高等学校数学
公共课辅导系列

ShuXue FuDao XiLie

线性代数解题指导

概念、方法与技巧

王中良 编

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

北京大学出版社

高等学校数学公共课辅导系列

线性代数解题指导

——概念、方法与技巧

王中良　编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题指导：概念、方法与技巧/王中良编. —北京：北京大学出版社，2004. 9

(高等学校数学公共课辅导系列)

ISBN 7-301-07790-4

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 线性代数-高等学校-解题

Ⅳ. O151. 2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 087931 号

书　　　名：线性代数解题指导——概念、方法与技巧

著作责任者：王中良　编

责 任 编 辑：刘　勇

标 准 书 号：ISBN 7-301-07790-4/O・0608

出 版 发 行：北京大学出版社

地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　　址：http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱：zpup@pup.pku.edu.cn

电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021

排　版　者：北京高新特打字服务社 51736661

印　刷　者：北京大学印刷厂

经　销　者：新华书店

890mm×1240mm　A5　9.875 印张　280 千字

2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷

印　　　数：0001—5100 册

定　　　价：16.50 元

内 容 简 介

本书是高等院校工科、经济管理和财经类各专业本科生数学公共基础课“线性代数”的学习辅导书.全书共分六章,内容包括行列式、矩阵、线性方程组和向量、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型等.每章按照内容提要,基本要求与重点、难点分析,典型例题解析,练习题四部分编写,与国内统编教材相辅相成、同步使用.书末有两个附录,附录一为2004年硕士学位研究生入学考试线性代数试题;附录二为每章练习题答案、提示与解答,也包括2004年考研试题的解答.

本书是按照原国家教委制定的工科类“线性代数课程教学基本要求”,并参照全国硕士研究生入学统一考试“数学考试大纲”,结合编者多年从事线性代数课程教学与辅导的经验和体会而编写的.本书重点是“典型例题解析”这一部分,选编例题约300道,按题型分为填空题、选择题、解答题和证明题等类型.用“讲思路、举例题”与“举例题、讲方法”的思维方法,帮助读者正确理解线性代数的基本概念和基本理论,掌握解题的常用方法与技巧,特别是许多例题给出一题多解,通过解题更能开阔思路,提高分析和解决问题的能力,达到融会贯通、举一反三的效果.

本书既可作为高校各相关专业本科生学习“线性代数”的辅导教材,也可作为任课教师的教学参考书,对于准备报考硕士研究生的读者,本书也是复习备考时的良师益友.

前　言

"线性代数"是高等院校工科、经济管理和财经类各专业的一门重要公共必修课程.随着科学技术飞速发展和计算机的广泛应用,线性代数所涉及的处理问题的思想、方法和技巧已被广泛应用到科技的各个领域,成为各类科技人员必备的数学基础之一.

线性代数具有较强的抽象性与逻辑性,概念多、符号多、运算法则多,内容纵横交错,前后联系紧密,环环相扣,相互渗透,有一套独特的理论体系和处理问题的规律和方法.初学者往往感到学习比较困难,不易抓住重点,不易理解其抽象的概念和理论.课上似乎已经听懂,但做题却有些困难,尤其对推理方面的问题有时感到无从入手.针对初学者学习线性代数中出现的这些问题和困难,编者根据多年从事线性代数课程教学与辅导的经验和体会,认真研究了由原国家教委制定的工科类"线性代数课程教学基本要求"和全国硕士研究生入学统一考试"数学考试大纲"的精神,编写了本辅导书,旨在帮助读者很好地掌握线性代数的基本内容,正确理解基本概念,掌握解题的基本方法与技巧,培养和提高分析问题、解决问题的能力.

全书共分六章,每章均由以下四部分组成:

一、内容提要　对本章的基本概念、基本理论和基本方法作简要归纳,揭示本章内容和前后章内容的联系,对某些重要的理论进行综合归纳讲解,以帮助读者较快地、正确地把握住本章的核心内容.

二、基本要求与重点难点分析　指出对本章各部分内容应达到的认知程度,特别指出本章的重点和难点,对重点内容侧重

分析讲解，揭示其本质以及与其他概念的联系. 对难点则侧重指出克服难点的方法，以帮助读者站在一个更高层次上理解线性代数的理论和方法.

三、典型例题解析 本书例题选题广泛、典型，在题型上既有填空题、选择题，也有计算题、证明题和综合题，还包含了近年来大部分的考研试题. 这些例题(约 300 道)以本章内容为准，按照题型归类，用“讲思路、举例题”与“举例题、讲方法”的思维方式，揭示具有共性题目的特征和解题思路；着重分析题目条件和结论之间的逻辑关系；注意讲述解题技巧，归纳解题方法；有些题一题多解，开拓思路，通过解题可加深对基本概念和基本理论的理解和联系. 另外，通过对某些例题的注释，帮助读者更好地把握住典型例题的典型处理方法和可能的各种延伸，达到举一反三、触类旁通的效果.

希望读者在阅读这些例题时，要边看、边思索、边推导，自己先做一做. 有些例题步骤写得简略，也希望读者把它补充完整. 读后要注意总结这个例题包含了哪些知识点，用到了哪些基本理论和方法，这样才能提高得更快.

四、练习题 本书收集了约 120 余道练习题. 读者可以从中有选择地挑选一部分作为练习，并要求独立完成，以检验自己对所学内容和方法的掌握程度.

书末附录一为 2004 年硕士学位研究生入学考试线性代数试题，有助于准备报考研究生的读者熟悉题型，了解考研试题的大致难易程度，以备应考；附录二为每章练习题答案、提示与解答，其中也包括 2004 年研究生入学考试线性代数试题的解答. 有些题的答案不是惟一的，解题方法也不只一种，也不一定最好，望读者经过思索，能有新的解题方法和捷径.

本书在编写过程中，参阅了不少同类书籍(书末附有参考书目录)，受到不少启发和教益，在此谨向有关作者致以诚挚的谢意. 另外还要感谢刘书田老师和北京大学出版社责任编辑刘勇老

师,对本书出版所给予的支持和帮助.

限于编者水平,本书难免有错误和不妥之处,恳请读者和使用本书的教师提出宝贵意见,以便今后改进.

编　者

2004年5月于北京

目　　录

第一章　行　列　式

§1.1　内 容 提 要

1.1.1　排列及其奇偶性

由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数字组成的一个有序数组，称为一个 n 元排列. 一般地记作 $j_1j_2\cdots j_n$. 由于是全排列，故 n 元排列共有 $n!$ 个.

在一个排列中，如果有一个大的数排在一个小的数的前面，则称这两个数构成该排列的一个**逆序**. 排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**. 排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**. 在全部 $n!$ 个 n 元排列中，奇排列与偶排列各占一半.

1.1.2　n 阶行列式

一、基本概念

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

简记为 $D_n=|a_{ij}|$. 数 a_{ij}为行列式 D_n 中的元素，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和，故行列式 D_n 的展开式中共有 $n!$ 项.

由定义可知，n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$是一个数值. 特别，

1 阶行列式：

$$|a_{11}| = a_{11};$$

2 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

二、几个特殊的行列式

(1) 上(下)三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(3) n 阶范德蒙(Vandermonde)行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j).$$

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|, \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

1.1.3 行列式的性质和展开定理

一、行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等.

(2) 若互换行列式的某两行(或某两列),行列式的值变号.

(3) 如果用数 k 乘行列式的某一行(或某一列),等于用数 k 乘

行列式. 换句话说,行列式某一行(或某一列)的公因子可以提到行列式外.

(4) 如果行列式的某一行(或某一列)的每个元素均表为两个数的和,则该行列式等于两个行列式的和.

(5) 将行列式某行(或某列)的 k 倍加到另一行(或另一列)上,行列式的值不变.

由上述性质,可以得到下述三个使行列式为零的充分条件:

(1) 若行列式中有一行(或一列)元素全为零,则行列式等于零.

(2) 若行列式中有两行(或两列)元素相同,则行列式等于零.

(3) 若行列式中有两行(或两列)元素对应成比例,则行列式等于零.

二、行列式按一行(或一列)的展开定理

设 $D=|a_{ij}|$ 为任意一个 n 阶行列式,则

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n), \end{aligned}$$

其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

展开定理的推论:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (i \neq k),$$

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0 \quad (j \neq k).$$

三、拉普拉斯(Laplace)展开定理

设 $D=|a_{ij}|$ 为任意一个 n 阶行列式,在 D 中任意取定 k 行($1\leqslant k\leqslant n$),由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式 M_i ($i=1,2,\cdots,t$)与它们的代数余子式 B_i ($i=1,2,\cdots,t$)的乘积之和等于 D,即

$$D = M_1B_1 + M_2B_2 + \cdots + M_tB_t \quad (t = C_n^k).$$

1.1.4 克莱姆(Cramer)法则

(1) 如果含有 n 个方程的 n 元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数行列式 $D=|a_{ij}|\neq 0$，则方程组(1)有惟一解，且

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad (j=1,2,\cdots,n),$$

其中 D_j 是将系数行列式 D 的第 j 列换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 后得到的行列式.

(2) 如果含有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{2}$$

的系数行列式 $D=|a_{ij}|\neq 0$，则方程组(2)仅有零解.

换句话说，如果方程组(2)有非零解，则其系数行列式 $D=0$.

§1.2 基本要求与重点、难点分析

1.2.1 基本要求

(1) 了解行列式的概念.

(2) 掌握行列式的性质，会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

(3) 掌握克莱姆法则.

1.2.2 重点、难点分析

n 阶行列式的定义是本章的一个难点，掌握行列式的基本计算方法是本章的重点，而元素中含有字母的行列式的计算也是一个难点.

(1) n 阶行列式的本质是对 n^2 个数按一定规则进行运算，其结果为一个数. 这个运算规则的特点是：

① D_n 等于它的所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积的代数和. 这里的“所有”是指对所有 n 元排列求和，因而 D_n 的展开式中共有 $n!$ 个乘积项.

② 每个乘积项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前面所带符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，即当行标排列为自然序排列时，若列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列，该乘积项前面带正号，否则带负号.

由克莱姆法则告知，方程组的系数行列式是否为零，决定了方程组的解的不同情形. 这是因为行列式的值是否为零取决于行列式中行与行之间（或列与列之间）两种不同的情况，即后面所要讨论到的线性相关及线性无关. 所以行列式的概念与计算是今后讨论矩阵、线性方程组及 n 维向量的基础之一.

（2）行列式的性质及展开定理是计算行列式的基础，要求读者对行列式性质及展开法则一定要熟记，并弄清其含意及功能. 行列式的具体计算方法常常因题而异，读者也应注意分析所计算行列式的特点，灵活选用计算方法.

（3）克莱姆法则是线性方程组理论中一个重要结论，它的意义在于给出了方程组的解与系数及常数项之间的关系，但克莱姆法则仅适用于方程个数与未知量个数相等的方程组，且系数行列式不为零. 因而克莱姆法则主要用于理论问题及简单方程组的求解，求解线性方程组的一般方法还是消元法.

§1.3 典型例题解析

1.3.1 求排列的逆序数

设有 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$，若在数字 1 之前有 k_1 个数，记下 k_1，然后划掉 1；再看数字 2，若在数字 2 之前有 k_2 个数，记下 k_2，然后划掉 2；再看数字 3，若在数字 3 之前有 k_3 个数，记下 k_3，然后划掉 3；……，依次类推，设在数字 $n-1$ 之前有 k_{n-1} 个数，记下 k_{n-1}. 那么

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n) = k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}.$$

例 1.1 求下列排列的逆序数，并指出它们的奇偶性：

（1）3 5 4 6 1 2；　　（2）7 5 6 3 4 2 1；

（3）3 4 5 $\cdots$ n 2 1；　　（4）$(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n$.

解 （1）在 1 之前有 4 个数，划去 1；在 2 之前有 4 个数，划去 2；

在 3 之前有 0 个数，划去 3；在 4 之前有 1 个数，后面不存在逆序. 则

$$\tau(3\ 5\ 4\ 6\ 1\ 2)=4+4+1=9,$$

为奇排列.

(2) $\tau(7\ 5\ 6\ 3\ 4\ 2\ 1)=6+5+3+3+1+1=19$，为奇排列.

(3) $\tau(3\ 4\ 5\ \cdots\ n\ 2\ 1)=(n-1)+(n-2)=2n-3$，为奇排列.

(4) $$\tau((n-1)(n-2)\cdots\ 2\ 1\ n)=(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1=\frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

当 $n=4m$ 时，为奇排列；当 $n=4m+1$ 时，为偶排列；当 $n=4m+2$ 时，为偶排列；当 $n=4m+3$ 时，为奇排列.

例 1.2 设排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n$ 的逆序数为 k，问 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的逆序数是多少？

解 若排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n$ 中关于 j_1 有 m_1 个逆序，则有 $(n-1)-m_1$ 个顺序，即在排列 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 中关于 j_1 有 $(n-1)-m_1$ 个逆序；若关于 j_2 有 m_2 个逆序，则有 $(n-2)-m_2$ 个顺序；……，依次类推，关于 j_n 有 m_n 个逆序，则有 $(n-n)-m_n$ 个顺序，而 $m_1+m_2+\cdots+m_n=k$，故 $j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}
&\tau(j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1)\\
&\quad=[(n-n)-m_n]+\cdots+[(n-2)-m_2]\\
&\qquad+[(n-1)-m_1]\\
&\quad=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0-k\\
&\quad=\frac{1}{2}n(n-1)-k.
\end{aligned}$$

例 1.3 求 i,j 使

(1) $2\ i\ 6\ 8\ j\ 4\ 3\ 1$ 是奇排列；

(2) $1\ 6\ 2\ i\ 5\ 4\ j\ 8$ 是偶排列.

解 (1) 由 $2\ i\ 6\ 8\ j\ 4\ 3\ 1$ 是 8 元排列，故 i,j 只能各是数字 5 和数字 7 中的一个. 若 $i=5$，$j=7$，由于 $\tau(2\ 5\ 6\ 8\ 7\ 4\ 3\ 1)=17$，则是奇排列.

(2) 由 $1\ 6\ 2\ i\ 5\ 4\ j\ 8$ 是 8 元排列，故 i,j 只能各是数字 3 和数字 7 中的一个. 若 $i=3$，$j=7$，由 $\tau(1\ 6\ 2\ 3\ 5\ 4\ 7\ 8)=5$，$1\ 6\ 2\ 3\ 5\ 4\ 7\ 8$ 是奇排列. 所以 $i=7$，$j=3$ 时，才为偶排列.