

高等学校数学  
公共课辅导系列

S huXue Fu Dao Xi Lie

# 线性代数解题指导

概念、方法与技巧

王中良 编

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

北京大学出版社

高等学校数学公共课辅导系  
线性代数解题指导  
——概念、方法与技巧

王中良 编



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

## 图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题指导:概念、方法与技巧/王中良编. —北京:北京大学出版社, 2004. 9

(高等学校数学公共课辅导系列)

ISBN 7-301-07790-4

I . 线… II . 王… III . 线性代数-高等学校-解题  
IV . O151. 2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 087931 号

书 名: 线性代数解题指导——概念、方法与技巧

著作责任编辑: 王中良 编

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-07790-4/O · 0608

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn> 电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750572 理科编辑部 62752021

排 版 者: 北京高新特打字服务社 51736661

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

890mm×1240mm A5 9.875 印张 280 千字

2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月第 1 次印刷

印 数: 0001—5100 册

定 价: 16.50 元

---

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,翻版必究

## 内 容 简 介

本书是高等院校工科、经济管理和财经类各专业本科生数学公共基础课“线性代数”的学习辅导书。全书共分六章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组和向量、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型等。每章按照内容提要，基本要求与重点、难点分析，典型例题解析，练习题四部分编写，与国内统编教材相辅相成、同步使用。书末有两个附录，附录一为2004年硕士学位研究生入学考试线性代数试题；附录二为每章练习题答案、提示与解答，也包括2004年考研试题的解答。

本书是按照原国家教委制定的工科类“线性代数课程教学基本要求”，并参照全国硕士研究生入学统一考试“数学考试大纲”，结合编者多年从事线性代数课程教学与辅导的经验和体会而编写的。本书重点是“典型例题解析”这一部分，选编例题约300道，按题型分为填空题、选择题、解答题和证明题等类型。用“讲思路、举例题”与“举例题、讲方法”的思维方法，帮助读者正确理解线性代数的基本概念和基本理论，掌握解题的常用方法与技巧，特别是许多例题给出一题多解，通过解题更能开阔思路，提高分析和解决问题的能力，达到融会贯通、举一反三的效果。

本书既可作为高校各相关专业本科生学习“线性代数”的辅导教材，也可作为任课教师的教学参考书，对于准备报考硕士研究生的读者，本书也是复习备考时的良师益友。

## 前　　言

“线性代数”是高等院校工科、经济管理和财经类各专业的一门重要公共必修课程。随着科学技术飞速发展和计算机的广泛应用，线性代数所涉及的处理问题的思想、方法和技巧已被广泛应用到科技的各个领域，成为各类科技人员必备的数学基础之一。

线性代数具有较强的抽象性与逻辑性，概念多、符号多、运算法则多，内容纵横交错，前后联系紧密，环环相扣，相互渗透，有一套独特的理论体系和处理问题的规律和方法。初学者往往感到学习比较困难，不易抓住重点，不易理解其抽象的概念和理论。课上似乎已经听懂，但做题却有些困难，尤其对推理方面的问题有时感到无从入手。针对初学者学习线性代数中出现的这些问题和困难，编者根据多年从事线性代数课程教学与辅导的经验和体会，认真研究了由原国家教委制定的工科类“线性代数课程教学基本要求”和全国硕士研究生入学统一考试“数学考试大纲”的精神，编写了本辅导书，旨在帮助读者很好地掌握线性代数的基本内容，正确理解基本概念，掌握解题的基本方法与技巧，培养和提高分析问题、解决问题的能力。

全书共分六章，每章均由以下四部分组成：

**一、内容提要** 对本章的基本概念、基本理论和基本方法作简要归纳，揭示本章内容和前后章内容的联系，对某些重要的理论进行综合归纳讲解，以帮助读者较快地、正确地把握住本章的核心内容。

**二、基本要求与重点难点分析** 指出对本章各部分内容应达到的认知程度，特别指出本章的重点和难点，对重点内容侧重

分析讲解,揭示其本质以及与其他概念的联系.对难点则侧重指出克服难点的方法,以帮助读者站在一个更高层次上理解线性代数的理论和方法.

**三、典型例题解析** 本书例题选题广泛、典型,在题型上既有填空题、选择题,也有计算题、证明题和综合题,还包含了近年来大部分的考研试题.这些例题(约 300 道)以本章内容为准,按照题型归类,用“讲思路、举例题”与“举例题、讲方法”的思维方式,揭示具有共性题目的特征和解题思路;着重分析题目条件和结论之间的逻辑关系;注意讲述解题技巧,归纳解题方法;有些题一题多解,开拓思路,通过解题可加深对基本概念和基本理论的理解和联系.另外,通过对某些例题的注释,帮助读者更好地把握住典型例题的典型处理方法和可能的各种延伸,达到举一反三、触类旁通的效果.

希望读者在阅读这些例题时,要边看、边思索、边推导,自己先做一做.有些例题步骤写得简略,也希望读者把它补充完整.读后感要注意总结这个例题包含了哪些知识点,用到了哪些基本理论和方法,这样才能提高得更快.

**四、练习题** 本书收集了约 120 余道练习题.读者可以从中选择地挑选一部分作为练习,并要求独立完成,以检验自己对所学内容和方法的掌握程度.

书末附录一为 2004 年硕士学位研究生入学考试线性代数试题,有助于准备报考研究生的读者熟悉题型,了解考研试题的大致难易程度,以备应考;附录二为每章练习题答案、提示与解答,其中包括 2004 年研究生入学考试线性代数试题的解答.有些题的答案不是唯一的,解题方法也不只一种,也不一定最好,望读者经过思索,能有新的解题方法和捷径.

本书在编写过程中,参阅了不少同类书籍(书末附有参考书目录),受到不少启发和教益,在此谨向有关作者致以诚挚的谢意.另外还要感谢刘书田老师和北京大学出版社责任编辑刘勇老

师,对本书出版所给予的支持和帮助.

限于编者水平,本书难免有错误和不妥之处,恳请读者和使用本书的教师提出宝贵意见,以便今后改进.

编 者

2004年5月于北京

# 目 录

<b>第一章 行列式 .....</b>	(1)
§ 1.1 内容提要 .....	(1)
1.1.1 排列及其奇偶性 .....	(1)
1.1.2 $n$ 阶行列式 .....	(1)
1.1.3 行列式的性质和展开定理 .....	(2)
1.1.4 克莱姆(Cramer)法则 .....	(3)
§ 1.2 基本要求与重点、难点分析 .....	(4)
1.2.1 基本要求 .....	(4)
1.2.2 重点、难点分析 .....	(4)
§ 1.3 典型例题解析 .....	(5)
1.3.1 求排列的逆序数 .....	(5)
1.3.2 $n$ 阶行列式的定义 .....	(7)
1.3.3 行列式的性质与展开定理的应用 .....	(9)
1.3.4 行列式的计算 .....	(12)
1.3.5 利用范德蒙行列式进行计算 .....	(31)
1.3.6 应用克莱姆法则解线性方程组 .....	(34)
§ 1.4 练习题 .....	(38)
<b>第二章 矩阵 .....</b>	(43)
§ 2.1 内容提要 .....	(43)
2.1.1 矩阵及其运算 .....	(43)
2.1.2 可逆矩阵 .....	(46)
2.1.3 分块矩阵 .....	(48)
2.1.4 矩阵的初等变换 .....	(50)
2.1.5 矩阵的秩 .....	(51)
§ 2.2 基本要求与重点、难点分析 .....	(52)
2.2.1 基本要求 .....	(52)

2.2.2	重点、难点分析	(53)
§ 2.3	典型例题解析	(54)
2.3.1	矩阵的运算与运算律	(54)
2.3.2	求方阵的行列式	(61)
2.3.3	逆矩阵的计算与证明题	(62)
2.3.4	解矩阵方程	(72)
2.3.5	与伴随矩阵有关的计算或证明题	(79)
2.3.6	分块矩阵	(84)
2.3.7	矩阵的初等变换与初等矩阵	(87)
2.3.8	求矩阵的秩及有关证明题	(89)
§ 2.4	练习题	(95)
<b>第三章 线性方程组和向量</b>		(100)
§ 3.1	内容提要	(100)
3.1.1	线性方程组的消元法	(100)
3.1.2	$n$ 维向量及其线性运算	(101)
3.1.3	向量组的线性相关与线性无关	(104)
3.1.4	向量组的极大线性无关组与向量组的秩	(105)
3.1.5	线性方程组解的结构	(108)
§ 3.2	基本要求与重点、难点分析	(109)
3.2.1	基本要求	(109)
3.2.2	重点、难点分析	(110)
§ 3.3	典型例题解析	(111)
3.3.1	关于线性方程组的解的判定与消元法	(111)
3.3.2	含有参数的线性方程组的讨论与求解	(118)
3.3.3	一个向量由某个向量组线性表出的问题	(125)
3.3.4	向量组的线性相关性的判定	(129)
3.3.5	在线性表出关系下,两个向量组的线性相关性讨论	(141)
3.3.6	向量组的秩与极大线性无关组	(146)
3.3.7	关于矩阵的秩的证明题	(154)
3.3.8	求线性方程组的全部解	(160)
§ 3.4	练习题	(175)

<b>第四章 向量空间</b> .....	(180)
§ 4.1 内容提要 .....	(180)
4.1.1 向量空间 .....	(180)
4.1.2 实向量空间中向量的度量性 .....	(182)
4.1.3 正交矩阵 .....	(183)
§ 4.2 基本要求与重点、难点分析 .....	(184)
4.2.1 基本要求 .....	(184)
4.2.2 重点、难点分析 .....	(184)
§ 4.3 典型例题解析 .....	(185)
4.3.1 向量空间的验证与求向量空间的维数和基 .....	(185)
4.3.2 求基过渡矩阵与向量的坐标 .....	(188)
4.3.3 关于向量的度量性问题 .....	(190)
4.3.4 与正交矩阵有关的问题 .....	(195)
§ 4.4 练习题 .....	(198)
<b>第五章 矩阵的特征值与特征向量</b> .....	(201)
§ 5.1 内容提要 .....	(201)
5.1.1 矩阵的特征值与特征向量 .....	(201)
5.1.2 相似矩阵与矩阵的可对角化 .....	(202)
5.1.3 实对称矩阵的对角化 .....	(203)
§ 5.2 基本要求与重点、难点分析 .....	(204)
5.2.1 基本要求 .....	(204)
5.2.2 重点、难点分析 .....	(204)
§ 5.3 典型例题解析 .....	(206)
5.3.1 特征值和特征向量的概念题 .....	(206)
5.3.2 抽象矩阵的特征值、特征向量的计算 .....	(211)
5.3.3 具体矩阵的特征值与特征向量的计算 .....	(215)
5.3.4 矩阵特征值、特征向量的逆问题 .....	(217)
5.3.5 关于矩阵相似与对角化问题 .....	(223)
5.3.6 实对称矩阵与其正交相似对角化问题 .....	(237)
§ 5.4 练习题 .....	(244)

<b>第六章 二次型</b>	(247)
§ 6.1 内容提要	(247)
6.1.1 二次型的基本概念	(247)
6.1.2 二次型的标准形与规范形	(248)
6.1.3 实二次型与实对称矩阵的正定性	(250)
§ 6.2 基本要求与重点、难点分析	(251)
6.2.1 基本要求	(251)
6.2.2 重点、难点分析	(251)
§ 6.3 典型例题解析	(252)
6.3.1 二次型的矩阵表示与矩阵的合同问题	(252)
6.3.2 化实二次型为标准形	(257)
6.3.3 二次型与对称矩阵的正定性的判定	(269)
§ 6.4 练习题	(280)
<b>附录一 2004年硕士学位研究生入学考试</b>	
线性代数试题	(284)
<b>附录二 练习题答案、提示与解答</b>	(287)
<b>参考书目</b>	(304)

# 第一章 行列式

## § 1.1 内容提要

### 1.1.1 排列及其奇偶性

由  $1, 2, \dots, n$  这  $n$  个数字组成的一个有序数组, 称为一个  $n$  元排列. 一般地记作  $j_1 j_2 \cdots j_n$ . 由于是全排列, 故  $n$  元排列共有  $n!$  个.

在一个排列中, 如果有一个大的数排在一个小的数的前面, 则称这两个数构成该排列的一个逆序. 排列中逆序的总数称为该排列的逆序数. 排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  的逆序数记作  $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ .

逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列. 在全部  $n!$  个  $n$  元排列中, 奇排列与偶排列各占一半.

### 1.1.2 $n$ 阶行列式

#### 一、基本概念

##### $n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

简记为  $D_n = |a_{ij}|$ . 数  $a_{ij}$  为行列式  $D_n$  中的元素,  $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$  表示对所有  $n$  元排列求和, 故行列式  $D_n$  的展开式中共有  $n!$  项.

由定义可知,  $n$  阶行列式  $D_n = |a_{ij}|$  是一个数值. 特别,  
1 阶行列式:

$$|a_{11}| = a_{11};$$

2 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

## 二、几个特殊的行列式

(1) 上(下)三角行列式:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 & \qquad\qquad\qquad = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \\
 (2) \quad & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 & \qquad\qquad\qquad = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.
 \end{aligned}$$

(3)  $n$  阶范德蒙(Vandermonde)行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j).$$

(4) 设  $A$  为  $m$  阶方阵,  $B$  为  $n$  阶方阵,

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|.$$

### 1.1.3 行列式的性质和展开定理

#### 一、行列式的性质

- (1) 行列式与它的转置行列式相等.
- (2) 若互换行列式的某两行(或某两列), 行列式的值变号.
- (3) 如果用数  $k$  乘行列式的某一行(或某一列), 等于用数  $k$  乘

行列式. 换句话说, 行列式某一行(或某一列)的公因子可以提到行列式外.

(4) 如果行列式的某一行(或某一列)的每个元素均表为两个数的和, 则该行列式等于两个行列式的和.

(5) 将行列式某行(或某列)的  $k$  倍加到另一行(或另一列)上, 行列式的值不变.

由上述性质, 可以得到下述三个使行列式为零的充分条件:

(1) 若行列式中有一行(或一列)元素全为零, 则行列式等于零.

(2) 若行列式中有两行(或两列)元素相同, 则行列式等于零.

(3) 若行列式中有两行(或两列)元素对应成比例, 则行列式等于零.

## 二、行列式按一行(或一列)的展开定理

设  $D = |a_{ij}|$  为任意一个  $n$  阶行列式, 则

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

其中  $A_{ij}$  为元素  $a_{ij}$  的代数余子式.

展开定理的推论:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (i \neq k),$$

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0 \quad (j \neq k).$$

## 三、拉普拉斯(Laplace)展开定理

设  $D = |a_{ij}|$  为任意一个  $n$  阶行列式, 在  $D$  中任意取定  $k$  行 ( $1 \leq k \leq n$ ), 由这  $k$  行元素组成的所有  $k$  阶子式  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ) 与它们的代数余子式  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ) 的乘积之和等于  $D$ , 即

$$D = M_1B_1 + M_2B_2 + \cdots + M_tB_t \quad (t = C_n^k).$$

### 1.1.4 克莱姆(Cramer)法则

(1) 如果含有  $n$  个方程的  $n$  元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

的系数行列式  $D = |a_{ij}| \neq 0$ , 则方程组(1)有惟一解, 且

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

其中  $D_j$  是将系数行列式  $D$  的第  $j$  列换成常数项  $b_1, b_2, \dots, b_n$  后得到的行列式.

(2) 如果含有  $n$  个方程的  $n$  元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

的系数行列式  $D = |a_{ij}| \neq 0$ , 则方程组(2)仅有零解.

换句话说, 如果方程组(2)有非零解, 则其系数行列式  $D = 0$ .

## § 1.2 基本要求与重点、难点分析

### 1.2.1 基本要求

- (1) 了解行列式的概念.
- (2) 掌握行列式的性质, 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.
- (3) 掌握克莱姆法则.

### 1.2.2 重点、难点分析

$n$  阶行列式的定义是本章的一个难点, 掌握行列式的基本计算方法是本章的重点, 而元素中含有字母的行列式的计算也是一个难点.

(1)  $n$  阶行列式的本质是对  $n^2$  个数按一定规则进行运算, 其结果为一个数. 这个运算规则的特点是:

①  $D_n$  等于它的所有取自不同行、不同列的  $n$  个元素的乘积的代数和. 这里的“所有”是指对所有  $n$  元排列求和, 因而  $D_n$  的展开式中共有  $n!$  个乘积项.

② 每个乘积项  $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$  前面所带符号为  $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$ , 即当行标排列为自然序排列时, 若列标排列  $j_1j_2\cdots j_n$  是偶排列, 该乘积项前面带正号, 否则带负号.

由克莱姆法则告知, 方程组的系数行列式是否为零, 决定了方程组的解的不同情形. 这是因为行列式的值是否为零取决于行列式中行与行之间(或列与列之间)两种不同的情况, 即后面所要讨论到的线性相关及线性无关. 所以行列式的概念与计算是今后讨论矩阵、线性方程组及  $n$  维向量的基础之一.

(2) 行列式的性质及展开定理是计算行列式的基础, 要求读者对行列式性质及展开法则一定要熟记, 并弄清其含意及功能. 行列式的具体计算方法常常因题而异, 读者也应注意分析所计算行列式的特点, 灵活选用计算方法.

(3) 克莱姆法则是线性方程组理论中一个重要结论, 它的意义在于给出了方程组的解与系数及常数项之间的关系, 但克莱姆法则仅适用于方程个数与未知量个数相等的方程组, 且系数行列式不为零. 因而克莱姆法则主要用于理论问题及简单方程组的求解, 求解线性方程组的一般方法还是消元法.

### § 1.3 典型例题解析

#### 1.3.1 求排列的逆序数

设有  $n$  元排列  $j_1j_2\cdots j_n$ , 若在数字 1 之前有  $k_1$  个数, 记下  $k_1$ , 然后划掉 1; 再看数字 2, 若在数字 2 之前有  $k_2$  个数, 记下  $k_2$ , 然后划掉 2; 再看数字 3, 若在数字 3 之前有  $k_3$  个数, 记下  $k_3$ , 然后划掉 3; ……, 依次类推, 设在数字  $n-1$  之前有  $k_{n-1}$  个数, 记下  $k_{n-1}$ . 那么

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n) = k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}.$$

**例 1.1** 求下列排列的逆序数, 并指出它们的奇偶性:

$$(1) 3 5 4 6 1 2;$$

$$(2) 7 5 6 3 4 2 1;$$

$$(3) 3 4 5 \cdots n 2 1;$$

$$(4) (n-1)(n-2)\cdots 2 1 n.$$

**解** (1) 在 1 之前有 4 个数, 划去 1; 在 2 之前有 4 个数, 划去 2;

在 3 之前有 0 个数,划去 3;在 4 之前有 1 个数,后面不存在逆序. 则

$$\tau(3\ 5\ 4\ 6\ 1\ 2) = 4 + 4 + 1 = 9,$$

为奇排列.

(2)  $\tau(7\ 5\ 6\ 3\ 4\ 2\ 1) = 6 + 5 + 3 + 3 + 1 + 1 = 19$ , 为奇排列.

(3)  $\tau(3\ 4\ 5\ \cdots\ n\ 2\ 1) = (n-1) + (n-2) = 2n - 3$ , 为奇排列.

(4)  $\tau((n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n) = (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1$   
 $= \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ ,

当  $n=4m$  时, 为奇排列; 当  $n=4m+1$  时, 为偶排列; 当  $n=4m+2$  时, 为偶排列; 当  $n=4m+3$  时, 为奇排列.

**例 1.2** 设排列  $j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$  的逆序数为  $k$ , 问  $j_n j_{n-1} \cdots j_2 j_1$  的逆序数是多少?

**解** 若排列  $j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$  中关于  $j_1$  有  $m_1$  个逆序, 则有  $(n-1)-m_1$  个顺序, 即在排列  $j_n j_{n-1} \cdots j_2 j_1$  中关于  $j_1$  有  $(n-1)-m_1$  个逆序; 若关于  $j_2$  有  $m_2$  个逆序, 则有  $(n-2)-m_2$  个顺序; ……, 依次类推, 关于  $j_n$  有  $m_n$  个逆序, 则有  $(n-n)-m_n$  个顺序, 而  $m_1+m_2+\cdots+m_n=k$ , 故  $j_n j_{n-1} \cdots j_2 j_1$  的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau(j_n j_{n-1} \cdots j_2 j_1) &= [(n-n)-m_n] + \cdots + [(n-2)-m_2] \\ &\quad + [(n-1)-m_1] \\ &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0 - k \\ &= \frac{1}{2}n(n-1) - k.\end{aligned}$$

**例 1.3** 求  $i, j$  使

(1)  $2\ i\ 6\ 8\ j\ 4\ 3\ 1$  是奇排列;

(2)  $1\ 6\ 2\ i\ 5\ 4\ j\ 8$  是偶排列.

**解** (1) 由  $2\ i\ 6\ 8\ j\ 4\ 3\ 1$  是 8 元排列, 故  $i, j$  只能各是数字 5 和数字 7 中的一个. 若  $i=5, j=7$ , 由于  $\tau(2\ 5\ 6\ 8\ 7\ 4\ 3\ 1)=17$ , 则是奇排列.

(2) 由  $1\ 6\ 2\ i\ 5\ 4\ j\ 8$  是 8 元排列, 故  $i, j$  只能各是数字 3 和数字 7 中的一个. 若  $i=3, j=7$ , 由  $\tau(1\ 6\ 2\ 3\ 5\ 4\ 7\ 8)=5$ ,  $1\ 6\ 2\ 3\ 5\ 4\ 7\ 8$  是奇排列. 所以  $i=7, j=3$  时, 才为偶排列.