三导丛书

高等代数

（北大·第三版）

导教·导学·导考

DAOJIAO DAOXUE DAOKAO

徐仲 陆全 张凯院
吕全义 陈芳 袁志杰 编

- 内容提要
- 知识网络图
- 重点、难点解读
- 典型例题解析
- 课后习题全解
- 学习效果检测题及答案

西北工业大学出版社

三导丛书

高 等 代 数

（北大·第三版）

导教·导学·导考

徐 仲 陆 全 张凯院 吕全义 陈 芳 袁志杰 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书通过简明的理论介绍与方法总结，以及对大量有代表性的典型例题进行分析、求解和评注，揭示了高等代数的解题方法与技巧。另外，书中给出了北大《高等代数》（第三版）教材中各章习题及补充题的解答；书末附录中提供了四套（四个学期）考试真题及解答。编写本书的目的在于帮助读者把握教学、学习和考试要求，巩固和加深对基本概念的理解，增强运算能力，提高分析问题、解决问题和应试能力。

本书可作为大学生学习高等代数课程的指导书，可供报考硕士研究生的读者以及有关教师及科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数（北大·第三版）导教·导学·导考/徐仲等编．—西安：西北工业大学出版社，2004.3

ISBN 7-5612-1741-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．徐…　Ⅲ．高等代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 008299 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　邮编：710072
电　　话：029-88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西向阳印务有限公司
开　　本：850 mm×1168 mm　1/32
印　　张：19.375
字　　数：704 千字
版　　次：2004 年 3 月第 1 版　2004 年 11 月第 2 次印刷
定　　价：24.00 元

前　言

高等代数是数学专业的一门主干基础课程，它对学生的抽象思维能力、逻辑推理能力的培养，以及后继课程的学习起着非常重要的作用。但是，学生在学习这门课程时普遍感到抽象，抓不住概念的实质，解题更感困难，总结不出一般的思考方法。为帮助学生消化课堂讲授的内容，加深对基础概念、基本理论的理解，提高解题的技能与技巧，我们根据长期从事高等代数教学的经验，编写了本书。

本书依照北京大学数学系几何与代数教研室编《高等代数》（第三版）的自然章编排，每章由以下六部分内容组成。

一、内容提要——将相应章节的内容进行了简明扼要的叙述、归纳和总结，部分内容列表直观地进行了说明，特别是给出了一些主要计算方法的描述，以加深读者对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

二、知识网络图——以框图的方式概括了本章的知识结构，体系完整，一目了然。

三、重点、难点解读——对本章的知识重点与难点进行了总结归纳。

四、典型例题解析——精选了高等代数中具有代表性的部分典型例题，通过对典型例题的解题分析，归纳出高等代数中一些问题的解决方法和技巧，使读者可以举一反三、触类旁通。对于那些需要了解更多典型题的读者，可参阅作者编写的《理、工科线性代数常见题型解析及模拟题》（西北工业大学出版社，2002）一书，其中按专题对大量典型题进行了分类求解，并给出了全部习题的简要解答或分析过程。

五、课后习题全解——给出了《高等代数》（北大·第三版）各章习题及补充题的全部解答。由于高等代数中解题方法的多样性，对于具有多种解法或答案的习题，一般只给出一种解法或答案。

六、学习效果检测题及答案——根据教学内容精选了适量的检测题，并附有答案和部分提示。读者可以通过这些测试题进一步掌握解题要领，巩固和加深对基本概念的理解，增强解题的能力，检验自己对所学知识的掌握程度。

为了帮助读者了解并适应课程考试，书末附录中提供了四套（四个学期）考试真题及解答。

本书由徐仲、陆全主编，参加编写的还有张凯院、吕全义、陈芳、袁志杰等。

由于作者水平所限，对于书中的不妥或疏漏之处，敬请读者指正。

编　者

2003年12月

目　　录

第1章 多 项 式

多项式理论是高等代数的重要内容之一.虽然它在整个高等代数课程中是一个相对独立而自成体系的部分,但却为高等代数所讲述的基本内容提供了理论依据.多项式理论中的一些重要定理和方法,在进一步学习数学理论和解决实际问题时常要用到.在中学阶段,对多项式的讨论主要着重于多项式的运算,很少涉及多项式的其他理论.因此,在学习本章时,要正确地掌握概念,学会严谨地推导和计算.

一、内 容 提 要

1. 数域

(1) 设 P 是至少含有两个数(或包含 0 与 1)的数集,如果 P 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍是 P 中的数,则称 P 为一个**数域**.

(2) **定理** 任何数域都包含有理数域 $\mathbf{Q}$.在有理数域 $\mathbf{Q}$ 与实数域 $\mathbf{R}$ 之间存在无穷多个数域;在实数域 $\mathbf{R}$ 与复数域 $\mathbf{C}$ 之间不存在其他的数域.

2. 一元多项式的概念和运算

(1) 形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

称为数域 P 上文字 x 的**一元多项式**,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in P$,n 是非负整数.当 $a_n\neq 0$ 时,称多项式 $f(x)$ 的**次数**为 n,记为 $\partial(f(x))=n$(或 $\deg(f(x))=n$),并称 a_nx^n 为 $f(x)$ 的**首项**,a_n 为 $f(x)$ 的**首项系数**.a_ix^i 称为 $f(x)$ 的 **i 次项**,a_i 称为 $f(x)$ 的 **i 次项系数**.当 $a_n=\cdots=a_1=0,a_0\neq 0$ 时,称多项式 $f(x)$ 为**零次多项式**,即 $\partial(f(x))=0$;当 $a_n=\cdots=a_1=a_0=0$ 时,称 $f(x)$ 为**零多项式**,零多项式是惟一不定义次数的多项式.

(2) 多项式可以进行加、减、乘运算,并有与整数相类似的性质.

多项式的次数有下列性质(设多项式 $f(x)\neq 0,g(x)\neq 0$):

1) 当 $f(x)\pm g(x)\neq 0$ 时

$$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant \max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$$

2) $\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$

3) 所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体记为 $P[x]$,称为数域 P 上的一元多项式环;数域 P 上一切次数小于 n 的多项式,再添上零多项式的全体,记为 $P[x]_n$.

3. 多项式的带余除法及整除性

(1) **定理**(带余除法) 设 $f(x),g(x)\in P[x],g(x)\neq 0$,则存在惟一的多项式 $q(x),r(x)\in P[x]$,使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$. 称上式中 $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**商**,$r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**余式**.

(2) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,如果存在多项式 $h(x)\in P[x]$,使

$$f(x)=h(x)g(x)$$

则称 $g(x)$ **整除** $f(x)$(或 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除),记为 $g(x)\mid f(x)$. 此时称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的**因式**,$f(x)$ 为 $g(x)$ 的**倍式**,商 $h(x)$ 也记为 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$,即 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. 用 $g(x)\nmid f(x)$ 表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$,就是不存在 $h(x)$,使 $f(x)=h(x)g(x)$ 成立.

注 $P[x]$ 中的多项式不能作除法,而整除性不是多项式的运算,它是 $P[x]$ 中元素间的一种关系,即任给 $P[x]$ 中两个多项式 $f(x),g(x)$,可以判断 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 或 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$.

(3) 如果 $g(x)\neq 0$,则 $g(x)\mid f(x)$ 的充分必要条件是用 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式 $r(x)=0$.

(4) 零多项式只能整除零多项式;任一多项式一定能整除它自身;任一多项式都可以整除零多项式;零次多项式(非零常数)能整除任一多项式.

(5) 多项式 $f(x)$ 与 $cf(x)$ $(c\neq 0)$ 有相同的因式和倍式.

(6) 两个多项式之间的整除关系不因系数域的扩大而改变.

(7) 整除有以下性质:

1) 如果 $g(x)\mid f(x)$,则 $kg(x)\mid lf(x)$,其中 k 为非零常数,l 为常数.

2）如果 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid h(x)$，则 $f(x) \mid h(x)$.

3）如果 $f(x) \mid g_i(x)$，又 $u_i(x)$ 为任意多项式，$i = 1,2,\cdots,m$，则

$$f(x) \mid [u_1(x)g_1(x) + u_2(x)g_2(x) + \cdots + u_m(x)g_m(x)]$$

4）如果 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid f(x)$，则 $f(x) = cg(x)$，其中 c 为非零常数.

（8）带余除法的计算格式：

用多项式 $g(x) \neq 0$ 除多项式 $f(x)$ 所得的商 $q(x)$ 和余式 $r(x)$ 可以通过如下两种格式进行：

1）普通除法或长除法

$$\begin{array}{r l}
 & \quad\quad 商\ q(x) \\ \cline{2-2}
除式\ g(x) & \big)\ 被除式\ f(x) \\
 & \quad -)\ q(x)g(x) \\ \cline{2-2}
 & \quad 余式\quad r(x)
\end{array}$$

2）竖式除法

$$\begin{array}{r|l|l}
除式\ g(x) & 被除式\ f(x) & 商\ q(x) \\
 & -)\ q(x)g(x) & \\ \cline{2-2}
 & 余式\quad r(x) &
\end{array}
\quad 或 \quad
\begin{array}{r|l|l}
商\ q(x) & 被除式\ f(x) & 除式\ g(x) \\
 & -)\ q(x)g(x) & \\ \cline{2-2}
 & 余式\quad r(x) &
\end{array}$$

注　1. 在利用以上两种格式进行计算时，要逐步利用除式 $g(x)$ 确定商 $q(x)$ 中由高次到低次的项来消去被除式的首项，以得到次数低于 $g(x)$ 的多项式或零多项式 $r(x)$.

2. 当利用辗转相除法求两个多项式的最大公因式时，用竖式除法较为方便.

（9）综合除法：

设以 $g(x) = x - a$ 除 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 时，所得的商 $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ 及余式 $r(x) = c_0$，则比较 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 两端同次幂的系数得

$$b_{n-1} = a_n,\ b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1},\cdots,b_0 = a_1 + ab_1,\ c_0 = a_0 + ab_0$$

这种计算可以排成以下格式进行：

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & & +)ab_{n-1} & +)ab_{n-2} & \cdots & +)ab_1 & +)ab_0 \\ \hline
 & b_{n-1}(=a_n) & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & c_0
\end{array}$$

用这种方法求商和余式（的系数）称为**综合除法**.

注 1. 用综合除法进行计算时，被除式中所缺的项必须补上0，否则计算就错了.

2. 当除式为 $ax+b \quad (a \neq 0)$ 时，因为

$$f(x) = (ax+b)q(x) + r(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right)[aq(x)] + r(x)$$

所以以 $ax+b$ 除 $f(x)$ 可以先以 $x - \left(-\frac{b}{a}\right)$ 除 $f(x)$，得到商的 a 倍和余式，再以 a 除商的 a 倍得到商.

3. 当除式为一次式时，用综合除法比用带余除法来得方便. 特别是有些问题需要多次以一次多项式作为除式的运算，综合除法更显示出它的作用.

4. 多项式的最大公因式

(1) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，如果 $d(x) \in P[x]$ 满足 $d(x) \mid f(x)$，$d(x) \mid g(x)$，则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**公因式**；又如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式都能整除 $d(x)$，则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**最大公因式**.

(2) 最大公因式有以下性质：

1) $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一定有最大公因式. 两个零多项式的最大公因式是零多项式，它是惟一确定的. 两个不全为零的多项式的最大公因式总是非零多项式，它们之间只有常数因子的差别；这时，最高次项系数为1的最大公因式是惟一确定的. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为1的最大公因式记为 $(f(x), g(x))$.

2) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，$g(x) \neq 0$，如果有

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式一定是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的最大公因式，而 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的最大公因式也一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 特别地，有

$$(f(x),\ g(x)) = (g(x),\ r(x))$$

(这也是用辗转相除法求最大公因式的根据.)

3) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，如果 $d(x) \in P[x]$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，则必有 $u(x), v(x) \in P[x]$，使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

注 如果 $f(x), g(x), d(x) \in P[x]$，且有等式 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ 成立，但 $d(x)$ 不一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 如取 $f(x) = x, g(x) = x+1, u(x) = x+2, v(x) = x-1, d(x) = 2x^2+2x-1$，则有 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$，但 $d(x)$ 显然不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

4) 最大公因式不因数域 P 的扩大而改变.

(3) 最大公因式可以用辗转相除法求得:

如果 $f(x),g(x)\in P[x],g(x)\neq 0$,且有 $q_i(x),r_i(x)\in P[x]$,使

$$
\begin{aligned}
f(x) &= q_1(x)g(x)+r_1(x)\\
g(x) &= q_2(x)r_1(x)+r_2(x)\\
r_1(x) &= q_3(x)r_2(x)+r_3(x)\\
&\cdots\cdots\\
r_{s-2}(x) &= q_s(x)r_{s-1}(x)+r_s(x)\\
r_{s-1}(x) &= q_{s+1}(x)r_s(x)+0
\end{aligned}
$$

其中 $\partial(r_i(x))\geqslant 0$,则 $r_s(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

5. 互素多项式

(1) 如果 $f(x),g(x)\in P[x]$ 的最大公因式为非零常数,或 $(f(x),\ g(x))=1$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **互素或互质**.

(2) 互素的多项式具有以下性质:

1) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,$f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充分必要条件是,存在 $u(x),v(x)\in P[x]$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

2) 如果 $(f(x),\ g(x))=1$ 且 $f(x)\mid[g(x)h(x)]$,则 $f(x)\mid h(x)$.

3) 如果 $(f(x),\ g(x))=1$ 且 $f(x)\mid h(x),g(x)\mid h(x)$,则 $[f(x)g(x)]\mid h(x)$.

4) 如果 $(f(x),\ g(x))=1,(f(x),\ h(x))=1$,则 $(f(x),\ g(x)h(x))=1$.

6. 不可约多项式

(1) 如果数域 P 上次数大于零的多项式 $p(x)$ 不能表示成数域 P 上两个次数比它低的多项式的乘积,则称 $p(x)$ 是数域 P 上的**不可约多项式**.

注　1. 零多项式与零次多项式既不能说是可约的,也不能说是不可约的.

2. 多项式的可约性与多项式所在的数域密切相关,如 x^2-2 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约,而在实数域 $\mathbf{R}$ 上可约,即 $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$;又如 x^2+2 在实数域 $\mathbf{R}$ 上不可约,而在复数域 $\mathbf{C}$ 上可约,即 $x^2+2=(x+\sqrt{2}\mathrm{i})(x-\sqrt{2}\mathrm{i})$.一次多项式总是不可约的.

3. 互素多项式指的是 $P[x]$ 中两个多项式之间的一种关系,而不可约多项式是某个多

项式本身的一种特性，这是完全不同的两个概念. 但在讨论问题时，互素多项式与不可约多项式的性质又是互相利用的，要学会灵活运用.

(2) 不可约多项式有下列性质：

1) 如果 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，则 $cp(x)$ 也是 P 上的不可约多项式，其中 c 是 P 中的非零数.

2) 设 $p(x)$ 是数域 P 上的一个不可约多项式，则对 P 上任一多项式 $f(x)$，必有 $(p(x), f(x))=1$ 或者 $p(x) \mid f(x)$.

3) 设 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，$f(x)$，$g(x)$ 是 P 上的任意两个多项式. 如果 $p(x) \mid f(x) \cdot g(x)$，则必有 $p(x) \mid f(x)$ 或者 $p(x) \mid g(x)$.

4) 如果不可约多项式 $p(x)$ 整除 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$，其中 $s \geqslant 2$，则 $p(x)$ 至少可以整除这些多项式中的一个.

7. 因式分解惟一性定理

(1) 数域 P 上任一次数大于零的多项式 $f(x)$ 都可以分解成数域 P 上的一些不可约多项式的乘积. 如果

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

其中 $p_i(x)$ 与 $q_j(x)$ $(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,t)$ 都是 P 上的不可约多项式，则 $s=t$，并且适当调换 $q_i(x)$ 的次序后可使

$$q_i(x)=c_ip_i(x) \qquad (i=1,2,\cdots,s)$$

这里 c_i 是 P 中的不为零的数，即如果不计零次因式的差别，多项式 $f(x)$ 分解成不可约因式乘积的分解式是惟一的.

(2) 数域 P 上任一次数大于零的多项式 $f(x)$ 都有惟一的**标准分解式**

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

其中 a 为 $f(x)$ 的首项系数，$p_1(x),\cdots,p_s(x)$ 是 P 上首项系数为1的不可约多项式且两两互异，而 $r_1, r_2,\cdots,r_s$ 都是正整数.

(3) 如果已知多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的标准分解式，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式就是那些同时在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的标准分解式中出现的不可约多项式方幂的乘积，所带的方幂的指数等于它在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中所带的方幂指数中较小的一个.

8. 重因式

(1) 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \in P[x]$，其中 x 是文字，称

多项式

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$$

为 $f(x)$ 的**微商**(或**导数**). 当 $k>1$ 时,规定 $f^{(k)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 $k-1$ 阶微商 $f^{(k-1)}(x)$ 的微商,即 $f^{(k)}(x)=(f^{(k-1)}(x))'$. 多项式的微商与数学分析中的微商有相同的运算性质.

(2) 设 $f(x)\in P[x]$, $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式, k 为非负整数. 如果 $p^k(x)\mid f(x)$ 且 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$,则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 **k 重因式**. 当 $k=1$ 时,称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的**单因式**;当 $k\geqslant 2$ 时,称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的**重因式**.

注　由于重因式一定是不可约因式,所以 $f(x)$ 的重因式也和 $f(x)$ 所在的数域有关.

(3) 关于重因式有下列结论:

1) 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geqslant 1)$ 重因式,则它是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式. 特别地, $f(x)$ 的单因式不是 $f'(x)$ 的因式.

2) 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geqslant 1)$ 重因式,则它是 $f(x)$, $f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的因式,但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

3) 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充分必要条件是 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式,即 $p(x)\mid(f(x),\ f'(x))$.

注　由此可见 $f(x)$ 的重因式可以在 $(f(x),\ f'(x))$ 的因式中去找.

4) 多项式 $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素,即 $(f(x),\ f'(x))=1$.

5) 设多项式 $f(x)$ 的次数 $\partial(f(x))\geqslant 1$,则多项式 $\dfrac{f(x)}{(f(x),\ f'(x))}$ 是一个没有重因式的多项式,但它与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式. 即设 $f(x)$ 有标准分解式

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

则

$$\frac{f(x)}{(f(x),\ f'(x))}=ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

注　这是去掉多项式的因式重数的一个有效方法.

9. 多项式函数与多项式的根

(1) 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in P[x]$,其中 x 是文字,数 $\alpha\in P$,将 $f(x)$ 的表示式中的 x 用 α 代替得到 P 中的数

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$$