横坐标为 $-2+\sqrt{2}$，$-2-\sqrt{2}$. 于是可设所求二次函数的解析式为

$$y=a(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2}).$$

由该二次函数图象与 $y=2x+1$ 相切，得

$$2x+1=a(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2}),$$

$$ax^2+(4a-2)x+2a-1=0,$$

$$\Delta=(4a-2)^2-4a(2a-1)=8a^2-12a+4=0,$$

解这个关于 a 的一元二次方程，得

$$a_1=1, \quad a_2=\frac{1}{2}.$$

∴ 二次函数的解析式为

$$y=x^2+4x+2 \quad 或 \quad y=\frac{1}{2}x^2+2x+1.$$

说明：求二次函数的解析式是一类最常见的问题，其等价的结论形式通常有：

(1) 求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的各项系数 a、b、c；

(2) 求二次函数 $y=a(x-k)^2+h$ 的字母 k、h、a；

(3) 求二次函数 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$的字母 x_1、x_2、a.

本题即是通过已知条件选择了形式(3)来解决的.

例 8 已知 k 为实数,复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$.

(1) 当 k 和 θ 分别为何值时,复数 $z^3+k\bar{z}^3$ 是纯虚数;

(2) 当 θ 变化时,求 $|z^3+k\bar{z}^3|$ 的最大值和最小值.

分析: 如果将本题的结论 (1) 表达为"当 k 和 θ 分别为何值时,复数 $(\cos\theta+i\sin\theta)^3+k[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^3$ 的实部为零,虚部不为零",将结论(2)表达为"求出 $(|z^3+k\bar{z}^3|)^2$ 的最大值和最小值"或表达为"求复数 $(\cos\theta+i\sin\theta)^3+k[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^3$ 的模的平方的最大值和最小值",那么解题思路就非常明确了.

解 (1)
$$\begin{aligned}z^3+k\bar{z}^3&=(\cos\theta+i\sin\theta)^3\\&\quad+k[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^3\\&=\cos 3\theta+i\sin 3\theta+k(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)\\&=(1+k)\cos 3\theta+i(1-k)\sin 3\theta.\end{aligned}$$

要使复数 $z^3+k\bar{z}^3$ 是纯虚数,k、θ 必须满足

$$\begin{cases}(1+k)\cos 3\theta=0,\\(1-k)\sin 3\theta\neq 0,\end{cases}$$

由此解得 $k=-1$ 或 $\theta=\frac{2}{3}n\pi\pm\frac{\pi}{6}$,

且 $k\neq 1,\theta\neq\frac{n\pi}{3}\quad(n\in Z)$.

$\therefore$ 当 $k=-1$ 且 $\theta\neq\frac{n\pi}{3}$, 或 $k\neq 1$ 且 $\theta=\frac{2}{3}n\pi\pm\frac{\pi}{6}$ $(n\in Z)$时,$z^3+k\bar{z}^3$ 为纯虚数.

(2)
$$\begin{aligned}|z^3+k\bar{z}^3|^2&=|(1+k)\cos 3\theta+i(1-k)\sin 3\theta|^2\\&=(1+k)^2\cos^2 3\theta+(1-k)^2\sin^2 3\theta\\&=(1+k^2)+2k\cos 6\theta.\end{aligned}$$

$\therefore$ 若 $k>0$, 则 $|z^3+k\bar{z}^3|$ 的最大值为 $1+k$, 最小值为 $|1-k|$;

若 $k=0$, 则 $|z^3+k\bar{z}^3|$ 的最大值和最小值都是 1;

若 $k<0$, 则 $|z^3+k\bar{z}^3|$ 的最大值为 $1-k$, 最小值为 $|1+k|$.

二、符号语言、图象语言和日常用语间的转换

符号语言、图象语言和日常用语是数学解题中经常运用的三种语言，它们各有自己的特点．符号语言比较简洁、严谨，它有利于正确表达和进行推理；图象语言易引起清晰的视觉形象，它能直观地表示概念、定理的本质以及相互之间的关系，在抽象的数学思维面前它起着具体化和帮助理解的作用；日常用语比较自然、生动，它能将问题所研究的对象的含义更加明白地叙述出来，有助于启迪思路．

如果数学问题的叙述以抽象的字母和符号语言出现，解题能力强的人在审题时往往会先画出草图或把问题表述为日常用语．如果问题是以日常用语形式表达的，尤其是应用问题，为了便于计算和进行推理，则往往需要建立数学模型和引进字母变量．至于一个几何问题，离开符号语言更是寸步难行．这些都说明审题时，各种语言间的相互转换是必要的，它可以达到简缩思维过程的目的，克服由于概念、定理的内在意义与其字母符号表达之间的脱节现象，摆脱由此而产生的思维受阻的困境．因此各种语言的熟练转换是思维敏捷的表现．

例 1 已知 a、x、y、b 成等差数列，c^3、x、y、d^3 成等比数列，求证：$a+b=cd(c+d)$．

分析：条件"a、x、y、b 成等差数列"是用日常用语表达的，为了便于推理，将它改写为符号语言"$a+b=x+y$"．条件"c^3、x、y、d^3 成等比数列"也可改写为符号语言"公比为$\sqrt[3]{\dfrac{d^3}{c^3}}=\dfrac{d}{c}$，$x=c^3\cdot\dfrac{d}{c}=c^2d$，$y=c^3\cdot\left(\dfrac{d}{c}\right)^2=cd^2$"．这样审题不仅为推理的顺利进行铺平道路，事实上也为结论中推导 a、b 与 c、d 之间的关系（即消去 x、y）起着导向作用．

证明 ∵ a、x、y、b 成等差数列，

∴ $a+b=x+y$．

$\because$ c^3、x、y、d^3 成等比数列，公比为$\sqrt[3]{\dfrac{d^3}{c^3}}=\dfrac{d}{c}$，

$\therefore$ $x=c^3\cdot\dfrac{d}{c}=c^2d$，$y=c^3\cdot\left(\dfrac{d}{c}\right)^2=cd^2$，

$x+y=c^2d+cd^2=cd(c+d)$.

$\therefore$ $a+b=cd(c+d)$.

说明：数学题中经常出现“已知数列$\{a_n\}$成等差数列”或“求证数列$\{a_n\}$成等差数列”等语句，解这类数学题时先要将这些语句转换为等价的便于进行推理运算的符号语言，如“$a_{n+1}-a_n=c$，其中 c 是常数，$n\in N$”等.

诸如此类的语句转换要求是不胜枚举的. 如“证明函数 $y=f(x)$在区间D内单调增加”就应转换为“对于任意的 x_1、$x_2\in D$，设$x_1>x_2$，则$f(x_1)>f(x_2)$”，“证明函数 $y=f(x)$在区间D内是奇函数”就应转换为“对于任意的 $x\in D$，满足$f(-x)=-f(x)$”，“证明直线 $Ax+By+C=0$ 与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 相切”就应转换为“证明$\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=R(R>0)$”等.

例 2 求函数 $y=\dfrac{1+\sin t}{2+\cos t}$的最值.

分析：中学阶段求函数的最值的基本方法是：用配方法求二次函数的最值；运用不等式求最值；用一元二次方程根的判别式法或三角函数的值域求最值. 这些方法用于本题均较麻烦. 审题时，若借助图象观察就会发现，可将 $y=\dfrac{\sin t-(-1)}{\cos t-(-2)}$看成在平面直角坐标系中连接点 $M(\cos t,\ \sin t)$ 和 $P(-2,\ -1)$ 的直线的斜率（图 1-1），将问题运用图象语言表述为“已知 $P(-2,\ -1)$，$M(\cos t,\sin t)$为单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的动点，求割线 MP 的斜率的最值.”

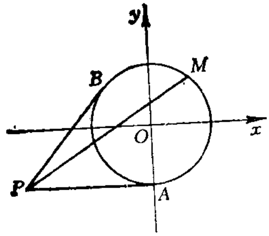

图 1-1

解 如图 1-1，求$y=\dfrac{\sin t-(-1)}{\cos t-(-2)}$的

最值，可看作求过 $M(\cos t, \sin t)$，$P(-2, -1)$的割线 MP 斜率的最值.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAO$ 中，令$\angle APB=2\alpha$，则

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{AO}{PA}\right|=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{4}{3}.$$

$\because$ PA、PB 的斜率分别为 0 和$\frac{4}{3}$，

$$\therefore \quad y_{\min}=0, \qquad y_{\max}=\frac{4}{3}.$$

例 3 设 $p\neq 0$，实系数一元二次方程 $z^2-2pz+q=0$ 有两个虚根 z_1、z_2，再设 z_1、z_2 在复平面内对应的点分别是 Z_1、Z_2，求以 Z_1、Z_2 为焦点且经过原点的椭圆的长轴的长.

分析：题中给出的条件有“实系数一元二次方程 $z^2-2pz+q=0$ 有两个虚根 z_1、z_2”，“复平面上的椭圆以 Z_1、Z_2 为焦点”，“椭圆经过原点”. 为了确定椭圆的长轴，纯粹用符号语言建立椭圆方程(不借助图象语言)，势必增加运算量和难度(事实上也不需求出椭圆方程). 如果辅以图象语言和日常用语，即将条件叙述为“实系数一元二次方程 $z^2-2pz+q=0$ 的两个共轭虚根，在复平面上对应的两点Z_1、Z_2关于实轴对称 (图 1-2). 一个椭圆以 Z_1、Z_2 为焦点，则椭圆的短轴在实轴上；原点在椭圆上，则原点为椭圆的一个顶点”，根据以上条件可以较自然地联想到椭圆的长轴的长是 $|OZ_1|+|OZ_2|$，即实系数一元二次方程 $z^2-2pz+q=0$ 的两个虚根的模之和.

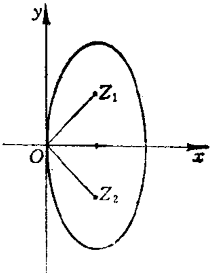

图 1-2

解 如图 1-2，因实系数一元二次方程 $z^2-2pz+q=0$ 有两个共轭虚根($p\neq 0$)，故$(-2p)^2-4q<0$，即 $q>p^2>0$.

解方程 $z^2-2pz+q=0$，得

$z_{1,2}=p\pm\sqrt{q-p^2}\,i$.

以 Z_1、Z_2 为焦点且过原点的椭圆的长轴的长

$$2a=|OZ_1|+|OZ_2|=2\sqrt{p^2+(\sqrt{q-p^2})^2}=2\sqrt{q}.$$

例 4 若抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与连结 $M(0,1)$、$N(2,3)$的线段(包括 M、N 两点)有两个相异的交点，求 a 的取值范围.

分析：为了便于计算，将“抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与连结 $M(0,1)$、$N(2,3)$的线段(包括 M、N 两点)有两个相异的交点”用符号语言表述为“$\begin{cases}y=x^2+ax+2,\\ y=x+1\end{cases}$ 当 $x\in[0,2]$时有两解”，即“$x^2+ax+2=x+1$ 当 $x\in[0,2]$时有两个相异的实根”.

对于一元二次方程在区间$[a,b]$上的根的讨论，一般需转换成图象语言，借助二次函数图象的直观形象进行思考.

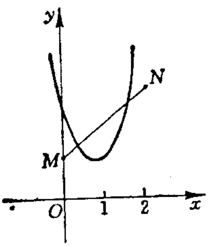

图 1-3

解 如图 1-3，过$M(0,1)$、$N(2,3)$的直线方程为$y=x+1$. 要使抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与线段 MN 有两个相异交点，必须且只须方程

$$x^2+ax+2=x+1,$$

即 $$x^2+(a-1)x+1=0$$

当 $x\in[0,2]$ 时有两个相异的实根.

令$f(x)=x^2+(a-1)x+1$，当$f(x)$满足下列条件

$$\begin{cases}0<-\dfrac{a-1}{2}<2,\\ \Delta=(a-1)^2-4>0,\\ f(0)=1\geqslant 0,\\ f(2)=2a+3\geqslant 0\end{cases}$$

时，一元二次方程 $x^2+(a-1)x+1=0$ 在$[0,2]$ 上有两个相异的实根.

解上面的不等式组，得 a 的取值范围为$-\dfrac{3}{2}\leqslant a<-1$.

三、关键字句的斟酌

为了考核学生的观察能力、分析能力，检查学生对概念中各项条件的理解，了解学生对基本技能和逻辑推理的掌握程度，在数学题编拟时，往往要变换概念的表现形式，精简命题从条件到结论的中间环节，肢解命题的各项条件之间的联系，隐去问题涉及的数学思想及背景. 因此解答数学题时，就需要透过字句发掘这些本质与规律，对关键字句进行仔细推敲.

对关键字句进行推敲，首先要明确哪些是关键字句，我们认为它们主要包括以下五个方面：

(1) 概念中容易疏忽的限定词，如椭圆的定义：平面内与两个定点 F_1、F_2 的距离之和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫椭圆，其中“大于 $|F_1F_2|$”便是一种限定词.

(2) 问题中比较陌生的、抽象的词语、记号，这类问题往往有数学背景，课本中无现成的概念或记号，理解这些陌生、抽象的词语、记号便成为解题关键.

(3) 问题中易疏忽的特殊位置和可能情况.

(4) 相近的基本概念之间的细微差异.

(5) 定理成立的每一项前提或条件.

*例 1　设 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上以 2 为周期的函数，对 $k\in Z$，用 I_k 表示区间 $(2k-1,\ 2k+1]$，已知当 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^2$.

(i) 求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析表达式；

(ii) 对自然数 k，求集合 $M_k=\{a \mid$ 使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根$\}$.

分析：这是一道使许多考生在考场上感到困惑的问题. 究其原因主要是对 I_k、M_k 这样的符号比较生疏，对它们的意义缺乏了解. 对于关键符号，如果感到抽象和陌生，那么有效的做法是将它的含义具体化. 例如“I_k 表示区间 $(2k-1,\ 2k+1]$”，即是 $I_1=(1,3]$，$I_2=(3,5]$，……$I_k=(2k-1,\ 2k+1]$. 如果对于“求 $f(x)$

在 I_k 上的解析式"有困难，那么根据题设"$f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$上以 2 为周期的函数"，可从 I_0、I_1、I_2 等区间的考察去探求 $f(x)$的解析式：

在 $I_0=(-1,1]$上，$f(x)=x^2$；

在 $I_1=(1,3]$上，由周期性，相当于将 $y=x^2$ 的图象向右平移 2 个单位，得 $f(x)=(x-2)^2$；

在 $I_2=(3,5]$上，同理，相当于将 $y=x^2$ 的图象向右平移 4 个单位，得 $f(x)=(x-4)^2$；

由以上具体化的推导，即可获得在 $I_k=(2k-1, 2k+1]$上，

$$f(x)=(x-2k)^2.$$

求 $M_k=\{a \mid$ 使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根$\}$，同样可先将方程 $f(x)=ax$ 具体化为$(x-2k)^2=ax$，于是问题就转化为使该方程在 $(2k-1, 2k+1]$上有两个不相等的实根，求 a 的取值范围.

事实上，令 $y=ax$，$y=(x-2k)^2$，要求这两个函数图象在区间 $(2k-1, 2k+1]$上有两个不同的交点，便可确定一次函数 $y=ax$ 的斜率 a 的取值范围.

如图 1-4，当 $a>0$，且 $a\leqslant K$（K 是过原点 O 和点 $A(2k+1, 1)$ 的直线的斜率）时，函数 $y=ax$，$y=(x-2k)^2$ 的图象在区间 $(2k-1, 2k+1]$上有两个不同的交点.

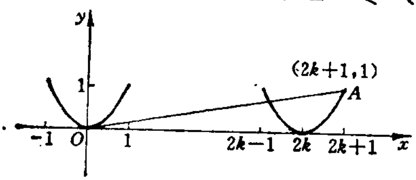

图 1-4

$\because$ OA 的方程为

$$y=\frac{1}{2k+1}x, \qquad \therefore \quad K=\frac{1}{2k+1}.$$

$$\therefore \quad 0<a\leqslant\frac{1}{2k+1},$$

即所求集合

$$M_k=\left\{a \,\middle|\, 0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}\right\}.$$

解　略.

说明：斟酌关键字句时，如果涉及的词语、符号比较抽象，如本题，那么将它们具体化便是一种有效的策略. 较常见的做法是从特殊值入手，或用直观图象来加以表示.

例 2　有 10 本不同的新书，一位读者去借，有几种不同的借法？

分析：本题往往会错解为 C_{10}^1，即 10 本不同的新书，每次限借一本，求所有不同的借法种数. 事实上，本题不存在每次借一本这个限定，故可以借 1 本，2 本，……10 本.

正确的解法为　$C_{10}^1+C_{10}^2+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}-1=1023$.

解　略.

说明：在解答数学问题，尤其是排列、组合问题时，要审清问题中的条件有哪些限制，这是审题中对关键字句进行斟酌的任务之一.

例 3　已知方程 $2x^3+x+m=0$ 有一个根是 i，求 m 的值，并解此方程.

分析：对于方程 $2x^3+x+m=0$ 有一个根为 i，不少学生或许会想到虚根共轭成对出现的定理，于是得出 $-i$ 也是方程的根. 然而运用虚根共轭成对出现的定理时，必须想到定理的限定条件，即方程必须是实系数一元 n 次方程. 而题设中系数 m 没有限定是实数，故此定理不能运用.

解　$\because$ i 是方程 $2x^3+x+m=0$ 的根，故以 i 代入方程，得 $m=i$.

$\because$ $2x^3+x+i=(x-i)(2x^2+2ix-1)=0$,

$\therefore$ 方程的根为　$x_1=i$，$x_2=\dfrac{1-i}{2}$，$x_3=-\dfrac{1+i}{2}$.

说明：在运用定理、法则时，必须先考虑这些定理、法则成立的条件是否满足，如果不满足，就需另辟蹊径. 这就是说，审题时一定不可疏忽对这项要求的审核，这是避免解题错误的必要步骤. 除了实系数方程与复系数方程中有关根的定理有一定区别外，许多

在实数范围内成立的结论，到了复数范围内就不一定成立．例如，实数的绝对值与复数的模，符号相似，但性质就有许多差异．在解题时，均要仔细推敲．而做好这一点，在平时就要比较完整地掌握好基础知识和有关的基本技能．

例 4 已知函数 $f(x)(x\in R)$ 是奇函数又单调递减．当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，满足 $f(\cos 2\theta-4t)+f(4t\sin\theta-3)\geqslant 0$．求 t 的取值范围 M．

分析：对于抽象的 f 符号的理解，是解题的关键．求解本题的突破口是如何运用条件"$f(\cos 2\theta-4t)+f(4t\sin\theta-3)\geqslant 0$"来确定 t 的取值范围．如果将该条件变为"$f(\cos 2\theta-4t)\geqslant -f(4t\cdot\sin\theta-3)$"，那么考虑到 f 是奇函数又单调递减，可得

$$f(\cos 2\theta-4t)\geqslant f(3-4t\sin\theta),$$

即

$$\cos 2\theta-4t\leqslant 3-4t\sin\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

于是解上述不等式便可确定 t 的取值范围 M．

解 由题设 $f(\cos 2\theta-4t)+f(4t\sin\theta-3)\geqslant 0$，得

$$f(\cos 2\theta-4t)\geqslant -f(4t\sin\theta-3).$$

$\because$ $f(x)$ 是奇函数，

$\therefore$ $f(\cos 2\theta-4t)\geqslant f(3-4t\sin\theta)$．

又 $\because$ $f(x)$ 是单调递减函数，

$\therefore$ $\cos 2\theta-4t\leqslant 3-4t\sin\theta$，

整理，得

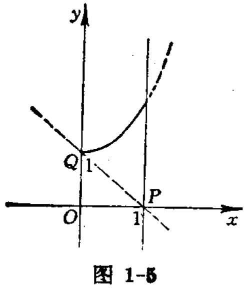

图 1-5

$$2t(\sin\theta-1)\leqslant\sin^2\theta+1. \qquad ①$$

令 $x=\sin\theta$，$x\in[0,1]$，不等式①可转化为

$$2t(x-1)\leqslant x^2+1.$$

如图 1-5，考察函数图象 $y=x^2+1$，$y=2t(x-1)$，$x\in[0,1]$ 可知，当 $y=x^2+1$ 的图象在 $y=2t(x-1)$ 的图象上方时，上