中国科学院考研指定参考书

中国科学技术大学数学教学丛书

数学物理方程

季孝达　薛兴恒　陆　英　编

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书根据编者在中国科学技术大学多年的教学经验编写而成. 通过对三类典型方程的讨论, 介绍求解偏微分方程定解问题的通解法, 分离变量法, 积分变换法, 基本解方法和变分方法, 以及相关的固有值问题, 特殊函数和广义函数简介. 本书还讨论了一阶线性和拟线性偏微分方程的特征线概念和求解方法. 对涉及的数学理论, 本书重在理解和应用. 全书材料丰富, 结构清晰, 层次分明, 便于不同需求的读者使用.

本书适合于高等院校理工科非数学系本科生及有关科研、工程技术人员使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/季孝达等编. —北京: 科学出版社, 2005
(中国科学技术大学数学教学丛书)
ISBN 7-03-015378-2

I. 数… II. 季… III. 数学物理方程-高等学校-教材 IV. O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 033114 号

责任编辑: 杨 波 姚莉丽 / 责任校对: 朱光光
责任印制: 安春生 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2005 年 7 月第一次印刷 印张: 16 3/4
印数: 1—4 000 字数: 316 000

定价: 24.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新欣〉)

《中国科学技术大学数学教学丛书》编委会

主　编　程　艺

顾　问　(按汉语拼音排序)

陈希孺　方兆本　冯克勤　龚　昇　李翊神
石钟慈　史济怀

编　委　陈发来　陈　卿　陈祖墀　侯定丕　胡　森
蒋继发　李尚志　林　鹏　刘儒勋　刘太顺
缪柏其　苏　淳　吴耀华　徐俊明　叶向东
章　璞　赵林城

前　言

“数学物理方程”是以物理学和工程技术中提出的偏微分方程为主要研究对象，介绍求线性偏微分方程精确解方法的基础数学课程．中国科学技术大学历来重视学生的数理基础，建校以来一直把“数学物理方程”作为物理、力学、电子类学生的必修课，且主要由数学系负责开设．最初的讲义由已故的曾肯成先生亲自执笔，确定了课程的主要内容和结构．改革开放以来，陆续有严镇军、张鄂堂、薛鑫恒等教授编写的校内讲义和正式出版的教材问世，传统上都比较重视数学思想、数学理论的介绍和扎实的基本功训练．特别是严镇军教授的教材，已在中国科学技术大学沿用 20 多年，除了经典的分离变量、积分变换方法外，在同类教材中较早地引进了广义函数概念和基本解方法．多年来的实践证明这样的教学要求使学生有较强的后劲，特别是从事研究工作的毕业生更感到受益终身．

但是相对于信息时代科学技术的迅猛发展，我们 20 多年基本未变的教学内容、手段亟待重新审视和改进．另一方面，学制的缩短，招生人数的增加，毕业生就业渠道的多样化，也需要我们的教学作相应的变化．中国科学技术大学的校、院、系三级领导都对此事非常重视，近几年来多次召开公共数学教学的研讨会，并提出了重新编写教材的要求．我们受系领导委托，分工“数学物理方程”的编写．三年来，在我们多年教授该课程的基础上，经过调研讨论和教学实践中的探索，逐渐形成了这本教材．

本书的编写，基于公共基础数学课程的定位，确定了“以经典方法为基础，适当融入现代内容；继承科大理论坚实的传统，适当加强应用”的原则．具体处理如下：

1. 基本保持中国科学技术大学原有教材的内容和结构．由于变分方法在建立数学模型和求解定解问题两个方面的重要作用，我们将它列入正文．又由于前期数学课程的压缩，在本教材中增添了一阶线性 (拟线性) 偏微分方程的求解，加强了常微分方程的有关内容．

2. 将教材分出层次，以适应不同系别不同学生的要求．排列在各章前面的内容是课程的基本要求，以介绍各种具体解法及解法的思想为主．带 * 号的节、小节为选讲内容，一般是进一步的数学理论和物理应用．穿插在各章节中的楷体小字为阅读材料，大多是基本内容的延伸及从经典问题向近代问题开的窗口，受篇幅限制，仅点到为止，希望引起部分学生的兴趣、关注和思考．

3. 适当加强了课程与物理的联系，包括典型例子的物理背景，重要公式的物

理解释，及数学用语与物理用语的联系等.

希望这样的处理能使教师有较大的发挥空间，学生有较大的选择余地.

由于编者学疏才浅，编写过程中颇有力不从心之感. 虽谨慎从事，缺点错误仍在所难免，恳请各位读者指教指正，以期改进.

严镇军教授的同名教材是本书的重要参考，本书的编写得到严教授的大力支持和帮助. 李翊神教授在百忙中审阅了全稿，提出宝贵意见. 成稿过程中还得到张扬、贺劲松等多位物理、数学教授的热情帮助和数学系、教务处领导的全力支持，在此一并致谢.

编　者

2005 年元月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第 1 章　偏微分方程定解问题

偏微分方程 是指含有多元未知函数 $u = u(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 及其若干阶偏导数的关系式

$$F\left(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0, \tag{1.0.1}$$

其中最高阶导数的阶数 $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 为 **方程的阶**. 偏微分方程反映了变量 u 及多个自变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 间的相互制约关系，物理学、力学、工程技术等自然科学，经济学、人口学等社会科学中很多重要变量关于时间、空间以及其他因素的变化规律常常通过偏微分方程描述. 我们把这些从具体问题，主要是物理问题中导出的偏微分方程称为数学物理中的偏微分方程，简称为 **数学物理方程**. 当然数学物理方程有时还包括 **常微分方程** 和 **积分方程**.

如果偏微分方程 (1.0.1) 中与未知函数有关的部分是 u 及 u 的偏导的线性组合，则称方程 (1.0.1) 是 **线性偏微分方程**. 线性偏微分方程，是最简单最基本的偏微分方程，但可用以描述很多重要的物理过程，同时对于更精确反映物理过程的非线性方程的研究也将提供有益的启示. 数学物理中重要的线性偏微分方程是本课程研究的重点.

本章作为开篇，首先建立物理问题的数学模型，导出三类典型方程的定解问题；继而从数学上对二阶线性偏微分方程分类化简，进一步认识三类典型方程；最后将介绍求解一阶、二阶波动方程初值问题的通解方法和处理一般线性问题的基本原理.

1.1　数学物理方程的导出

数学物理研究问题的第一步是将一个物理问题转化成数学问题，即建立数学模型. 我们将从几个具体问题出发，导出三类典型方程，从中了解建立数学模型的一般步骤，认识三类方程的广泛物理背景.

1.1.1　弦的横振动

一根弦在内部张力作用下处于平衡位置，某个微小扰动引起部分质点的位移，内部张力又使邻近的部分随之产生位移，形成称为波的运动. 要将这样一个物理过程用数学式子描述，首先要“去粗存精”，对弦及其运动作“理想化”假设，即建立物理模型.

假设弦均匀细长，从而其横截面可忽略而视作线，线密度为常数. 又设弦柔软弹性，可任意弯曲，张力满足胡克定律. 弦的运动在同一平面进行，每个质点的位移都是横向的，即垂直于平衡位置，且绝对位移和相对位移都很小. 这些假设是推导方程过程中自然提出的，在物理问题中也是合理的.

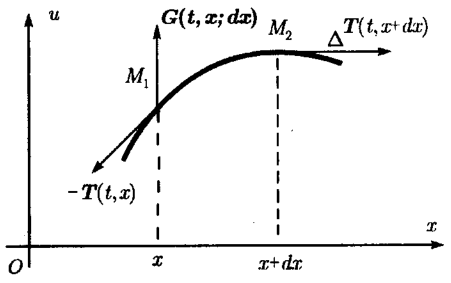

图 1.1.1

取弦在自身张力作用下的平衡位置所在直线为 x 轴，横向位移方向为 u 轴 (见图 1.1.1), 设 t 时刻弦上 x 处的质点相对于平衡位置的横向位移 $u=u(t,x)$ 为未知函数.

采用 **微元分析法**. 在弦上任取微元 $[x,x+dx]$, 微分记号 dx 表示一个无穷小改变量. 此微元可视作质量为 ρdx 的质点，在 t 时刻的运动遵循 **牛顿第二定律**

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}.$$

见图 1.1.1, 微元所受的外力有左端点的张力 $-\boldsymbol{T}(t,x)$, 右端点的张力 $\boldsymbol{T}(t,x+dx)$, 和加在微元上的垂直于 x 轴的外力 $\boldsymbol{G}(t,x;dx)$. 如果线密度 ρ 为常数， t 时刻作用于 x 处的单位长度上的外力，即外力密度 $g(t,x)$ 已知，张力 $\boldsymbol{T}(t,x)$ 关于 x 可微，则微元服从的牛顿第二定律可具体表为

$$\begin{aligned}\rho dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\boldsymbol{u}^\circ &= -\boldsymbol{T}(t,x)+\boldsymbol{T}(t,x+dx)+\boldsymbol{G}(t,x;dx)\\ &= \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x}dx+g(t,x)dx\boldsymbol{u}^\circ,\end{aligned}$$

其中第二个等号忽略了 dx 的高阶无穷小. 其分量形式为

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}=0, \tag{1.1.1a}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial T_2}{\partial x}+g(t,x), \tag{1.1.1b}$$

T_1, T_2 分别是张力 $\boldsymbol{T}$ 在 $\boldsymbol{x}^\circ$ 和 $\boldsymbol{u}^\circ$ 方向的分量. 这就是弦振动满足的基本偏微分方程组.

由于张力沿弦的切向作用，我们有第三个方程

$$T_2=T_1\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.1.1c}$$

代入 (1.1.1a, b), 便可化简得

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(t,x). \tag{1.1.2}$$

在微小横振动的假设下，$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$, 张力大小

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = T_1\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx T_1,$$

微元弧长

$$ds = \sqrt{dx^2 + du^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx dx.$$

在运动过程中，微元弧长保持不变，由胡克定律，张力大小 $T \approx T_1$ 也不随时间变化，从而 $T \approx T_1$ 为常数. (1.1.2) 改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \qquad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}},\ \ f(t,x) = \frac{g(t,x)}{\rho}, \tag{1.1.3}$$

称之为**弦的横振动方程**. 其中系数 a 反映波的传播速度, 由弦本身性质决定. $f(t,x)$ 则是作用在弦身单位质量上的外力，当弦自由振动时，$f(t,x) \equiv 0$.

以上推导方程的过程，实际上就是将微元运动满足的物理定律翻译成用已知函数、未知函数及其偏导数表示的数学式子. 在弦振动问题中的基本物理定律是牛顿第二定律和胡克定律，由此可见，凡是弹性介质中微小扰动的传播问题，如弹性杆的纵振动、弹性膜的横振动、声波在空气中的传播等，都可用类似方法导出同一类型的方程，一般表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + f(t,x), \qquad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \ n = 1,2,3. \tag{1.1.4}$$

其中 $\Delta = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 为 **拉普拉斯 (Laplace) 算子**. 此类方程称为 **波动方程**, 弦振动方程 (1.1.3) 也因此称为一维波动方程. 对于经典运动问题，可以建立更一般的固体弹性波方程，流体波方程，电磁波方程等. 在一些重要的特殊情况下，这些方程都可约化为波动方程 (1.1.4).

需要指出的是，弦振动方程 (1.1.3) 是在一定的理想化假设下导出的. 如果存在其他不能忽略的因素，比如弦在黏稠液体中振动，阻尼必须考虑，推出的方程中就会增加 $\alpha\frac{\partial u}{\partial t}$ 的项. 故任何数学模型都是相对的，超出一定范围，则需建立新的模型.

弦振动方程也可利用力学中的哈密顿 (Hamilton) 原理推导，我们将在第 6 章变分方法中介绍.

1.1.2 热传导问题

热运动是另一类物理过程. 空间某个物体或静止流体内温度分布不均匀，引起热量流动及温度的变化.

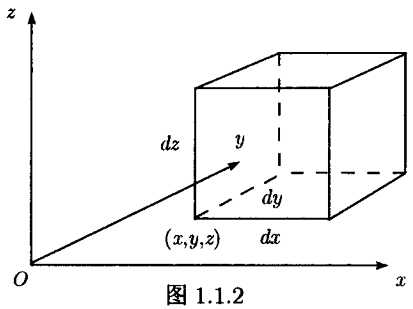

图 1.1.2

作理想化假设: 设物体由同一介质构成，且介质均匀分布，各向同性，从而介质的密度、比热和热传导系数均为常数.

在空间取定直角坐标系，取各点在 t 时刻的温度 $u = u(t,x,y,z)$ 为热运动的表征量. 在介质内任取微元 $dV = [x, x+dx] \times [y, y+dy] \times [z, z+dz]$, 考察微元 dV 在时间间隔 $[t, t+dt]$ 内的温度变化 (见图 1.1.2).

根据 **能量守恒定律**, 物体温度升高所需热量等于外部流入热量和内部热源产生热量之和. 热量的流动则遵循 **傅里叶 (Fourier) 热传导定律**: 热量从温度高处流向低处，流动热量的多少与温差成比例，其数学表示式为

$$\boldsymbol{Q}_n = -k(x,y,z;n)\frac{\partial u}{\partial n}\boldsymbol{n},$$

其中 $\boldsymbol{Q}_n$ 为 $\boldsymbol{n}$ 方向的热流密度矢量, 即单位时间沿 $\boldsymbol{n}$ 方向通过单位面积的热量; $k(x, y,z;n)$ 为介质的热传导系数，在介质均匀，各向同性假设下是常数，记为 k. 见图 1.1.2, 在 $[t, t+dt]$ 时间间隔内通过微元的左右面传入的热量为

$$\begin{aligned}&-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(t,x,y,z)}dtdydz + k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(t,x+dx,y,z)}dtdydz\\ \approx\ & k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{(t,x,y,z)}dtdxdydz,\end{aligned}$$

同样可以求出通过前后和上下面流入的热量分别为

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dtdxdydz \quad 和 \quad k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dtdxdydz.$$

如果介质内部有热源，其热源密度，即单位时间单位体积热源流出的热量为 $g(t,x,y,z)$, 则在 $[t, t+dt]$ 时间间隔内，微元内部流出热量

$$g(t,x,y,z)dtdxdydz.$$

而微元温度升高所需的热量为

$$c\rho[u(t+dt,x,y,z) - u(t,x,y,z)]dxdydz \approx c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dtdxdydz.$$

这些等式中都忽略了高阶无穷小量.

将这些量代入能量守恒定律便得方程

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g(t,x,y,z),$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

即 **热传导方程**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(t,x,y,z), \tag{1.1.5}$$

其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为三维 Laplace 算子， $a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}}$, $f(t,x,y,z)=\frac{g(t,x,y,z)}{c\rho}$.

如果考虑侧面绝热的杆或与高度无关的柱上的温度变化,同样可导出方程 (1.1.5), 只是 Laplace 算子相应地视为一维或二维.

我们也可先建立积分形式的热传导方程. 任取时间段 $[t_1,t_2]$, 在介质内任取区域 V_ε, 以 ∂V_ε 记它的边界. 能量守恒定律可用积分形式

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_\varepsilon} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV dt=\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial V_\varepsilon} k\frac{\partial u}{\partial n}dS+\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_\varepsilon} g(t,x,y,z)dV dt$$

表出，其中 n 为 ∂V_ε 的外法向. 假设 $u(t,x)\in C^2(V)$, 由高斯 (Gauss) 公式，有

$$\int_{\partial V_\varepsilon} k\frac{\partial u}{\partial n}dS=\int_{V_\varepsilon} k\Delta u dV,$$

因为此二式对于介质内任意部分 V_ε 和任意时间间隔 $[t_1,t_2]$ 都成立，由被积函数的连续性可得微分形式的热传导方程 (1.1.5).

热传导方程的建立基于能量守恒和热传导两条基本物理定律. 像气体扩散、杂质在固体或液体中扩散这些物理过程，其机理与热传导相似，都是由浓度的不均匀引起不同物质分子的位置交换，交换过程中每种物质的总量保持不变. 选取适当的未知函数，导出的方程与热传导方程有相同形式，因此也称热传导方程为 **扩散方程**.

波动方程和热传导方程分别描述了双向传播和单向扩散两种完全不同的物理过程. 他们都与时间 t 有关，称为 **发展方程**. 如果考虑热传导方程的稳恒状态，即 $\frac{\partial u}{\partial t}\equiv 0$, 它就成为 **泊松 (Poisson) 方程**

$$\Delta u=-\frac{1}{a^2}f(x,y,z), \tag{1.1.6}$$

当 $f(x,y,z)\equiv 0$ 时，就是 **Laplace 方程**(亦称 **调和方程**)

$$\Delta u=0. \tag{1.1.7}$$

1.1.3 静电场

真空中有电荷分布，密度为 $\rho(x,y,z)$, 引起的稳恒电场为 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$.

在空间任取区域 V, 其边界面记为 ∂V. 由静电场的高斯定律：通过任意封闭曲面的电通量等于该曲面包围体积内的电荷总量除以介电常数 ε_0, 有

$$\int\limits_{\partial V} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_{V} \rho(x, y, z) dV.$$

根据 Gauss 公式

$$\int\limits_{\partial V} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \int\limits_{V} \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV,$$

及 V 的任意性，推得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}. \tag{1.1.8}$$

又在空间任取曲面 S, 其边界线为 L, 由法拉第定律：静电场绕任意闭路的电动势为 0, 有

$$\int_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0.$$

根据斯托克斯 (Stocks) 公式

$$\int_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s},$$

及 S 的任意性，推得

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\theta},$$

即静电场 $\boldsymbol{E}$ 无旋. 从而存在位函数 $\varphi(x, y, z)$, 使

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi.$$

代入 (1.1.8), 即得 Poisson 方程

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}. \tag{1.1.6$'$}$$

故也称 Poisson 方程 (1.1.6)$'$ 为**场位方程**. 特别注意当空间无电荷分布, 即 $\rho(x, y, z) \equiv 0$ 时，静电场的电位 $\varphi(x, y, z)$ 满足 Laplace 方程 (1.1.7). 当电荷分布与 z 无关，即 $\rho = \rho(x, y)$ 时， (1.1.6)$'$ 成为二维场位方程.

从以上推导可见，三个二阶线性偏微方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(t, \boldsymbol{x}) \qquad \text{(波动方程)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(t, \boldsymbol{x}) \qquad \text{(热传导方程)},$$

$$\Delta u = -f(\boldsymbol{x}) \qquad (\text{场位方程}),\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ n = 1, 2, 3$$

是物理学中最常遇到的偏微分方程，其中每一个都同时描写了多种不同的物理过程，尽管这些过程的物理性质各不相同，但其数学表现形式完全一致. 因此我们将把这三个方程的讨论作为本课程的重点.

偏微分方程不仅出现在经典物理中，比如量子力学中的**薛定谔 (Schrödinger) 波动方程**

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\Delta\psi + u\psi, \tag{1.1.9}$$

其中 $\psi = \psi(\boldsymbol{r}, t)$ 为**波函数**,$u = u(\boldsymbol{r}, t)$ 为**势函数**, m 为粒子质量， $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h 为普朗克 (Planck) 常数. 它给出微观粒子的运动变化规律，是非相对论性量子力学的基本运动方程. 从数学上讲，薛定谔方程是一个复二阶线性偏微分方程，当势函数 u 不是常数时，是变系数线性方程.

线性偏微分方程通常用来对物理问题作基本的近似描述，对问题的深入精确描述便要引入非线性项. 如在一阶波动方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 上增加色散项 $\alpha\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ 和非线性影响 $\beta u\frac{\partial u}{\partial x}$, 成为三阶非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \beta u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

作变换 $\tau = \alpha t$, $\xi = x - at$, $\eta = \frac{\beta}{\alpha}u$, 得到著名的 **KdV (Korteweg–de Vries) 方程**

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} + \frac{\partial^3\eta}{\partial\xi^3} + \eta\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = 0.$$

通过重新尺度 $\overline{\tau} = c_1\tau$, $\overline{\xi} = c_2\xi$, $\overline{\eta} = c_3\eta$, 可改变 KdV 方程各项的系数，常用的形式为

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} + \frac{\partial^3\eta}{\partial\xi^3} + 6\eta\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = 0. \tag{1.1.10}$$

KdV 方程最早 (1895 年) 作为浅水中长波的传播模型提出，直到 20 世纪 60 年代以后又陆续在自由流体波的碰撞、离子声波、等离子体物理、点阵动力学等问题的研究中出现，成为非线性问题的一个典型方程.

有意思的是， KdV 方程中的 η 可作为一维定态薛定谔方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (\lambda - \eta)\psi = 0 \tag{1.1.11}$$

中的势函数出现. 正是基于这个发现，自 20 世纪 70 年代以来发展了求解非线性方程的反散射方法，及由此而蓬勃发展的非线性科学.

1.2 定解问题及其适定性

反映某类物理过程的微分方程并不能完全确定一个物理过程. 本节将讨论与

此相关的通解和特解，泛定方程和定解条件，定解问题及其适定性等问题，并给出常见的定解条件.

1.2.1　通解和特解

如果多元函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 使方程

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0,$$
$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n \tag{1.2.1}$$

在空间区域 $V \subset \mathbf{R}^n$ 内成为恒等式，则称此函数为方程 (1.2.1) 在区域 V 内的 **解**. 这里对解的要求很高，一个 m 阶方程在 V 内的解必须是一个 $C^m(V)$ 函数，即在 V 上有 m 阶连续偏导的函数，称这样的解为 **古典解**.

一个 m 阶偏微分方程的解有多少？

例 1.2.1　设 $u = u(\xi, \eta)$, 满足一阶偏微分方程 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, 方程两边对 ξ 积分，得 $\mathbf{R}^2$ 上的解 $u = f(\eta)$, 其中 $f(\eta)$ 是任意 $C^1(\mathbf{R})$ 函数.

例 1.2.2　设 $u = u(\xi, \eta)$, 满足二阶偏微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, 两边依次对 ξ, η 积分，得 $u = f(\xi) + g(\eta)$. 对于任意 $C^1(\mathbf{R})$ 函数 f, g, 此 u 都是方程在全平面的解.

可见偏微分方程的解族很大，可以包含任意函数. 称 m 阶偏微分方程的含有 m 个任意函数的解为方程的 **通解**, 不含任意函数或任意常数的解为方程的一个 **特解**. 通解中的任意函数一旦确定，通解就成为特解.

对于一般的偏微分方程，找出通解非常困难. 根据方程的物理背景或数学特点，找出某些特定形式的特解常常是有意义的. 例如根据解析函数的实、虚部是调和函数，即得二维 Laplace 方程 $\Delta_2 u = 0$ 的中心对称解 $u = \ln \frac{1}{r} (r \neq 0)$, 周期解 $u = e^x \sin y$, 多项式解 $u = x^2 - y^2$ 等等.

1.2.2　定解条件

方程的解中可出现任意函数，不能确定一个真实的运动，这是因为在建立方程的过程中，仅考虑了系统内部各部分间的相互作用，以及外界对系统内部的作用. 而一个确定的物理过程势必还要受到历史情况的影响和周围环境通过边界对运动的制约. 通常把反映系统内部作用导出的偏微分方程称为 **泛定方程**, 把确定运动的制约条件称为 **定解条件**, 泛定方程配以适当的定解条件构成一个偏微分方程的 **定解问题**. 定解条件也需从具体的物理问题中导出，常见的定解条件有以下几类.

初始条件

对于随着时间发展变化的物理过程，某一时刻的状态将影响该时刻以后的运动过程，该时刻的运动状态便是初始条件. 如在弦振动问题中，影响弦今后运动的条件有两个

$$\text{初位移} \qquad u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{1.2.2a}$$

$$\text{初速度} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \tag{1.2.2b}$$

在热传导问题中，影响今后温度变化的则是初始时刻的温度分布

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{1.2.3}$$

从数学上讲，初始条件是给出未知函数 u 及其关于某个自变量 t 的各阶偏导函数在同一点 $t = t_0$ 的值. 如果方程中关于 t 的最高阶导数是 m 阶的，则应给出 $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \cdots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}$ 在 $t = t_0$ 的值.

边界条件

在弦振动问题中，对一条有限长的弦 $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$，端点 $x = x_1, x = x_2$ 的运动状况对整根弦的运动有制约. 以左端点 $x = x_1$ 为例，最简单的情况是端点运动已知，即

$$u|_{x=x_1} = \mu_1(t), \tag{1.2.4}$$

称为 **第 I 类边界条件**. 当端点固定在平衡位置时，$\mu_1(t) = 0$, 称为 **第 I 类齐次边界条件**.

如果端点负荷已知，$x = x_1$ 点受横向外力 $\boldsymbol{F}_1(t) = F_1(t)\boldsymbol{u}^\circ$. 见图 1.2.1, 在左端点取微元 $[x_1, x_1 + dx]$, 在 $\boldsymbol{u}^\circ$ 方向该微元满足牛顿第二定律

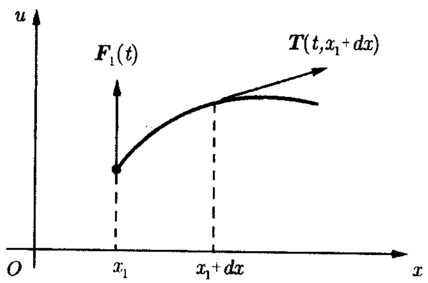

图 1.2.1

$$\begin{aligned}\rho dx \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=x_1} &= F_1(t) + g(t, x_1)dx + T_2(t, x_1 + dx) \\ &= F_1(t) + g(t, x_1)dx + T_2(t, x_1) + T_2(t, x_1 + dx) - T_2(t, x_1) \\ &= F_1(t) + g(t, x_1)dx + T_1 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} + T_1 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_1} dx,\end{aligned}$$

以上等式利用了 $T_2 = T_1 \frac{\partial u}{\partial x}$(1.1.1c). 忽略一阶无穷小量，得边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} = -\frac{F_1(t)}{T_1}. \tag{1.2.5}$$

这里给出的是 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在端点的值, 称为 **第 II 类边界条件**. 当端点自由运动, 即 $F_1(t) \equiv 0$ 时，为 **第 II 类齐次边界条件**.

如果端点弹性支承,即端点除负荷 $\boldsymbol{F}_1(t) = F_1(t)\boldsymbol{u}^\circ$ 外,还有弹性力 $-ku(t, x_1)\boldsymbol{u}^\circ$, 此时端点的运动须满足

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} = -\frac{F_1(t) - ku(t, x_1)}{T_1},$$

即

$$\left[ku - T_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=x_1} = F_1(t). \tag{1.2.6}$$

此时边界条件以 u 和 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的线性组合给出，称为 **第 Ⅲ 类边界条件**. 同样如果非弹性负荷 $F_1(t) \equiv 0$, 则为 **第 Ⅲ 类齐次边界条件**.

对于右端点 $x = x_2$, 也可同样导出这三类边界条件，与左端点不同的是 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 项前添负号. 如果用 $\boldsymbol{n}$ 表示端点的外法向，则左右两端的三类边界条件可统一表示为 u 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的线性组合

$$\left[\alpha_i u + \beta_i \frac{\partial u}{\partial n}\right]_{x=x_i} = F_i(t), \qquad i = 1, 2. \tag{1.2.7}$$

这三类边界条件也会在热传导问题中出现. 以三维热传导问题为例，当物体边界温度已知时，导出的也是第 Ⅰ 类边界条件,

$$u(t,x,y,z)\Big|_{\partial V} = \mu(t,x,y,z)\Big|_{\partial V},$$

特别当边界温度保持零度时便得第 Ⅰ 类齐次边界条件.

当边界上沿外法向 $\boldsymbol{n}$ 的热流密度 $q(t,x,y,z)$ 已知时，由热传导定律，即导出第 Ⅱ 类边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial V} = -\frac{q(t,x,y,z)}{k}\Big|_{\partial V},$$

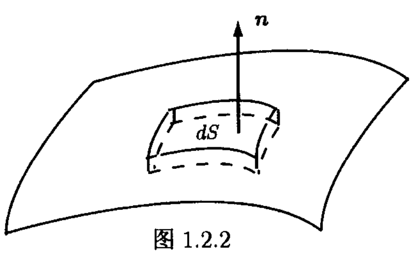

图 1.2.2

k 为热传导系数. 最常见的是边界绝热的情况，相应于齐次 Ⅱ 类边条件.

如果物体通过边界与外界自由热交换，见图 1.2.2, 在边界面上 (x,y,z) 处取小面元 ds, 在时间段 $[t, t+dt]$ 内从物体内部流入面元 ds 的热量为

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{(t,x,y,z)} dsdt.$$

根据 **牛顿冷却定律**, 从外部流入面元的热量为

$$h(\theta - u)\Big|_{(t,x,y,z)} dsdt,$$

其中 h 为两种物质间的热交换系数， $\theta = \theta(t,x,y,z)$ 为外界的温度. 能量守恒定律决定了热量不能在面元上积聚，从而有

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial V} + h(\theta - u)\Big|_{\partial V} = 0,$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com