



普通高等教育“十五”国家级规划教材

材料力学



第 4 版

刘鸿文 主编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

材 料 力 学 (Ⅱ)

第 4 版

刘鸿文 主编

高等教育出版社

内容提要

本教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材。是在获国家科技进步二等奖及国家级教学成果一等奖的第三版的基础上,在保持原书风格和特点的基础上,作了少部分的修订。

全书分I、II两册,共分18章。第I册包含了材料力学课程中的基本内容,内容包括:绪论,拉伸、压缩与剪切,扭转,弯曲内力,弯曲应力,弯曲变形,应力和应变分析,强度理论,组合变形,压杆稳定,动载荷,交变应力,平面图形的几何性质等。第II册包含了材料力学课程较深入的内容,内容包括:弯曲的几个补充问题,能量方法,超静定结构,平面曲杆,厚壁圆筒和旋转圆盘,矩阵位移法,杆件的塑性变形等。

本教材可作为高等学校工科本科各专业的教材。

刘鸿文主编的《材料力学实验》(第二版)可与本教材配套使用。

与本书同时出版的《材料力学学习指导书》,可供学生复习、解题及教师备课时使用。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学. II/刘鸿文主编. —4版. —北京:高等教育出版社,2004.1

ISBN 7-04-012760-1

I. 材... II. 刘... III. 材料力学-高等学校-教材 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 046751 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800 810 0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 北京中科印刷有限公司

开 本	787×960 1/16	版 次	1979年2月第1版 2004年1月第4版
印 张	13.5	印 次	2004年4月第3次印刷
字 数	250 000	定 价	16.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

作者简介



刘鸿文 浙江大学教授。长期从事固体力学教学工作。曾任教育部教材编审委员会委员,国家教委(教育部)工科力学课程教学指导委员会主任委员兼材料力学课程教学指导组组长。1989年被授予全国优秀教师。1991年起享受政府特殊津贴。杭州市第六届人大代表,浙江省第四届政协常委,全国政协第六、七、八届委员。

著作有:《材料力学》,《高等材料力学》,《板壳理论》,《材料力学教程》,《材料力学实验》,《简明材料力学》等。以上诸书先后分别在高等教育出版社、浙江大学出版社和机械工业出版社出版。《材料力学》第二版并于1990年由台湾高等教育出版社以繁体字再版。

《材料力学》第二版于1987年被评为全国高等学校优秀教材获国优奖。《材料力学》第三版于1997年获国家级教学成果一等奖,并获国家科技进步二等奖。

策 划	黄 毅
责任编辑	黄 毅
封面设计	于文燕
责任绘图	朱 静
版式设计	胡志萍
责任校对	王 超
责任印制	宋克学

第Ⅱ册 目 录

第十二章 弯曲的几个补充问题	1
§ 12.1 非对称弯曲	1
§ 12.2 开口薄壁杆件的切应力 弯曲中心	7
§ 12.3 用奇异函数求弯曲变形	12
§ 12.4 有限差分法	16
习题	20
第十三章 能量方法	28
§ 13.1 概述	28
§ 13.2 杆件应变能的计算	28
§ 13.3 应变能的普遍表达式	35
§ 13.4 互等定理	36
§ 13.5 卡氏定理	38
§ 13.6 虚功原理	44
§ 13.7 单位载荷法 莫尔积分	47
§ 13.8 计算莫尔积分的图乘法	56
习题	60
第十四章 超静定结构	71
§ 14.1 超静定结构概述	71
§ 14.2 用力法解超静定结构	74
§ 14.3 对称及反对称性质的利用	83
§ 14.4 连续梁及三弯矩方程	89
习题	94
第十五章 平面曲杆	101
§ 15.1 概述	101
§ 15.2 曲杆纯弯曲时的正应力	101
§ 15.3 中性层曲率半径的确定	106
§ 15.4 曲杆的强度计算	113
§ 15.5 曲杆的变形计算	114
习题	118
第十六章 厚壁圆筒和旋转圆盘	123
§ 16.1 概述	123
§ 16.2 厚壁圆筒	123

§ 16.3 组合厚壁圆筒	127
§ 16.4 等厚旋转圆盘	130
习题	133
第十七章 矩阵位移法	135
§ 17.1 概述	135
§ 17.2 轴向拉伸(压缩)杆件的刚度方程	136
§ 17.3 受扭杆件的刚度方程	140
§ 17.4 受弯杆件的刚度方程	143
§ 17.5 梁单元的中间载荷	150
§ 17.6 组合变形杆件的刚度方程	154
§ 17.7 受拉(压)杆件的坐标变换	159
§ 17.8 受弯杆件的坐标变换	166
习题	172
第十八章 杆件的塑性变形	177
§ 18.1 概述	177
§ 18.2 金属材料的塑性性质	177
§ 18.3 拉伸和压缩杆系的塑性分析	179
§ 18.4 圆轴的塑性扭转	181
§ 18.5 塑性弯曲和塑性铰	184
§ 18.6 梁的塑性分析	188
§ 18.7 残余应力的概念	191
§ 18.8 厚壁圆筒的塑性变形	193
习题	197
参考文献	201
习题答案	202

第十二章 弯曲的几个补充问题

§ 12.1 非对称弯曲

前面讨论的弯曲问题,要求梁有纵向对称面,且载荷都作用于这一对称面内,于是挠曲线也是这一对称面内的曲线。现在讨论梁无纵向对称面,或者虽有纵向对称面,但载荷并不在这个平面内的情况。

仍然从纯弯曲入手。设以梁的轴线为 x 轴,横截面内通过形心的两根任意轴为 y 和 z 轴(图 12.1)。显然, y 和 z 并不一定是形心主惯性轴。可以认为两端的纯弯曲力偶矩在 xy 平面内,并将其记为 M_z 。这并不影响问题的普遍性,因为作用于两端的弯曲力偶矩,总可分解成分别在 xy 和 xz 两个平面中的力偶矩 M_z 和 M_y ,这就可以先讨论 M_z 引起的应力,再讨论 M_y 的影响,然后将两者叠加。对当前讨论的纯弯曲问题,仍采用 § 5.1 提出的两个假设,即(1) 平面假设,(2) 纵向纤维间无正应力。

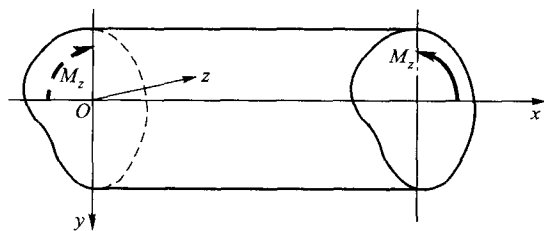


图 12.1

以相邻的两个横截面从梁中取出长为 dx 的微段,如图 12.2a 所示。图中画阴影线的曲面为中性层,它与横截面的交线为中性轴。根据平面假设,变形后两相邻横截面各自绕中性轴相对转动 $d\theta$ 角,并仍保持为平面。图 12.2b 表示垂直于中性轴的纵向平面,它与中性层的交线为 $O'O'$, ρ 为 $O'O'$ 的曲率半径。仿照 § 5.2 中导出应变 ϵ 的表达式的方法,可以求得距中性层为 η 的纤维的应变为

$$\epsilon = \frac{(\rho + \eta)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{\eta}{\rho} \quad (a)$$

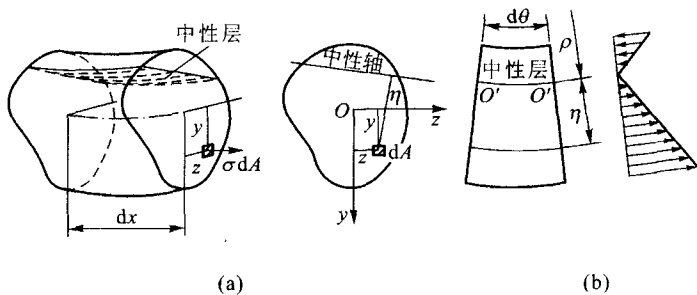


图 12.2

所以,纵向纤维的应变 ϵ 与它到中性层的距离 η 成正比。当然,中性层的位置,亦即中性轴在截面上的位置,尚待确定。(a)式即为变形几何关系。

根据纵向纤维间无正应力的假设,各纵向纤维皆为单向拉伸或压缩。若应力低于比例极限,按胡克定律,

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{\eta}{\rho} \quad (b)$$

此即物理关系。它表明,横截面上一点的正应力与该点到中性轴的距离 η 成正比(图 12.2b)。

现在列出静力关系。横截面上只有由微内力 σdA 组成的内力系,它是垂直于横截面的空间平行力系,与它相应的内力分量是轴力 F_N 、弯矩 M_x 和 M_y ,分别表示为

$$F_N = \int_A \sigma dA, \quad M_y = \int_A z \sigma dA, \quad M_x = \int_A y \sigma dA$$

横截面左侧的外力,只有 xy 平面中的弯曲力偶矩,且也把它记为 M_x 。此外就别无其他外力。因此,截面左侧梁段的平衡方程是

$$F_N = \int_A \sigma dA = 0 \quad (c)$$

$$M_y = \int_A z \sigma dA = 0 \quad (d)$$

$$M_x = \int_A y \sigma dA \quad (e)$$

以(b)式代入(c)式,得

$$\int_A \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A \eta dA = 0$$

因 $\frac{E}{\rho} \neq 0$, 故有 $\int_A \eta dA = 0$, 这里 η 是 dA 到中性轴的距离。这表明横截面 A 对

中性轴的静矩等于零,中性轴必然通过截面形心。于是把图 12.2 中的中性轴改画成图 12.3 所表示的位置。这样,连接各截面形心的轴线就在中性层内,长度不变。在横截面上,以 θ 表示由 y 轴到中性轴的角度,且以反时针方向为正。 dA 到中性轴的距离 η 就可表为

$$\eta = y \sin \theta - z \cos \theta$$

代入(b)式,得

$$\sigma = \frac{E}{\rho} (y \sin \theta - z \cos \theta) \quad (f)$$

把(f)式代入平衡方程(d),得

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{E}{\rho} \left(\sin \theta \int_A yz \, dA - \cos \theta \int_A z^2 \, dA \right) \\ &= \frac{E}{\rho} (I_{yz} \sin \theta - I_y \cos \theta) = 0 \end{aligned}$$

由此求得

$$\tan \theta = \frac{I_y}{I_{yz}} \quad (12.1)$$

中性轴通过截面形心, y 轴与它的夹角 θ 又可用上式确定,所以中性轴的位置就完全确定了。

把(f)式代入平衡方程(e),得

$$M_z = \frac{E}{\rho} \left(\sin \theta \int_A y^2 \, dA - \cos \theta \int_A yz \, dA \right) = \frac{E}{\rho} (I_z \sin \theta - I_{yz} \cos \theta) \quad (g)$$

从(f)式和(g)式中消去 $\frac{E}{\rho}$,得

$$\sigma = \frac{M_z (y \sin \theta - z \cos \theta)}{I_z \sin \theta - I_{yz} \cos \theta}$$

以 $\cos \theta$ 除上式右边的分子和分母,并利用(12.1)式消去 $\tan \theta$,整理后得

$$\sigma = \frac{M_z (I_{yz} y - I_{yz} z)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (12.2)$$

这是只在 xy 平面内作用纯弯曲力偶矩 M_z ,且 xy 平面并非形心主惯性平面时,弯曲正应力的计算公式。这时,弯曲变形(挠度)发生于垂直于中性轴的纵向平面内,它与 M_z 的作用平面 xy 并不重合。

若只在 xz 平面内作用纯弯曲力偶矩 M_y ,则可用导出公式(12.2)的同样方法,求得相应的正应力计算公式为

$$\sigma = \frac{M_y (I_z z - I_{yz} y)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (12.3)$$

最普遍的情况是在包含杆件轴线的任意纵向平面内,作用一对纯弯曲力偶

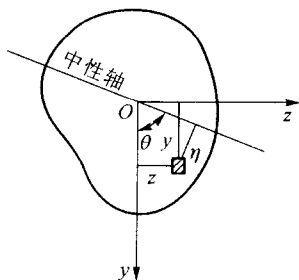


图 12.3

矩。这时,可把这一力偶矩分解成作用于 xy 和 xz 两坐标平面内的 M_z 和 M_y , 于是叠加(12.2)和(12.3)两式,得相应的弯曲正应力为

$$\sigma = \frac{M_z(I_{yz} - I_{yz})}{I_y I_z - I_{yz}^2} + \frac{M_y(I_z - I_{yz}^2)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (12.4)$$

现在确定中性轴的位置。若以 y_0, z_0 表示中性轴上任一点的坐标,则因中性轴上各点的正应力等于零,如以 y_0, z_0 代入公式(12.4),应有

$$\sigma = \frac{M_z(I_{yz}y_0 - I_{yz}z_0)}{I_y I_z - I_{yz}^2} + \frac{M_y(I_z z_0 - I_{yz}y_0)}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 0$$

或者写成

$$(M_z I_y - M_y I_{yz})y_0 + (M_y I_z - M_z I_{yz})z_0 = 0 \quad (h)$$

这是中性轴的方程式,表明中性轴是通过原点(截面形心)的一条直线。如以 θ 表示由 y 轴到中性轴的夹角,且以反时针方向为正,则由(h)式得

$$\tan \theta = \frac{z_0}{y_0} = -\frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{M_y I_z - M_z I_{yz}} \quad (12.5)$$

下面我们讨论两种特殊情况。

(1) 若只在 xy 平面内作用纯弯曲力偶矩 M_z , 且 xy 平面为形心主惯性平面,即 y, z 轴为截面的形心主惯性轴,则因 $M_y = 0, I_{yz} = 0$, 故公式(12.4)或(12.2)化为

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} \quad (12.6)$$

而且,由(12.1)式或(12.5)式都可得出 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 故中性轴与 z 轴重合。垂直于中性轴的 xy 平面,既是梁的挠曲线所在的平面,又是弯曲力偶矩 M_z 的作用平面,这种情况称为平面弯曲。显然,以前讨论的对称弯曲,载荷与弯曲变形都在纵向对称面内,就属于平面弯曲。还应指出,对实体杆件,若弯曲力偶矩 M_z 的作用平面平行于形心主惯性平面,而不是与它重合,则因这并不会改变上面的推导过程,故所得结果仍然是适用的。这时, M_z 的作用平面与挠曲线所在的平面是相互平行的。

(2) 若 M_z 和 M_y 同时存在,但它们的作用平面 xy 和 xz 皆为形心主惯性平面,即 y, z 为截面的形心主惯性轴,则因 $I_{yz} = 0$, 公式(12.4)和(12.5)化为

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (12.7)$$

$$\tan \theta = -\frac{M_z I_y}{M_y I_z} \quad (12.8)$$

问题化为在两个形心主惯性平面内的弯曲的叠加。

以上讨论的是非对称的纯弯曲。非对称的横力弯曲往往同时出现扭转变形 (§ 12.2)。对实体杆件,在通过截面形心的横力作用下,可以省略上述扭转变形,把载荷分解成作用于 xy 和 xz 两个平面内的横向力,并用以计算弯矩 M_x 和 M_y ,然后便可将纯弯曲的正应力计算公式用于横力弯曲的正应力计算。

例 12.1 跨度中点受集中力 F 作用的简支梁如图 12.4 所示。梁截面为 Z 形,它的一些几何量已于第 I 册附录 I 的例题 I.9 中求出。若 $F = 6 \text{ kN}$, $l = 4 \text{ m}$,试求弯曲正应力。

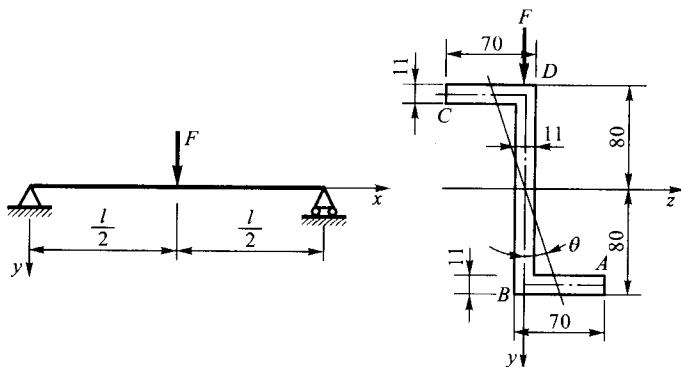


图 12.4

解: 截面形心就是它的几何对称中心。为计算方便,选定 y, z 轴如图所示。截面的几何量已于例 I.9 中求出,但因坐标选择不同,结果应改为

$$I_y = 1.98 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \quad I_z = 10.97 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \quad I_{yz} = 3.88 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

按所选坐标系,外力都在 xy 平面内。跨度中点的最大弯矩为

$$M_z = \frac{Fl}{4} = \frac{1}{4} \times 6 \text{ kN} \times 4 \text{ m} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

由公式(12.1)求得由 y 到中性轴的角度 θ 为

$$\tan \theta = \frac{I_y}{I_{yz}} = 0.586, \quad \theta = 30.36^\circ$$

在跨度中点截面上, A, B, C, D 四点离中性轴最远,应力最大。以 A, B 两点的坐标分别代入(12.2)式,求出

$$\sigma_A = \frac{6 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} [(1.98 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(69 \times 10^{-3} \text{ m}) - (3.88 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(64.5 \times 10^{-3} \text{ m})]}{(10.97 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(1.98 \times 10^{-6} \text{ m}^4) - (3.88 \times 10^{-6} \text{ m}^4)^2}$$

$$= -47.4 \times 10^6 \text{ Pa} = -47.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{6 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} [(1.98 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(80 \times 10^{-3} \text{ m}) - (3.88 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(-5.5 \times 10^{-3} \text{ m})]}{(10.97 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(1.98 \times 10^{-6} \text{ m}^4) - (3.88 \times 10^{-6} \text{ m}^4)^2}$$

$$= 103 \times 10^6 \text{ Pa} = 103 \text{ MPa}$$

这里, σ_A 是压应力, σ_B 是拉应力。C 点和 D 点的应力分别等于 σ_A 和 σ_B , 但符号相反。

这一例题的第二种解法是, 先确定横截面的形心主惯性轴, 然后把 F 分解成在两个形心主惯性平面中的两个分量, 使问题变成两个形心主惯性平面中的弯曲的叠加。这就可以使用公式(12.7)和(12.8)进行计算。详细过程, 建议由读者去完成。

例 12.2 横截面为矩形的悬臂梁如图 12.5 所示。若作用于自由端的集中力 F 与 y 轴的夹角为 φ , 试讨论梁的应力与变形。

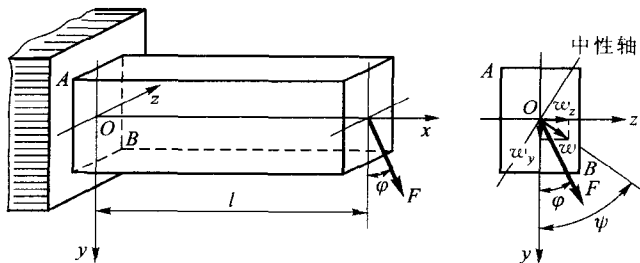


图 12.5

解: 在选定的坐标系中, y, z 轴为截面的形心主惯性轴。将 F 分解成沿 y 和 z 的分量:

$$F_y = F \cos \varphi, \quad F_z = F \sin \varphi$$

问题转化为在 xy 和 xz 两个形心主惯性平面内弯曲的叠加。在固定端, M_z 和 M_y 的值为

$$M_z = -Fl \cos \varphi, \quad M_y = -Fl \sin \varphi$$

这里, 弯矩 M_y 的符号可规定为, 在坐标 z 为正的点上引起拉应力的 M_y 为正。由公式(12.8)求得 y 轴与中性轴的夹角为

$$\tan \theta = -\frac{M_z I_y}{M_y I_z} = -\frac{I_y}{I_z} \cot \varphi \quad (i)$$

离中性轴最远的点为 A 和 B, 两点的应力相等, 且 σ_A 为拉应力, σ_B 为压应力。由公式(12.7)得

$$\sigma_B = -Fl \left(\frac{y_{\max} \cos \varphi}{I_z} + \frac{z_{\max} \sin \varphi}{I_y} \right)$$

利用第 I 册表 6.1, 求出自由端的形心因 F_y 引起的垂直位移为

$$w_y = \frac{F_y l^3}{3EI_z} = \frac{Fl^3 \cos \varphi}{3EI_z}$$

w_y 沿 y 轴的正向。同理, F_z 引起的水平位移为

$$w_z = \frac{Fl^3 \sin \varphi}{3EI_y}$$

w_z 沿 z 轴的正向。最后得自由端的位移(挠度)及其方向为

$$w = \sqrt{w_y^2 + w_z^2} = \frac{Fl^3}{3E} \sqrt{\left(\frac{\cos \varphi}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi}{I_y}\right)^2}$$

$$\tan \psi = \frac{w_z}{w_y} = \frac{I_z}{I_y} \tan \varphi \quad (j)$$

一般情况下, $I_z \neq I_y$, 故 $\psi \neq \varphi$ 。这就再次说明, 挠度所在的平面与外力作用平面不重合。所以有时把这种情况称为斜弯曲。对圆形或正方形等截面, $I_y = I_z$, 于是有 $\psi = \varphi$, 表明梁的挠度与集中力 F 在同一平面内, 这属于平面弯曲。(i), (j)

两式表明, $\tan \theta = -\frac{1}{\tan \psi}$, 所以中性轴与挠度 w 所在的平面是垂直的。

§ 12.2 开口薄壁杆件的切应力 弯曲中心

若杆件有纵向对称面, 且横向力作用于对称面内, 则杆件只可能在纵向对称面内发生弯曲, 不会有扭转变形。若横向力作用平面不是纵向对称面, 即使是形心主惯性平面, 如图 12.6a 所示情况, 杆件除弯曲变形外, 还将发生扭转变形。只有当横向力通过截面内的某一特定点 A 时, 杆件才只有弯曲而无扭转变形(图 12.6b)。横截面内的这一特定点 A 称为弯曲中心或剪切中心, 简称弯心。

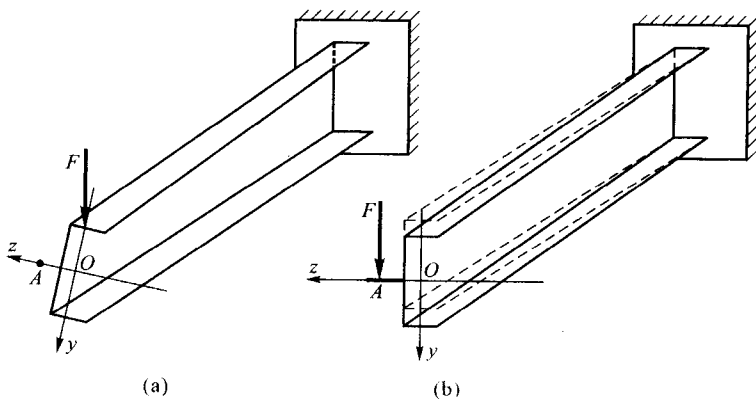


图 12.6

开口薄壁杆件的弯曲中心有较大的实际意义,而且它的位置用材料力学的方法就可确定。为此,首先讨论开口薄壁杆件弯曲切应力计算。

图 12.7a 所示为一在横向力 F 作用下的开口薄壁杆件。集中力 F 通过截面弯曲中心,杆件只有弯曲而无扭转,即横截面上只有弯曲正应力和弯曲切应力,而无扭转切应力。由于杆件的内侧表面和外侧表面都是自由面,仿照第 I 册 § 3.7 的证明,可知截面边缘上的切应力应与截面的边界相切。又因杆件壁厚 δ 很小,故可认为沿壁厚切应力均匀分布。使用导出弯曲切应力计算公式的同样方法 (§ 5.4),以相邻的横截面和纵向面,从杆件中截出一部分 $abcd$ (图 12.7b)。在这一部分的左侧面 ab 和右侧面 cd 上有弯曲正应力,在纵向面 bc 上有切应力,这些应力都平行于 x 轴。左侧面 ab 上的合力 F_{N1} 应为

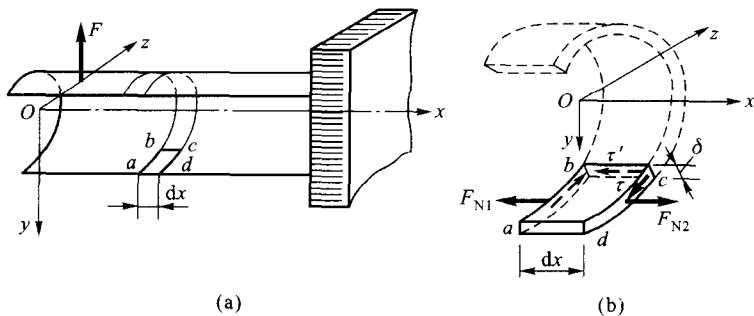


图 12.7

$$F_{N1} = \int_{A_1} \sigma dA \quad (a)$$

式中 A_1 为截出部分侧面 ab 的面积, σ 为弯曲正应力。根据 § 12.1 的讨论,弯曲正应力 σ 因坐标选择和载荷作用平面的不同,应按不同的公式计算。为了简化推导过程,设 y, z 轴为截面的形心主惯性轴, F 通过弯心且平行于 y 轴,即 F 的作用平面平行于形心主惯性平面 xy 。这时,弯曲正应力按公式(12.6)计算, z 轴为中性轴。以公式(12.6)代入(a)式,得

$$F_{N1} = \frac{M_z}{I_z} \int_{A_1} y dA = \frac{M_z S_z^*}{I_z} \quad (b)$$

式中 S_z^* 是侧面 ab 对 z 轴的静矩。在侧面 cd 上相应的内力是

$$F_{N2} = \frac{(M_z + dM_z)}{I_z} \int_{A_1} y dA = \frac{(M_z + dM_z) S_z^*}{I_z} \quad (c)$$

纵向面 bc 上的内力是 $\tau' \delta dx$ 。把以上诸内力代入平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N2} - F_{N1} - \tau' \delta dx = 0 \quad (d)$$

经整理后得出

$$\tau' = \frac{dM_z}{dx} \frac{S_z^*}{I_z \delta} = \frac{F_{Sy} S_z^*}{I_z \delta}$$

式中 F_{Sy} 是横截面上平行于 y 轴的剪力。 τ' 是截出部分纵向面 bc 上的切应力, 由切应力互等定理, 它也就是外法线方向与 x 轴一致的横截面上 c 点的切应力 τ , 即

$$\tau = \frac{F_{Sy} S_z^*}{I_z \delta} \quad (12.9)$$

上式是由截出部分的平衡导出的。在 F_{Sy} 和 S_z^* 皆为正值的情况下, τ 也是正的。这时, 在图 12.7b 中, 外法线与 x 轴一致的横截面上, c 点切应力 τ 指向截出部分的侧面 cd 的内部, 亦即指向截出面积 A_1 的内部。至此, 已经求得了 F 平行于 y 轴时, 切应力的计算公式。

在横截面上, 微内力 τdA 组成切于横截面的内力系, 其合力就是剪力 F_{Sy} 。当然, F_{Sy} 又可由截面左侧(或右侧)的外力来计算。为了确定 F_{Sy} 作用线的位置, 可选定截面内任意点 B 为力矩中心(图 12.8)。根据合力矩定理, 微内力 τdA 对 B 点的力矩总和, 应等于合力 F_{Sy} 对 B 点的力矩, 即

$$F_{Sy} a_z = \int_A r \tau dA \quad (e)$$

式中 a_z 是 F_{Sy} 对 B 点的力臂, r 是微内力 τdA 对 B 点的力臂。从上式中解出 a_z , 就确定了 F_{Sy} 作用线的位置。

剪力 F_{Sy} 应该通过截面的弯曲中心 A 。这样, 剪力 F_{Sy} 和截面左侧(或右侧)的外力, 同在通过弯曲中心且平行于 xy 平面的纵向平面内, 于是, 截面上的剪力 F_{Sy} 和弯矩 M_z 与截面一侧的外力相平衡, 杆件不会有扭转变形。若外力不通过弯曲中心, 把它向弯曲中心简化后, 得到通过弯曲中心的力和一个扭转力偶矩。通过弯曲中心的力仍引起上述弯曲变形, 而扭转力偶矩却将引起扭转变形, 这就是图 12.6a 所表示的情况。

当外力通过弯曲中心, 且平行于截面的形心主惯性轴 z 时, 用导出公式 (12.9) 的同样方法, 可以导出弯曲切应力的计算公式为

$$\tau = \frac{dM_y}{dx} \frac{S_y^*}{I_y \delta} = \frac{F_{Sz} S_y^*}{I_y \delta} \quad (12.10)$$

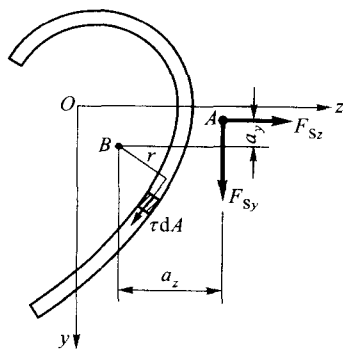


图 12.8

式中 S_y^* 是截面截出部分对 y 轴的静矩, F_{S_z} 为截面上的剪力。和导出(e)式一样,利用合力矩定理,得确定 F_{S_z} 作用线位置的方程式为

$$F_{S_z} a_y = \int_A r \tau dA \quad (f)$$

式中 a_y 是 F_{S_z} 对 B 点的力臂(图 12.8)。由上式解出 a_y 就确定了 F_{S_z} 的位置。因为 F_{S_z} 和 F_{S_y} 都通过弯曲中心,两者的交点就是弯曲中心 A 。

开口薄壁杆件的抗扭刚度较小,如横向力不通过弯曲中心,将引起比较严重的扭转变形,不但要产生扭转切应力,有时还将因约束扭转而引起附加的正应力和切应力^①。实体杆件或闭口薄壁杆件的抗扭刚度较大,且弯曲中心通常在截面形心附近,因而当横向力通过截面形心时,如也向弯曲中心简化,则扭矩不大,所以扭转变形可以省略。这就成为前面一节中讨论的非对称横力弯曲。

例 12.3 求图 12.9 中槽形截面的弯曲中心。

解: 以截面的对称轴为 z 轴,则 y, z 轴为形心主惯性轴。当剪力 F_{S_y} 平行于 y 轴,且杆件并无扭转变形时,弯曲切应力应按公式(12.9)计算。下翼缘上的部分面积 A_1 对 z 轴的静矩为

$$S_z^* = \frac{\xi \delta h}{2}$$

代入(12.9)式,得下翼缘上距边缘为 ξ 处的切应力为

$$\tau = \frac{F_{S_y} \xi h}{2 I_z}$$

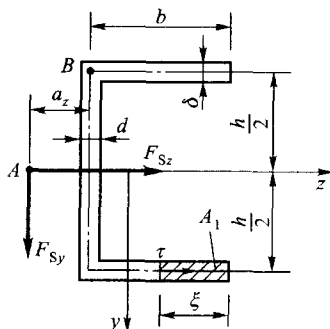


图 12.9

τ 为正,表示它指向截出面积 A_1 的内部,如图 12.9 所示。用相似的方法也可求出上翼缘和腹板上的切应力。为了确定 F_{S_y} 的位置,选定上翼缘中线和腹板中线的交点 B 作为力矩中心。因为腹板和上翼缘上的微内力 τdA 都通过 B 点,这些内力对 B 点的力矩等于零。结果,整个截面上微内力 τdA 对 B 点力矩的总和为

$$\int_A r \tau dA = \int_0^b h \cdot \frac{F_{S_y} \xi h}{2 I_z} \delta d\xi = \frac{F_{S_y} h^2 b^2 \delta}{4 I_z}$$

由 τdA 组成的内力系的合力就是 F_{S_y} , F_{S_y} 对 B 点的力矩为 $F_{S_y} a_z$ 。根据合力矩定理,亦即(e)式,得

^① 参看刘鸿文主编,《高等材料力学》,第十章,高等教育出版社,1985。