

中国强震记录汇报

REPORT ON STRONG EARTHQUAKE MOTION RECORDS
IN CHINA

第五集

Vol. V



1985年新疆乌恰7.4级地震 强余震观测报告

地震出版社

序

1985年8月23日新疆维吾尔自治区乌恰7.4级地震发生后,新疆维吾尔自治区地震局和兰州地震研究所在极震区及其附近及时架设了4个临时强震观测台,在主震后近一个月内取得了一批宝贵的强余震记录,其中包括一个6.8级强震在震中距小于40km的三个台站的记录,其中一个台站至地震断层地表迹线的距离仅约4km。这一观测成果表明,捕获强余震是尽快改善我国强震数据库的一条有效途径。因此,我们除了应当逐步发展精心设计的、具有特定工程地震和地震工程研究目标的固定强震台阵,并进行长期不懈的观测之外,还应当在平时做好流动观测队伍的组织、观测仪器以及交通工具的充分准备,以便大震发生之后能够立即奔赴现场,及时获取强余震近场地面运动记录。

本集选取了18次地震的52条加速度记录,提供了常规分析结果,供地震工程和工程地震界参考使用。由于喀什市一级水电站大坝位于6.8级强震极震区,大坝在主震震害的基础上又遭受新的严重破坏,大坝附近的建筑物也遭严重破坏,本集提供的6.8级地震地面运动记录对于研究地震对水工结构和房屋结构的破坏作用具有重要价值。此外,本集提供的数据对于探讨内陆地震极震区地震动的工程特征及其与发震断层破裂过程的关系也具有研究价值。可以期望,这些资料对我国近场地面运动研究及震害预测研究均将有所裨益。

近20年来,世界各国的强震观测工作发展迅速,已积累的一大批强震记录已经和正在对近场强烈地震动的预测研究以及抗震设计方法的改进起着重要推动作用。不过,目前已有强震记录的数量和质量仍远不能满足研究工作的需要。预测近场强烈地震动的震源模式、包含大量高频成分的地震波在真实地球介质中的传播规律以及局部场地条件对地面运动的影响等一系列基本问题的解决均有待于获取必要数量的高质量强震记录。新疆及其边界地区破坏性地震发生频繁,新疆又是我国21世纪的重要开发基地,发展新疆的工程地震研究及为其服务的强震观测工作已经受到广泛重视。我们相信,在国家地震局的组织和支持下,新疆维吾尔自治区地震局将和全国各兄弟单位共同努力,为发展我国强震观测、充实我国强震观测数据库做出更大贡献,为工程地震和地震工程研究做出更大贡献。

廖振鹏

1987年9月

前 言

1985年8月23日北京时间20时41分,新疆维吾尔自治区乌恰—疏附县境发生了7.4级大震。这次地震给当地人民生命财产造成了严重损失¹⁾。地震发生后,新疆维吾尔自治区地震局和兰州地震研究所立即派出科研人员在极震区及其附近架设了4个临时强震观测台。在近一个月的观测中,获得了39次余震的地面运动加速度记录,其中最大震级 $M_s=6.8$ 级。本集选辑了所获取记录中的18个大于3.0级余震的52条加速度记录。这批强余震记录全部由国家地震局工程力学研究所数据处理中心按强震记录的常规处理方法完成记录的数字化处理和计算。

这批强余震记录中,地面运动峰值加速度值在 $0.2g$ 以上的有5条,其中最大加速度为 $0.2935g$ ($M_s=5.1$ 级,水电站台);加速度值在 $0.1g-0.2g$ 的有7条,小于 $0.1g$ 的有40条。 6.8 级最大强余震的峰值加速度值为 $0.2435g$ (水电站台),震中距为 $9km$ 。观测台距 6.8 级强余震造成的地表地震断层最近点仅 $4km$ 。现将这批记录资料编辑成册以飨读者。我们衷心期望本集资料能对工程抗震、震害预测和地震学等方面的研究工作有所裨益,并诚恳期望读者给予批评指正。

在本集的汇编出版过程中,国家地震局工程力学研究所和兰州地震研究所给予了大力协助和支持;国家地震局徐宗和、新疆维吾尔自治区地震局戈澍谟等有关同志给予关心和指导;现场观测中冯先岳、顾伟勤同志曾给予指导帮助,在此一并致以衷心感谢!

编 者

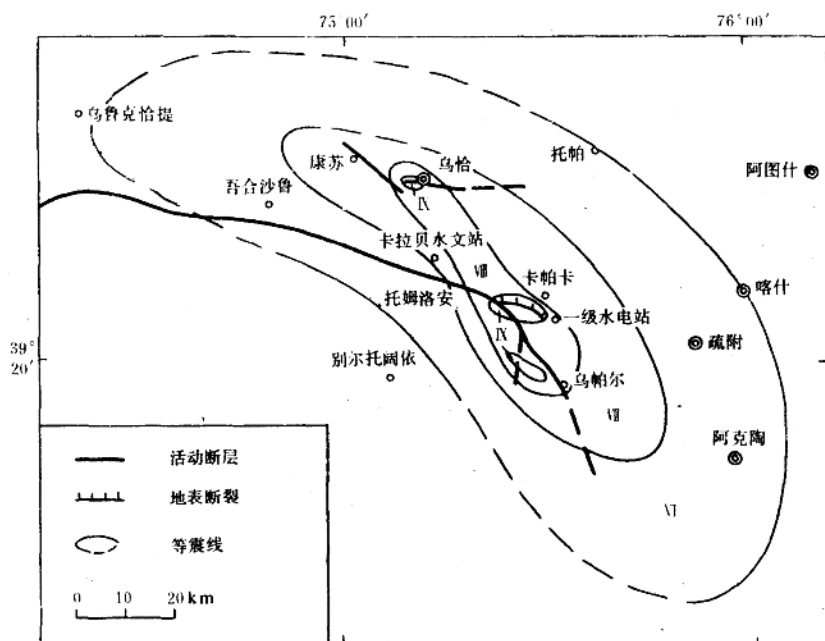
1987.5

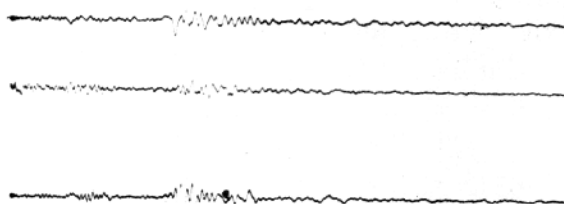
1) 新疆维吾尔自治区地震局, 1985年8月23日新疆乌恰7.4级地震烈度考察报告, 1985。

地震概况

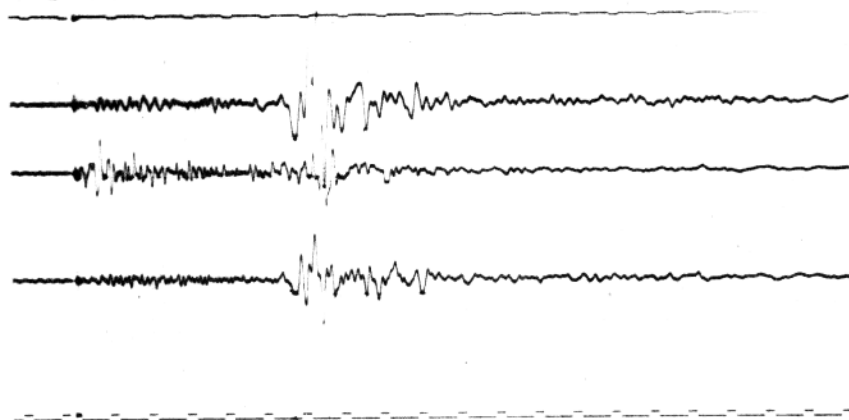
乌恰7.4级主震震中位于北纬 39.40° ，东经 75.37° ，震源深度22km。地震发生在新疆强震多发地带的西昆仑山与南天山地震带的衔接地带，东西向转北西向的卡兹克阿尔特断裂位于震中所在的克孜勒苏河上，震中位于断裂拐弯处。卡兹克阿尔特断裂为这次地震的发震断裂（图1）^{〔1〕}。7.4级主震造成乌恰县城、疏附县乌帕尔乡和喀什市一级水电站大坝严重破坏，伤200余人，死亡64人，震中烈度达Ⅷ度。主震后，余震持续不断。9月12日发生了一次6.8级强余震，震中位于克孜勒苏河上的喀什市一级水电站水库大坝附近，致使大坝再度遭受严重破坏，土坝开裂出现大面积滑坡并整体下沉70cm，主震时保持完好的混凝土排洪闸和附近建筑物在这次余震中遭受严重破坏，排洪闸裂缝10cm，输出渠道震裂，大坝附近建筑物大部分倒毁，伤60余人，死3人。7.4级主震和6.8级强余震使水库大坝北1.5km处出现地表断裂。该断裂带总长15km，呈一向北东突出的弧形断裂带，倾向南西，倾角为 27° — 42° ，总体展布方向与发震构造方向一致。该地表断裂带以逆冲为主，最大倾向逆冲断距达2.0m，右旋水平最大错距1.6m。6.8级强余震极震区烈度亦达Ⅷ度。

乌恰地震部分强余震原始记录见照片1—10。

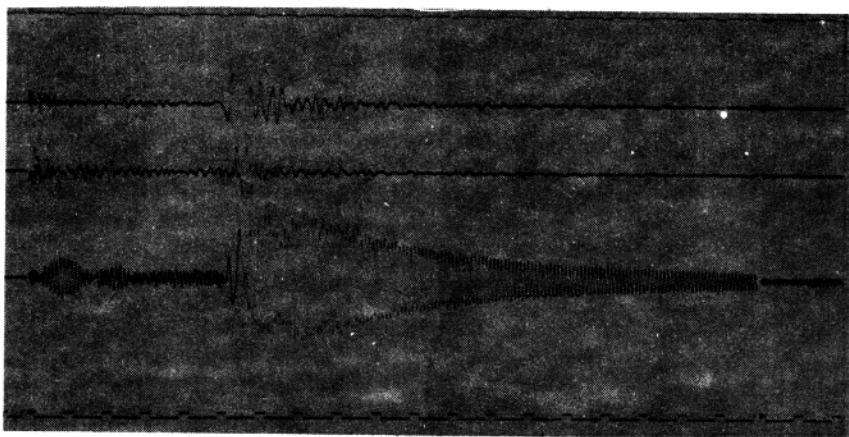




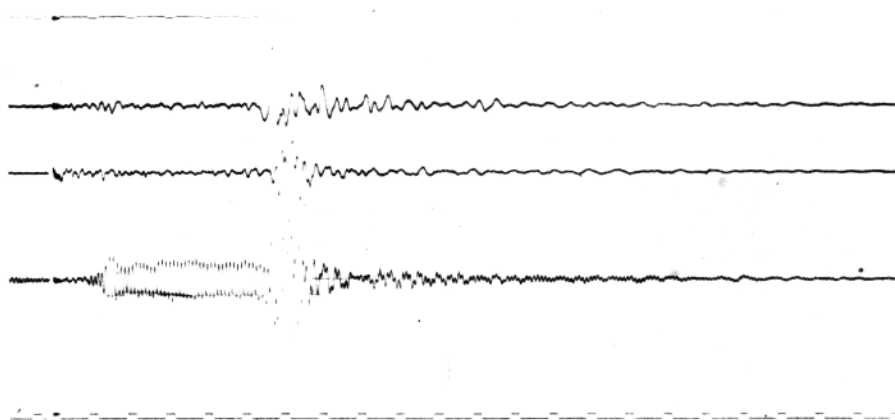
照片1 1985年8月29日 21^h15^m07^s, $M_s=4.3$
水电站台, 震中距=15.8km, $A_{max}=0.0799g$



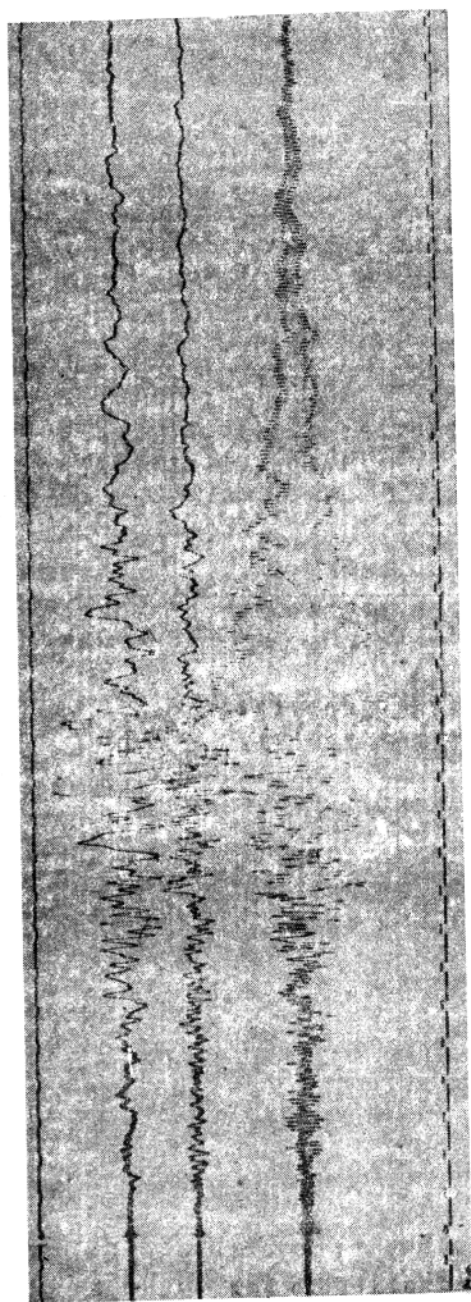
照片2 1985年8月30日 07^h39^m49^s, $M_s=5.1$
水电站台, 震中距=11.5km, $A_{max}=0.2935g$



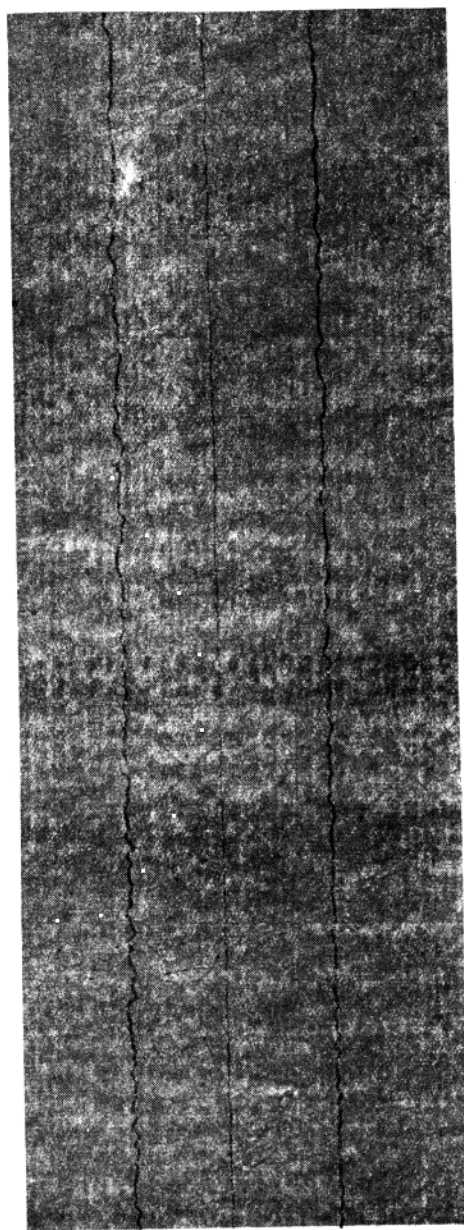
照片3 1985年9月1日 09^h38^m42^s, $M_S=4.0$
水电站台, 震中距=9.0km, $A_{max}=0.2436g$
(EW分向阻尼故障)



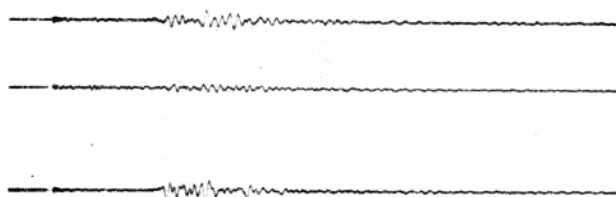
照片4 1985年9月2日 07^h34^m03^s, $M_S=4.0$
水电站, 震中距=25.5km, $A_{max}=0.2068g$
(EW分向阻尼故障)



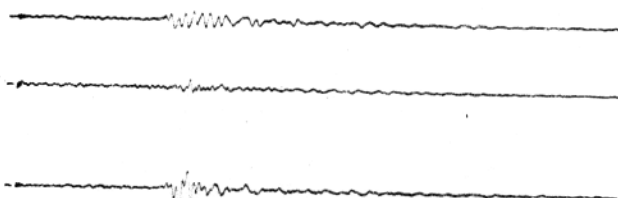
照片5 1985年9月12日 04^h45^m50^s, $M_s=6.8$, 水电站, 震中距=9.0km, $A_{max}=0.2435g$
(EW分向阻尼故障)



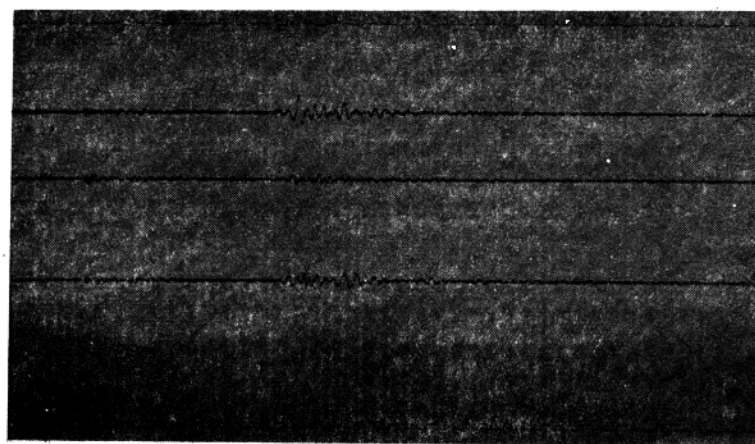
照片6 1985年9月12日 04^h45^m50^s, $M_s=6.8$,
疏附台, 震中距=39.5km, $A_{max}=0.0231g$



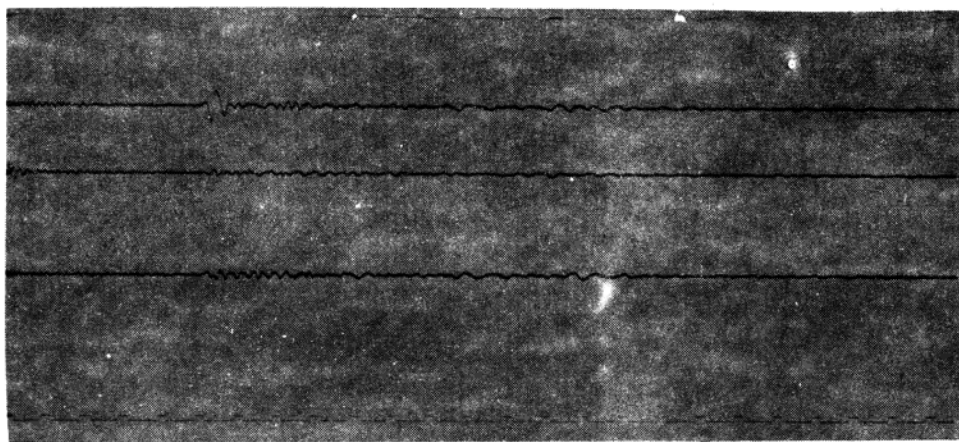
◁ 照片 7 1985年9月12日 18^h12^m 22^s, $M_s=3.7$, 水电站台, 震中距=26.0km, $A_{max}=0.0336g$



▷ 照片 8 1985年9月13日, 19^h13^m 30^s, $M_s=3.5$, 水电站台, 震中距=8.5km, $A_{max}=0.0589g$



◁ 照片 9 1985年9月 13日 21^h21^m19^s, $M_s=4.0$, 水电站台, 震中距=9.0km $A_{max}=0.0518g$



照片10 1985年9月20日 03^h17^m45^s, $M_S=4.0$, 水电站台, 震中距=12.8km, $A_{max}=0.0484g$

地震记录编目

本集所选取的18个地震记录,按发震时间先后排列,有关地震参数列于表1,震中分布见图2。

表1

地震目录

地震编号	发震日期 年 月 日	发震时间 (北京时间) 时 分 秒	震中位置		震 级 M_s	震源深度 (km)	震中参数 精 度
			北纬	东经			
01	1985 8 28	08 10 00	39°24'	75°24'	4.7	9	II
02	1985 8 29	21 15 07	39°18'	75°36'	4.3		II
03	1985 8 30	07 39 49	39°30'	75°27'	5.1		I
04	1985 9 1	09 38 42	39°24'	75°24'	4.0		II
05	1985 9 2	07 34 03	39°12'	75°24'	4.0		II
06	1985 9 3	20 57 40	39°12'	75°24'	3.0		II
07	1985 9 3	23 21 53	39°24'	75°24'	3.2		II
08	1985 9 3	23 47 00	39°24'	75°30'	3.0		II
09	1985 9 4	15 51 38	39°18'	75°30'	3.8		II
10	1985 9 9	00 05 42	39°31'	75°18'	3.8		I
11	1985 9 9	06 43 12	39°12'	75°24'	4.2	19	II
12	1985 9 9	07 04 12	39°19'	75°14'	4.2		I
13	1985 9 12	04 45 50	39°23'	75°24'	6.8		I
14	1985 9 12	05 08 46	39°12'	75°24'	5.0		II
15	1985 9 12	18 12 22	39°27'	75°12'	3.7		I
16	1985 9 13	19 13 30	39°22'	75°26'	3.5		I
17	1985 9 13	21 21 19	39°21'	75°27'	4.0		I
18	1985 9 20	03 17 45	39°20'	75°24'	4.0		I

说明: (1) 资料取自新疆维吾尔自治区地震局《地震目录》1985. 八、九期和1985. 8. 23乌恰 $M_s=7.4$ 级地震序列目录。

(2) 震中参数精度: I 类5—10km; II类10—15km。

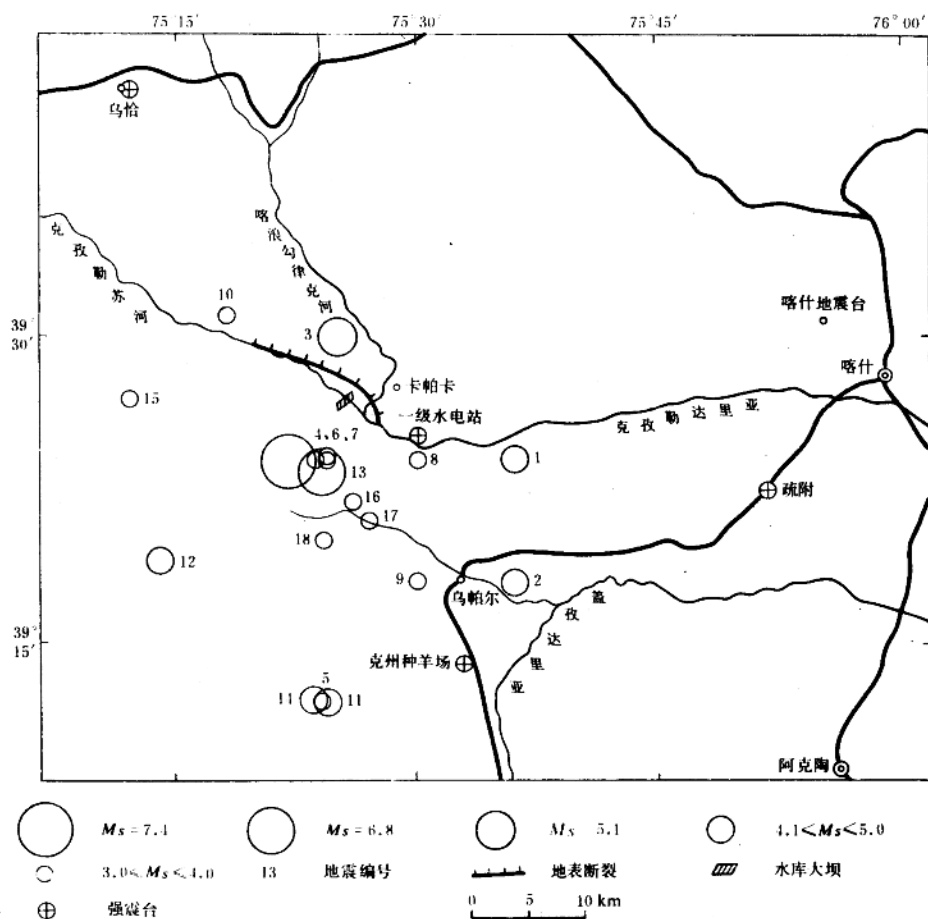


图 2 乌恰地震震中及强震台位置

观测仪器和台址资料

一、仪器技术特性

这次强震观测使用的仪器（4台）全部是国家地震局地震仪器厂生产的GQ-ⅢA型强震加速度仪（照片11）。该仪器系自动触发直光式三分向记录仪。其主要技术性能如下：

幅频特性：0—20Hz以上

动态范围：0.010—0.500g；0.020—1.000g

触发加速度：0.005±0.002g

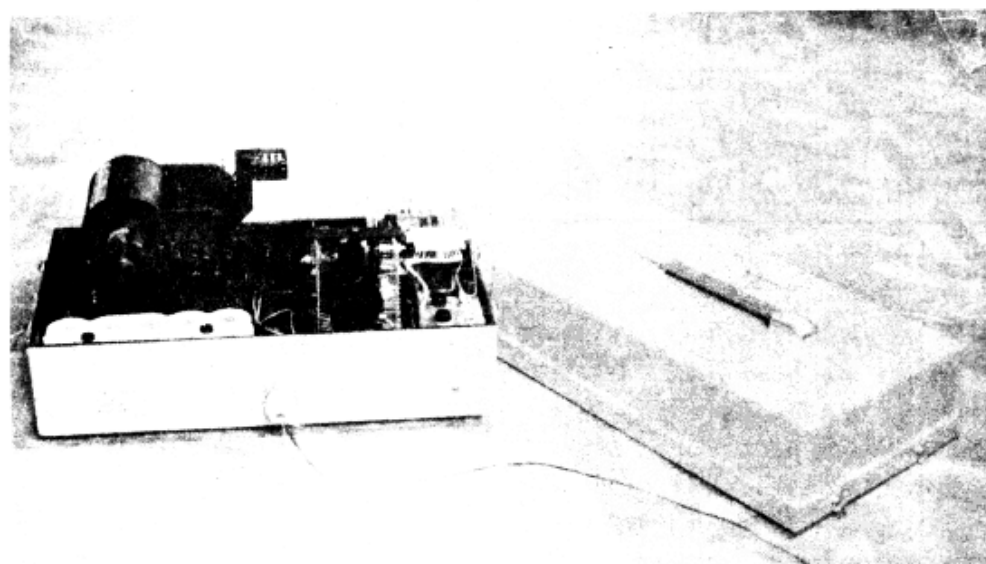
时标：500±0.5ms

延时：6±2s

启动延时：≥50ms

记录精度：5%±0.005g

各台站仪器主要技术参数列于表2—4。



照片11 GQ-ⅢA型强震加速度仪

表 2

疏 附 台 仪 器 参 数

主要参数	方 向	SN	EW	UD
灵敏度 (mm/g)		35.0	33.5	30.5
自振频率 (Hz)		21.0	21.4	22.0
阻 尼 <i>D</i>		0.66	0.57	0.64

表 3

水 电 站 台 仪 器 参 数

主要参数	方 向	SN	EW	UD
灵敏度 (mm/g)		41.6	37.2	39.0
自振频率 (Hz)		19.0	20.2	19.9
阻 尼 D		0.70	0.55	0.59

表 4

种 羊 场 台 仪 器 参 数

主要参数	方 向	SN	EW	UD
灵敏度 (mm/g)		40.6	33.5	32.5
自振频率 (Hz)		19.8	20.9	21.5
阻 尼 D		0.61	0.61	0.63

二、台址资料

台站按我国统一的省、市、自治区标准排列顺序和该地区建台顺序编号，字头M表示流动观测台。台站目录列于表5，台站分布见图2。

表 5

强 震 观 测 台 站 目 录

台 站 编 号	台站名称	海拔高度(m)	场地上质	观测对象	观测单位
M2701	疏 附 台	1300	砂质粘土	地 面	新 疆 局
M2702	水电站台	1550	砂砾石层	地 面	新 疆 局
M2703	乌 恰 台	2200	砂 岩	地 面	兰 州 所
M2704	种羊场台	1470	黄 土 层	地 面	兰 州 所

各台站有关资料分述如下。

疏附台 (M2701)

台站地点：疏附县招待所

观测对象：单层砖混平房室内水泥地面

场地土质：台站位于冲积平原上，表层为砂质粘土，土层厚13m，底部为戈壁砾石层，未探出基底基岩，地下水位28m。

水电站台 (M2702)

台站地点：喀什市一级水电站办公室

观测对象：单层砖混平房室内水泥地面

场地土质：台站位于克孜勒苏河I级阶地上。台址为阶地砾石层，厚度约2m，基底为粉砂岩。

乌恰台 (未取得记录，从略)

种羊场台 (M2704)

台站地点：克孜勒苏自治州种羊场招待所

观测对象：土木结构单层平房室内地面

场地土质：台站位于山前平原，台址为黄土状土层，厚约6m，其下为风化砂岩，距台址120m处有泉水出露。

记录的常规处理和分析

一、概况

记录的常规数据处理和分析是在国家地震局工程力学研究所数据处理中心进行的。内容包括：原始记录的数字化；计算调整（未校正）的加速度记录；计算校正的加速度记录；计算反应谱和富氏振幅谱。

强震记录数据处理中心配有PDP-11/23-PLUS计算机，该机内存为256KB，外存为32MB硬盘。采用RSX-11操作系统。它设有8个异步串行口，其中之一支持Calcomp-6000系列数字化器，以完成模拟光记录式仪器记录的数字化。

该数据处理中心已编制成强震记录常规数据处理和分析的成套程序。所有程序以FORTRAN语言编写。

二、数字化及记录调整

GQ-ⅢA型强震仪系直光式三分向仪器。其记录的数字化是在Calcomp-6000数字化器上进行的。数字化器工作台面 $1000 \times 750 \text{ mm}^2$ ，读数的基本单位是0.025mm，游标定位器上有9个可编程键，每个采样过程把键编号和采样点的坐标以ASCII码送入中心计算机，再由控制程序把ASCII码转换为坐标值。

在对记录进行数字化时，首先用目测法使记录零线与数字化器台面的横轴平行，然后对记录的每条加速度迹线和时标迹线进行数字化。加速度迹线采用不等间距采样，不仅要对所有峰点和拐点进行采样，而且在峰点和拐点之间还要选取足够多的点进行采样，使得全部采样点的直线段连线与加速度迹线基本上拟合。

为消除强震仪记录纸横向移动和读数时数字化器引入的系统误差，以加速度迹线的采样值，据加速度曲线沿其全长对零线积分为零的原则，对加速度记录做一次平移，初步确定出加速度记录的零基线。

为消除强震仪走纸速度不均匀带来的影响，根据时标的采样值，采用线性插值法，定出数字化点的精确坐标值⁽²⁾。

由此得到调整（未校正）的加速度数字化记录。

三、加速度记录的校正

由原始模拟记录经过数字化处理得到的调整加速度记录，固然包含所需要的地震动真实信息，但其中尚包含着仪器反应失真以及其它环节中混入的各种误差。为减少和消除这种误差，提高数据的精度，需对未校正数字化记录进行仪器校正和零线校正。

（一）仪器校正

GQ-ⅢA型强震仪为直光式加速度仪。摆体为加速度摆，自振频率为 $20 \pm 2 \text{ Hz}$ ，阻尼比为0.5—0.7。

摆体的运动方程为：

$$\ddot{\theta} + 2nD\dot{\theta} + n^2\theta = -\frac{1}{L}\ddot{X}(t) \quad (1)$$

式中， θ 为摆体相对于平衡位置的角位移； n 为摆的固有圆频率； D 为摆的临界阻尼比； L 为

摆的折合摆长; $\ddot{X}(t)$ 为真实的地面加速度; t 为时间自变量。

方程的近似项为 $n^2\theta \approx -\frac{1}{L}\ddot{X}(t)$ 。强震仪所得到的加速度记录是失真的记录。为完

成仪器校正, 需根据运动方程求得 $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ 项, 进而求得 $\ddot{X}(t)$ 。

在仪器校正之前, 将调整的加速度记录内插成等间距的数据序列, 其步长取为 0.01s。

采用微分-微分法求得 $\dot{\theta}(t)$, $\ddot{\theta}(t)$, 根据摆的运动方程求得真实的地震动时程 $\ddot{X}(t)$ 。

为防止在运算过程中高、低频数字化误差被放大, 首先对调整记录数据做一次带通滤波。

图 3 示出了仪器校正框图。

(二) 零线校正

经过仪器校正后, 记录中仍然混有数字化过程中产生的长周期偶然误差。在经积分求速度和位移的过程中, 这种长周期误差无疑会被放大。另一方面, 由于原始记录是丢头的 (P 波的开始部分总是被漏记的), 而且初始速度和位移是未知的, 在积分过程中也会因此而引入长周期误差。长周期误差的存在就意味着零线受到歪曲, 所以, 零线校正是十分必要的。

零线校正的计算框图如图 4 所示。

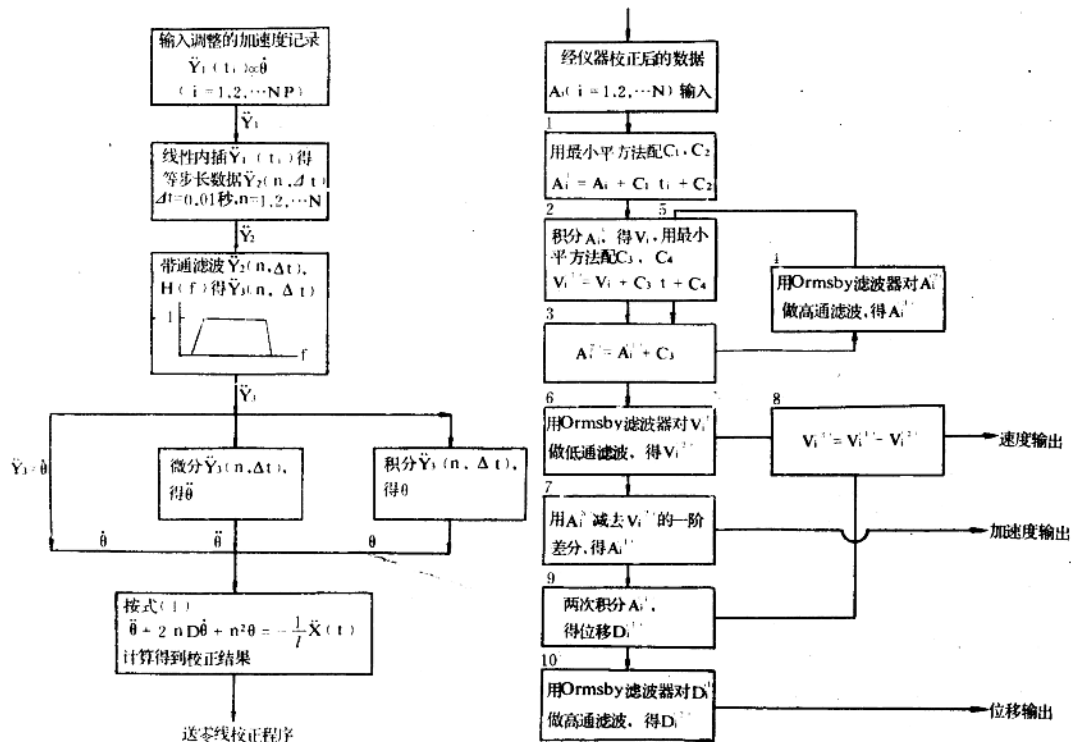


图 3 仪器校正计算框图

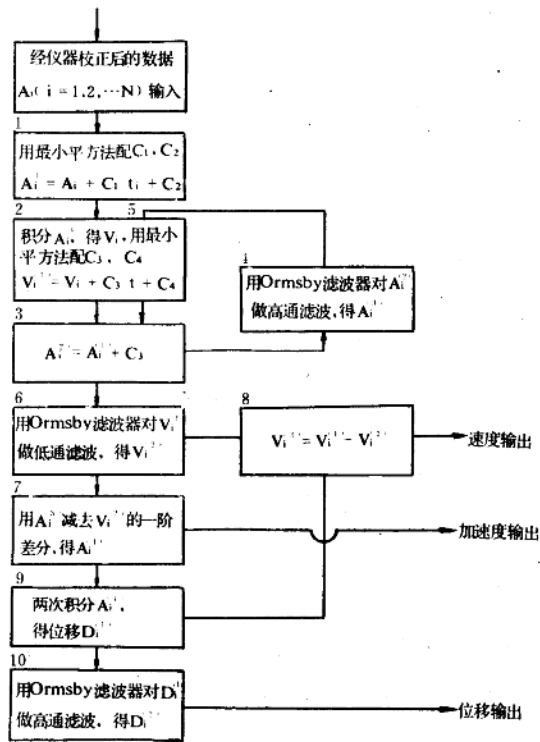


图 4 零线校正计算框图

(1) 估计加速度零线。为了对经仪器校正后的加速度数据的零线给出新的估计, 采用最小均方法。即让零线平移并绕其始点旋转一个小角度, 使得加速度的平方和最小。

设经仪器校正后的等步长加速度数据为 $\{A_i\} (i=1, 2, \dots, N)$, N 为数据个数。

令 $A_i^{(1)} = A_i + C_1 t_i + C_2 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (2)$

式中, t_i 是与 A_i 相对应的坐标。由

$$\sum_{i=1}^N (A_i^{(1)})^2 = \text{最小} \quad (3)$$

求出待定系数 C_1 和 C_2 。这样，就得到了零线的新的估计。

(2) 积分速度。假定初始速度为零，积分 $\{A_i^{(1)}\}$ ，得速度 $\{V_i\} (i=1, 2 \dots N)$ 。然后，也用最小均方法求出速度零线 $C_3 t_i + C_4$ 。所得转角 C_3 作为加速度的平均值加至 $\{A_i^{(1)}\}$ ，所得平移量 C_4 作为初始速度的估计，于是，有

$$V_i^{(1)} = V_i + C_3 t_i + C_4 \quad (i=1, 2 \dots N) \quad (4)$$

(3) 加速度 $\{A_i^{(1)}\}$ 加上加速度平均值的估计 C_3 ，得 $\{A_i^{(2)}\}$ ， $(i=1, 2 \dots N)$ 。

(4) 用Ormsby滤波器对加速度数 $\{A_i^{(2)}\}$ 做高通滤波，得 $\{A_i^{(3)}\}$ ， $(i=1, 2 \dots N)$ 。

(5) 重复(2)、(3)两步，这是因为经过第(4)步速度零线会略有变化，为了减少这种变化对零线的影响，采用一次循环是适当的。

(6) 用Ormsby滤波器对速度做低通滤波，得 $\{V_i^{(2)}\}$ ， $(i=1, 2 \dots N)$ 。

(7) 用加速度 $\{A_i^{(3)}\}$ 减去 $\{V_i^{(2)}\}$ 的一阶差商，这等于对加速度又做一次高通滤波，得 $\{A_i^{(4)}\}$ ， $(i=1, 2 \dots N)$ ，即校正的加速度记录。

(8) 用速度 $\{V_i^{(1)}\}$ 减去 $\{V_i^{(2)}\}$ ，这等于对速度又做一次高通滤波，得 $\{V_i^{(3)}\}$ ， $(i=1, 2 \dots N)$ ，即积分速度的最终结果。

(9) 假定初始速度为零，对加速度 $\{A_i^{(4)}\}$ 做二次积分，得位移 $\{D_i^{(1)}\}$ ， $(i=1, 2 \dots N)$ 。

(10) 用Ormsby滤波器对位移 $\{D_i^{(1)}\}$ 做高通滤波，得积分位移 $\{D_i^{(2)}\}$ ， $(i=1, 2 \dots N)$ 。

在以上计算中，所有微分运算采用中心差商法，所有积分运算采用梯形公式。

此外，在计算Ormsby滤波器权函数时，要保证滤波器传递函数的最大误差 ϵ 小于1.2%。为此，滤波器权函数的个数（单侧） NF 应满足：

$$NF = \frac{1}{DF \cdot DT} \quad (5)$$

式中， DF 为滤波器的过渡带宽， DT 为计算步长。为了减少高通滤波的运算量时，先用等权跟随平均滤波器（终止频率为5Hz）做低通滤波，然后“十点取一”，即每十个相邻的离散数据中，只保留第一个。这样，就将步长从0.01s增加到0.1s。高通滤波完成后，再用内插法，将数据恢复为步长为0.01s的数据序列。

研究表明^(2,3)，在选取Ormsby滤波器参数时，高频截断频率取30Hz，过渡带宽取2Hz是恰当的，低频截断周期与记录的长度有关，一般取记录长度的1/2—1/3为宜。例如，当记录长度为10s时，可取截断周期为5s，即截频率为0.2Hz，过渡带宽取为0.05Hz或0.1Hz。

四、加速度反应谱

单自由度系统的振动方程为：

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = -a(t) \quad (6)$$

式中， x 为相对位移， ω 为自振圆频率， ζ 为临界阻尼比， $a(t)$ 为校正的加速度记录。

本报告采用“精确法”⁽⁴⁾求解式(6)，计算加速度反应谱。

$a(t)$ 可以看成由一系列等步长 ($\Delta t = 0.01s$) 的彼此相连的直线段构成。在 $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, 有:

$$a(t) = a(t_i) + \frac{a(t_{i+1}) - a(t_i)}{\Delta t} (t - t_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

于是, 式 (6) 的 Duhamel 积分可表示为^[4]:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} \end{bmatrix} = M(\xi, \omega, \Delta t) \begin{bmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} + L(\xi, \omega, \Delta t) \begin{bmatrix} a(t_i) \\ a(t_{i+1}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中, M 和 L 分别为二阶矩阵, 每个矩阵元素都是 ξ , ω 和 Δt 的函数。对于给定的 ξ 和 ω , 且 Δt 为常数时, M 和 L 的每一个元素都是常数。可以证明^[4], 这时, 矩阵 M 的诸元素为:

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= e^{-\zeta \omega \Delta t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d \Delta t + \cos \omega_d \Delta t \right) \\ m_{12} &= \frac{e^{-\zeta \omega \Delta t}}{\omega_d} \sin \omega_d \Delta t \\ m_{21} &= -\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\zeta \omega \Delta t} \sin \omega_d \Delta t \\ m_{22} &= e^{-\zeta \omega \Delta t} \left(\cos \omega_d \Delta t - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d \Delta t \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

L 矩阵的诸元素分别为:

$$\left. \begin{aligned} l_{11} &= e^{-\zeta \omega \Delta t} \left[\left(\frac{2\xi^2 - 1}{\omega^2 \Delta t} + \frac{\xi}{\omega} \right) \frac{\sin \omega_d \Delta t}{\omega_d} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2\xi}{\omega^3 \Delta t} + \frac{1}{\omega^2} \right) \cos \omega_d \Delta t \right] - \frac{2\xi}{\omega^3 \Delta t} \\ l_{12} &= -e^{-\zeta \omega \Delta t} \left[\left(\frac{2\xi^2 - 1}{\omega^2 \Delta t} \right) \frac{\sin \omega_d \Delta t}{\omega_d} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\xi}{\omega^3 \Delta t} \cos \omega_d \Delta t \right] - \frac{1}{\omega^2} + \frac{2\xi}{\omega^3 \Delta t} \\ l_{21} &= e^{-\zeta \omega \Delta t} \left[\left(\frac{2\xi^2 - 1}{\omega^2 \Delta t} + \frac{\xi}{\omega} \right) \left(\cos \omega_d \Delta t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d \Delta t \right) - \left(\frac{2\xi}{\omega^3 \Delta t} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\omega^2} \right) (\omega_d \sin \omega_d \Delta t + \xi \omega \cos \omega_d \Delta t) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\omega^2 \Delta t} \\ l_{22} &= -e^{-\zeta \omega \Delta t} \left[\frac{2\xi^2 - 1}{\omega^2 \Delta t} \left(\cos \omega_d \Delta t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d \Delta t \right) - \frac{2\xi}{\omega^3 \Delta t} (\omega_d \sin \omega_d \Delta t \right. \\ &\quad \left. \left. + \xi \omega \cos \omega_d \Delta t) \right] - \frac{1}{\omega^2 \Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$