不确定理论与优化丛书

Uncertainty Theory and Optimization Series

多目标决策的理论与方法

Multiple Objective Decision Making Theory and Methods

徐玖平　李 军　编著

Xu Jiuping　Li Jun

清华大学出版社

不确定理论与优化丛书

Uncertainty Theory and Optimization Series

高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划资助项目

多目标决策的理论与方法

Multiple Objective Decision Making Theory and Methods

徐玖平　李 军　编著

Xu Jiuping　Li Jun

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

多目标决策是现代决策科学的重要组成部分，是运筹学的重要分支. 通常，人们所面临的实际决策问题包含若干个相互矛盾且不可公度的决策目标. 如何在有限资源的限制下，同时使得多个目标函数达到最优或者找到决策者的满意解是确定多目标决策要研究的问题. 然而，由于人为因素或客观因素的影响，实际的多目标决策问题常常伴随着许多不确定性，如模糊性、随机性等. 因此，本书将分别从确定多目标决策、随机多目标决策及模糊多目标决策三个不同的角度出发，主要介绍三类多目标决策问题的模型和有关理论，以及求解模型的若干算法.

本书可作为高等院校运筹学、管理科学、信息科学和系统工程专业的高年级本科生和研究生教材，并可作为相关专业科技工作者、工程技术人员、教师的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

多目标决策的理论与方法/徐玖平，李军编著. —北京：清华大学出版社，2005.3
(不确定理论与优化丛书)
ISBN 7-302-10317-8

Ⅰ. 多… Ⅱ. ①徐…②李… Ⅲ. 决策学—高等学校—教材 Ⅳ. C934

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 004142 号

出 版 者：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
责任编辑：王海燕
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市李旗庄少明装订厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：170×230　印张：24.5　字数：436 千字
版　次：2005 年 3 月第 1 版　2005 年 3 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-10317-8/O · 442
印　数：1～3000
定　价：39.00 元

不确定理论与优化丛书

Uncertainty Theory and Optimization Series

第 1 卷: 《不确定规划及应用》, 刘宝碇, 赵瑞清, 王纲

第 2 卷: 《不确定多属性决策方法及应用》, 徐泽水

第 3 卷: 《实用马尔可夫决策过程》, 刘克

第 4 卷: 《多目标决策的理论与方法》, 徐玖平, 李军

以下正在撰写:

《模糊集理论及应用》, 张强, 王昭

《模糊不确定性系统的建模与控制》, 李少远, 王昕

《模糊环境中的生产计划方法》, 唐加福, 董颖, 汪定伟

《多属性决策的理论与方法》, 徐玖平

不确定理论与优化丛书

在运筹学、管理科学、信息科学、工业工程、航天技术以及军事等众多领域都存在人为的或客观的不确定性，表现形式也多种多样，如随机性、模糊性、粗糙性以及多重不确定性. 辩证地讲，不确定性是绝对的，确定性是相对的. 不确定理论与优化不仅具有学术价值，而且具有广阔的应用前景. 为了促进不确定理论、不确定规划、算法及应用的学术交流与发展，清华大学出版社决定出版《不确定理论与优化丛书》. 本丛书将在编委会的指导下遴选书稿，指导思想是突出学术性、创新性、实用性，既出版有独到见解的学术专著，又出版实用案例分析和研究生教材. 如您希望您的著作加入本丛书，请向编委会垂询. http://orsc.edu.cn/use

前　　言

广义地讲, 决策即是运筹. 它涉及运筹学的各个方面, 如规划、博弈、排队、库存、网络等问题都属于决策科学的范畴. 狭义地讲, 决策科学研究的是一类特殊的博弈活动, 它是以决策者为一方, 以环境为另一方的博弈[1]. 决策是日常生活的一部分. 不论是对个人、企业, 或是大型的工程系统、社会经济系统, 几乎都有多个决策问题, 而且它们通常遵循相互矛盾的准则. 多准则决策 (MCDM) 问题是广泛存在的, 尽管某些决策问题我们并没有清楚地意识到. 一般来讲, 经典的多准则决策问题分为多属性决策 (MADM) 和多目标决策 (MODM) 两大类. 多属性决策考虑如何在事先已经确定好的有限数目的备选方案中进行选择. 而多目标决策问题中的方案却没有事先给定, 决策者要考虑如何在有限资源的限制条件下, 找到一个最佳的方案.

传统的多目标决策的研究仅仅局限在确定多目标决策问题中进行考虑. 但实际情况告诉我们, 不确定性是决策问题中存在的普遍现象. 随着人们对不确定性的认识逐渐深入, 对随机多目标决策及模糊多目标决策问题的研究也逐渐展开. 本书将逐次针对确定多目标决策、随机多目标决策和模糊多目标决策进行讨论.

确定多目标决策的研究最早可追溯到 18 世纪. Franklin 在 1772 年提出了多目标问题如何协调的问题. Cournot 在 1836 年从经济学角度提出了多目标问题的模型. Pareto 在 1896 年首次从数学角度提出了多目标最优决策问题. 后来, Arrow 等人在 1953 年提出有效点的概念, 多目标决策 (多目标规划) 问题逐渐受到人们的关注. 现在, 多目标决策问题已成为运筹学和管理科学重要分支之一

多目标决策问题有许多共同的特点, 其中最显著的是: 目标间的不可公度性和目标间的矛盾性[2]. 所谓目标间的不可公度性是指各个目标没有统一的度量标准, 因而难以进行比较. 目标间的矛盾性是指如果采用某一种方案去改进某一目标值, 可能会使另一目标的值变好或变坏. 由于多个目标之间的矛盾性和不可公度性, 因此, 不能简单地把多个目标归并为单个目标, 并使用单目标决策问题的方法

去求解多目标决策问题.

一般来讲, 每个多目标决策问题总涉及到下列 5 个基本要素:

(1) 决策变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

(2) 目标函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}, m \geqslant 2$.

(3) 可行解集 $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | g_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, i = 1, 2, \cdots, p, h_r(\boldsymbol{x}) = 0, r = 1, 2, \cdots, q\}$.

(4) 偏好关系. 在像集 $\boldsymbol{f}(X) = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in X\}$ 上有某个二元关系 $\precsim$ 反映决策者的偏好.

(5) 解的定义. 如何在已知的偏好关系 $\precsim$ 下定义 $\boldsymbol{f}$ 在 X 上的最好解.

一般地, 多目标决策问题可描述为

$$\begin{aligned} &\min \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x})) \\ &\text{s.t.} \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, & i = 1, 2, \cdots, p, \\ h_r(\boldsymbol{x}) = 0, & r = 1, 2, \cdots, q, \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维决策向量. 记可行域为

$$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | g_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, i = 1, 2, \cdots, p, h_r(\boldsymbol{x}) = 0, r = 1, 2, \cdots, q\}.$$

与传统的单目标数学规划问题不同, 在多目标决策问题 (也称为多目标规划或向量规划) 中, 通常不存在能使得所有目标函数同时得到优化的最优解. 也就是说, 如果可行解 $\boldsymbol{x}$ 是某些目标函数的最优解, 但 $\boldsymbol{x}$ 常常不会是其余的目标函数的最优解. 因此, 绝对最优解在多目标决策问题中通常是不存在的, 此时需要考虑的是另外一种解的概念 —— 有效解 (或非劣解). 如果称某可行解 $\boldsymbol{x}$ 是有效解, 是指不存在另外的可行解 $\boldsymbol{x}'$, 使得 $\boldsymbol{x}'$ 的各目标值 $f_k(\boldsymbol{x}')$ 都不劣于可行解 $\boldsymbol{x}$ 的各目标函数值 $f_k(\boldsymbol{x})$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$, 且至少有某一 k_0, $f_{k_0}(\boldsymbol{x}')$ 的值要优于 $f_{k_0}(\boldsymbol{x})$. 由于有效解集中有效解的数目非常多, 因此, 多目标决策中的一个本质问题, 就是如何根据决策者的主观价值判断对有效解 (方案) 进行好坏的比较? 决策者的主观价值判断表现为他认为某方案 $\boldsymbol{x}$ 比 $\boldsymbol{x}'$ 好 (或 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 比 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')$ 好), 即是定义在 X (或 $\boldsymbol{f}(X)$) 上的二元关系, 称为偏好序.

决策者根据某种决策原则在有效解之间进行权衡, 从而找出最终的满意解, 但不同的决策者在有效解集中选择的满意解一般是不同的. 如果决策者的偏好结构能用一个效用函数 $u(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))$ 表示, 则选择一个有效解使得 $u(\cdot)$ 达到最大值, 即可得到决策者的满意解. 此时, 原来的多目标规划问题就转化为单

日标规划问题:

$$\max\ u(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))$$
$$\text{s.t.}\ \boldsymbol{x} \in X.$$

如果决策者的偏好结构不明确知道, 也无法一次确定效用函数, 则可以考虑让决策者多次给出其偏好的局部信息, 然后进行多次迭代并找到最终方案, 此类方法被称为交互式规划法.

在经典的多日标决策模型 (1) 中, 各种数据和信息都被假定为绝对精确, 日标和约束也都假定被严格的定义并有良好的数学表示. 然而, 实际问题中的日标函数、约束条件等很难用数学公式表示清楚, 因此, 确定多日标决策模型不足以处理所有的实际问题. 此时, 有两类不确定多目标决策模型被提出, 一类是在经典决策分析中就已经讨论的随机多日标决策, 另一类则是随着模糊集理论的产生与发展而提出的模糊多日标决策.

1955 年, Danzig 在 “回顾线性规划的起源” 一文中曾指出: “随机规划是未来研究最有前途的领域之一”[3]. 随后, 随机单日标线性规划模型被广泛研究, 见文献 [4, 5]. 但关于随机多日标决策 (随机多日标规划) 模型的研究成果却并不多, 随机变量的出现确实使得问题的难度增加很多. 当模型 (1) 中的系数为随机变量时, 随机多日标决策模型可表示为

$$\begin{aligned} &\min\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}) = (f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}), f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})) \\ &\text{s.t.} \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}) \leqslant 0, & i = 1,2,\cdots,p, \\ h_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}) = 0, & r = 1,2,\cdots,q, \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维决策变量, $\boldsymbol{w}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机向量. 注意到对应于不同的样本点 $\boldsymbol{w}$, 模型 (2) 的日标函数和约束条件也随之发生变化, 该模型本身是没有任何意义的. 此时, 不能按照通常意义去理解式 (2) 中的日标函数和约束条件, 必须把它归为新的一类规划问题并寻找相应的算法.

通常, 处理数学规划中的随机变量有两种方针: 一是等待观察到随机变量的实现以后作出决策, 二是在观察到随机变量的任何实现之前就必须作出决策. 由此导致的模型有以下几种:

(1) 分布问题

对 Ω 中任一样本点 $\boldsymbol{w}$, 当观察到随机变量 $f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$, $g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$, $h_r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$ 的实现之后, 模型 (2) 变为一个确定多日标规划问题. 记模型 (2) 中所有约束条件组成的集合为 D.

令

$$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})=\max\{f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}),f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\},$$

考虑如下单目标规划问题:

$$\xi(\boldsymbol{w})=\min_{\boldsymbol{x}\in D}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})=\min_{\boldsymbol{x}\in D}\max_{1\leqslant k\leqslant m}f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}).$$

决策者要预先知道, 对应于各个不同的 $\boldsymbol{w}$, 随机变量 $\xi(\boldsymbol{w})$ 将有可能取哪些值以及取这些值的概率有多大, 或 $\xi(\boldsymbol{w})$ 的数学期望、方差等信息, 即要知道 $\xi(\boldsymbol{w})$ 的分布情况如何. 因此这种问题称为分布问题.

(2) 机会约束规划

机会约束规划, 有时又称为概率约束规划, 是由 Charnes 和 Coopers 提出的[6]. 考虑到所作决策在不利的情况发生时可能不满足约束条件, 因而采用一种原则, 即允许所作决策在一定程度上不满足约束条件, 但该决策应使约束条件成立的概率不少于某一置信水平 α. 一种有意义的多目标机会约束规划模型为[7]

$$\begin{aligned}&\min\ \{\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_m\}\\&\text{s.t.}\begin{cases}P(f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\leqslant\overline{f}_k)\geqslant\beta_k, & k=1,2,\cdots,m,\\P(g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\leqslant 0)\geqslant\alpha_i, & j=1,2,\cdots,p,\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $P(\cdot)$ 表示 $(\cdot)$ 中的事件成立的概率, α_i 和 β_k 分别是事先给定的第 i $(i=1,2,\cdots,p)$ 个约束条件和第 k $(k=1,2,\cdots,m)$ 个目标的置信水平, $\overline{f}_k$ 是目标函数 $f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$ 在概率水平至少为 β_k 时所取的最小值.

对一些特殊情况, 机会约束规划问题可以转化为等价的确定性数学规划问题, 但对较复杂的机会约束规划问题, 通常很难做到这一点. 本书对利用基于随机模拟的遗传算法来求解一般机会约束规划问题不作讨论, 有兴趣的读者可参见文献 [7, 8].

(3) 相关机会规划

文献 [9] 中提出了解决随机多目标规划的另一种方法 —— 相关机会规划. 简单地讲, 相关机会规划是使事件的机会函数在不确定环境下达到最大值的优化问题. 这里的事件是指一个复杂系统要承担的多项任务, 机会函数是指这些事件实现的概率. 在期望值模型或机会约束规划模型中, 当对实际问题建模后, 可行解集实质上已经确定, 这就可能导致所给定的最优解在实际执行时根本无法实现. 相反, 相关机会规划并不假定可行解集是确定的. 虽然相关机会规划也给出一个确定的解, 但这个解只是要求在实际问题中尽可能实现. 这类问题在实际生活中是确实存在的, 有关实例请参见文献 [10–12] 等. 关于相关机会规划的具体形式及详细方法本书不作介绍, 请读者参见文献 [7, 8].

本书对随机多目标决策问题讨论的主要内容包括多最小风险问题, 现有的若干非交互式及交互式算法, 详细的讨论请参见第 4 章、第 5 章及第 6 章.

实际上, 事件的不确定性有两种不同的表现形式. 一种是事件是否发生的不确定性, 即随机性. 另一种是事件本身状态的不确定性, 称为模糊性. 如 "大与小"、"胖与瘦"、"高与矮" 等没有确切界限的一些对立概念都是模糊概念. 传统的不确定多目标决策问题仅局限于单一的随机多目标决策, 处理的惟一工具只是概率统计分析, 这样处理的前提是, 不论其性质与表现形式如何, 假定决策中的不确定事件都是某种随机因素影响的结果. 这种将所有不确定问题简单处理成随机问题的方式已受到越来越多的批评.

自 L. A. Zadeh 1965 年提出模糊集理论后, 模糊集的概念被引入了运筹学、管理科学、人工智能专家系统、控制理论及统计等诸多领域中[13]. 模糊集理论有助于改善过于简化的确定模型, 同时, 对实际的复杂系统, 特别是含人类活动在内的复杂系统, 提供了更符合实际且灵活的模型. 1970 年, 享有 "动态规划之父" 盛誉的 Bellman 教授与 Zadeh 教授在多目标决策的基础上, 合作提出了模糊决策的基本模型[14]. 在该模型中, 凡决策者不能精确定义的参数、概念和事件等, 都被处理成某种适当的模糊集合. 迄今为止, 模糊集理论已经渗透到决策科学的各个领域.

一般的模糊多目标决策模型可写为

$$\widetilde{\min}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\widetilde{\boldsymbol{a}})=(f_1(\boldsymbol{x},\widetilde{\boldsymbol{a}}_1),f_2(\boldsymbol{x},\widetilde{\boldsymbol{a}}_2),\cdots,f_m(\boldsymbol{x},\widetilde{\boldsymbol{a}}_m))$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x},\widetilde{\boldsymbol{b}}_i)\underset{\sim}{\leqslant}0, & i=1,2,\cdots,p,\\ h_r(\boldsymbol{x},\widetilde{\boldsymbol{c}}_r)\underset{\sim}{=}0, & r=1,2,\cdots,q,\end{cases} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维决策变量, $\widetilde{\boldsymbol{a}}_k$ $(k=1,2,\cdots,m)$, $\widetilde{\boldsymbol{b}}_i$ $(i=1,2,\cdots,p)$, $\widetilde{\boldsymbol{c}}_r$ $(r=1,2,\cdots,q)$ 均为模糊系数向量. "$\underset{\sim}{\leqslant}$" 为模糊不等号, 表示 "基本上小于或等于". "$\underset{\sim}{=}$" 为模糊等号, 表示 "基本上等于". "$\widetilde{\min}$" 表示 "尽可能使目标函数小". 需要说明的是, 有时考虑的模糊目标会同时包含 "$\widetilde{\max}$", "$\widetilde{\min}$" 以及 "$\widetilde{\text{equal}}$".

在模糊多目标决策模型 (3) 中, 可以从以下三个角度与确定多目标决策问题加以区别. ① 带模糊目标, 即给出的目标是含糊地, 且通常带有理想水平值, 而且目标函数的目的值允许有回旋的余地. ② 带模糊约束, 通常用模糊符号 $\underset{\sim}{\leqslant}, \underset{\sim}{\geqslant}, \underset{\sim}{=}$ 表示系统的约束条件允许有一定的偏差和弹性. ③ 带模糊系数, 模糊系数可以出现在目标函数或出现在系统的约束条件中.

本书中对模糊多目标决策模型 (3) 的讨论大致可分为两类, 一类是模型 (3) 中含有模糊目标和模糊约束, 另一类是模型 (3) 中含有模糊系数.

带模糊约束的模糊多目标决策模型为

$$\widetilde{\min}\ (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}) \underset{\sim}{\leqslant} 0, & i = 1, 2, \cdots, p, \\ h_r(\boldsymbol{x}) \underset{\sim}{=} 0, & r = 1, 2, \cdots, q. \end{cases} \tag{4}$$

对于决策者的模糊要求 (如模糊目标和模糊约束), 通常需要决策者主观设定隶属函数 $\mu_k(f_k(\boldsymbol{x}))$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$, $\mu_i(g_i(\boldsymbol{x}))$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$, 及 $\mu_r(h_r(\boldsymbol{x}))$ $(r = 1, 2, \cdots, q)$. 以 $\mu_i(g_i(\boldsymbol{x}))$ 为例, 它是关于 g_i 的严格单调递减函数, 且有

$$\mu_i(g_i(\boldsymbol{x})) = \begin{cases} 1, & 若\ g_i(\boldsymbol{x}) \leqslant g_i^1, \\ d_i(\boldsymbol{x}), & 若\ g_i^1 < g_i(\boldsymbol{x}) < g_i^0, \\ 0, & 若\ g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant g_i^0, \end{cases}$$

其中当 $g_i(\boldsymbol{x})$ 分别取为 g_i^1, g_i^0 时, 对应的隶属水平值为 1 和 0. 通常, 隶属函数可取为线性函数、分段线性函数、指数函数、双曲函数和反双曲函数等形式. 利用 Bellman 和 Zadeh 提出的模糊决策原理[14], 极大化决策 $\boldsymbol{x}^*$ 满足

$$\mu_D(\boldsymbol{x}^*) = \max_{\boldsymbol{x}} \min_{k,i,r}\{\mu_k(f_k(\boldsymbol{x})), \mu_i(g_i(\boldsymbol{x})), \mu_r(h_r(\boldsymbol{x})),$$
$$k = 1, 2, \cdots, m,\ i = 1, 2, \cdots, p,\ r = 1, 2, \cdots, q\}.$$

带模糊系数的模糊多目标决策模型为

$$\min\ \{f_1(\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{a}}_1), f_2(\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{a}}_2), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{a}}_m)\}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{b}}_i) \leqslant 0, & i = 1, 2, \cdots, p, \\ h_r(\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{c}}_r) = 0, & r = 1, 2, \cdots, q, \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{a}}_k$, $\widetilde{\boldsymbol{b}}_i$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{c}}_r$ 分别是模糊目标 $f_k(\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{a}}_k)$, 模糊约束 $g_i(\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{b}}_i)$ 和模糊约束 $h_r(\boldsymbol{x}, \widetilde{\boldsymbol{c}}_r)$ 中涉及的模糊参数向量. 这些模糊系数反映对模型建立过程中参数的主观或客观的不确定性, 且通常都用模糊数来表示, 并引入可能性分布函数 $\pi_{\widetilde{m}}(m) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ 刻画实模糊数 $\widetilde{m}$.

需要特别提到的是, 模糊性可能是指人类的语言和行为的含糊性, 或者数据的不确定性, 以及由于知识有限或理解的不足使得信息不能清楚的表示或描述. 前面一类模糊性通常采用反映决策者主观偏好的隶属函数表示, 见模型 (4) 中. 后面一类模糊性还可以进一步分为基于偏好的模糊性和基于可能性的模糊性 (通常也称为不确定性). 如果模糊性是由于主观知识或客观工具造成, 如 "加工时间大约为 2 分钟", 这就是基于主观的模糊性, 通常用隶属函数表示; 如果模糊性是由于不完备信息, 如 "投资的利润大约为 2 元或 1.9~2.1 元, 则它就是一种基于可能性的模糊

性, 通常用区间表示, 因此用可能性分布进行刻画, 它反映的是某事件或事物发生的可能性, 见模型 (5) 中.

考虑到针对不同的模糊多目标决策的方法所建立的模型不同, 并无统一的模型存在, 故此处并不作介绍. 对模糊多目标决策算法的思想及部分典型算法的详细介绍见第 8 章和第 9 章.

全书的内容分 4 篇共 10 章, 将分别针对确定多目标决策、随机多目标决策和模糊多目标决策三部分加以介绍. 第 1 章到第 3 章是第 1 篇, 专门讨论确定多目标决策的理论与方法. 第 1 章主要介绍确定多目标决策的预备数学知识, 如凸集、点集映射、二元关系及锥偏序等. 第 2 章介绍确定多目标决策的锥有效性的主要理论, 其中包括锥有效解、恰当有效解、锥有效性条件、解集的性质等. 第 3 章介绍求解确定多目标决策问题的算法, 包括非模糊解法中的评价函数法、目的规划法、分层规划法、交互规划法以及模糊解法 (本书中称为隶属函数法). 第 4 章到第 6 章是第 2 篇, 专门讨论随机多目标决策的理论与方法. 第 4 章介绍随机多目标决策模型中讨论的 Chebyshev 问题、随机有效解的定义以及随机多目标二次线性规划问题. 第 5 章专门针对多最小风险问题及多最小风险解进行详细讨论. 第 6 章主要介绍随机多目标决策模型的算法, 如随机目的规划法、PROTRADE 法、PROMISE 法、STRANGE 法及模糊规划方法等. 第 7 章到第 9 章是第 3 篇, 专门讨论模糊多目标决策的理论与方法. 第 7 章介绍模糊决策力量的基础知识, 如模糊集合理论的简单介绍、模糊决策的原理等. 第 8 章介绍带模糊约束的多目标决策模型的各种算法, 包含模糊目的规划法、模糊全局优化法及模糊交互式规划法. 第 9 章则介绍带模糊系数的多目标决策模型的各种算法. 此处不仅仅局限在对带模糊系数的多目标线性决策模型的讨论, 进一步扩展到了带模糊系数的多目标非线性决策模型的方法的讨论, 以及稳定性理论的部分内容. 在对以上三类多目标决策问题讨论的基础上, 本书在第 4 篇即第 10 章又对确定多目标决策、随机多目标决策和模糊多目标决策三类模型进行了逐一的比较.

常用符号说明

(VMP)	Euclid 空间多目标规划问题
V − min	Euclid 空间多目标极小化
(TMP)	拓扑向量空间多目标规划问题
T − min	拓扑向量空间多目标极小化
(VLP)	Euclid 空间多目标线性规划问题
$\boldsymbol{y} \in (\notin) S$	$\boldsymbol{y}$ 属于 (不属于) 集合 S
$\exists\ (\nexists)$	存在 (不存在)
$\boldsymbol{y}R\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 有关系 R
$\neg\boldsymbol{y}R\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 没有关系 R
S^{c}	集合 S 的余集
$\mathrm{int}S$	集合 S 的内部
$\mathrm{cl}S$	集合 S 的闭包
$\mathrm{co}S$	集合 S 的凸壳
∂S	集合 S 的边界
$S \subseteq T$	集合 T 包含集合 S
$S \nsubseteq T$	集合 T 不包含集合 S
$S \cup T$	集合 S 和集合 T 的并
$S \cap T$	集合 S 和集合 T 的交
$S \setminus T$	集合 S 和集合 T 之差, 即 $S \cap T^{c}$
$\boldsymbol{x} + S$	元素 $\boldsymbol{x}$ 与集合 S 的和, 即 $\boldsymbol{x} + S = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in S\}$
$\boldsymbol{x} - S$	元素 $\boldsymbol{x}$ 与集合 S 的差, 即 $\boldsymbol{x} - S = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in S\}$
λS	集合 S 的 λ 倍, 即 $\lambda S = \{\lambda \boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{s} \in S\}$
$S + T$	集合 S 和集合 T 的代数和, 即 $S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$
$S \times T$	集合 S 和集合 T 的笛卡儿积, 即 $S \times T = \{(s, t) \mid s \in S, t \in T\}$

$\boldsymbol{y} \precsim \boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 有偏好关系 $\precsim$
$\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 有严格偏好关系 $\prec$
$\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 有淡漠关系 $\sim$
K	向量空间中的锥
K^*	K 的对偶锥
$D(\boldsymbol{y})$	点 $\boldsymbol{y}$ 处的支配结构
$\mathbb{R}^m_+$	Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 中的正锥, 即
	$\mathbb{R}^m_+ = \{\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m \mid v_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, m\}$
L	Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 中的字典锥
$\boldsymbol{y} \precsim_K \boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 有由锥 K 确定的偏序关系
$\boldsymbol{y} \tilde{\prec}_K \boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y} \precsim_K \boldsymbol{z}$ 且 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$
$\boldsymbol{y} \precsim_D \boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 有由支配结构 $D(\cdot)$ 确定的偏好关系
$\boldsymbol{y} \tilde{\prec}_D \boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y} \precsim_D \boldsymbol{z}$ 且 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$
$\boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$ 小于等于 $\boldsymbol{z}$
$\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$ 小于 $\boldsymbol{z}$, 即 $\boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{z}$ 且 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$
$\boldsymbol{y} < \boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$ 小于 $\boldsymbol{z}$
$\varepsilon(Y)$	Euclid 空间中集合 Y 的有效点集
$\varepsilon_w(Y)$	Euclid 空间中集合 Y 的弱有效点集
$\mathcal{A}(Y)$	Euclid 空间中集合 Y 的绝对最优点集
$E(\boldsymbol{f}, X)$	(VMP) 的有效解集
$E_w(\boldsymbol{f}, X)$	(VMP) 的弱有效解集
$A(\boldsymbol{f}, X)$	(VMP) 的绝对最优解集
$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	向量函数 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的 Jacobi 矩阵
$\varepsilon(Y, K)$	拓扑向量空间中集合 Y 的 K-有效点集
$\varepsilon_w(Y, K)$	拓扑向量空间中集合 Y 的 K-弱有效点集
$\mathcal{A}(Y, K)$	拓扑向量空间中集合 Y 的 K-最优点集
$E(\boldsymbol{f}, X)_K$	(TMP) 的 K-有效解集
$E_w(\boldsymbol{f}, X)_K$	(TMP) 的 K-弱有效解集

$A(\boldsymbol{f},X)_K$	(TMP) 的 K-最优解集
$\mathcal{N}(Y,D)_K$	拓扑向量空间中集合 Y 的 D-非支配点集
$\mathcal{D}(Y,D)_K$	拓扑向量空间中集合 Y 的 D-支配点集
$N(\boldsymbol{f},X)_D$	(TMP) 的 D-非支配解集
$d(\boldsymbol{f},X)_D$	(TMP) 的 D-支配解集
$\varphi^{'}$	映射 φ 在点 $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ 处的 Gateaux 导数
$\langle \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{q}\rangle$	线性泛函 $\boldsymbol{q}^*$ 在 $\boldsymbol{q}$ 处的值
$T(S,\boldsymbol{y})$	集合 S 在点 $\boldsymbol{y}$ 处的切锥
$\mathrm{P}(S)$	集合 S 的投影锥
$Y^{\boldsymbol{u}}$	由扰动集合 $Y(\boldsymbol{u})$ 确定的点集映射
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{u}}$	由扰动 K-有效点集确定的点集映射
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{w}}$	由扰动 K-弱有效点集确定的点集映射
$E^{\boldsymbol{u}}$	由 $(\mathrm{TMP})_u$ 的 K-有效解集确定的点集映射
$E^{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{w}}$	由 $(\mathrm{TMP})_u$ 的 K-弱有效解集确定的点集映射
$K^{\boldsymbol{v}}$	由扰动锥 $K(\boldsymbol{v})$ 确定的点集映射
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{v}}$	由集合的 $K(\boldsymbol{v})$-有效点集确定的点集映射
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{w}}$	由集合的 $K(\boldsymbol{v})$-弱有效点集确定的点集映射
$E^{\boldsymbol{v}}$	由 $(\mathrm{TMP})_u$ 的 $K(\boldsymbol{v})$-有效解集确定的点集映射
$E^{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{w}}$	由 $(\mathrm{TMP})_u$ 的 $K(\boldsymbol{v})$-弱有效解集确定的点集映射
$\mathrm{Bo}(\boldsymbol{f},X)_K$	(VMP) 的 Bo 恰当有效解集
$\mathrm{Be}(\boldsymbol{f},X)_K$	(VMP) 的 Be 恰当有效解集
$\mathrm{He}(\boldsymbol{f},X)_K$	(VMP) 的 He 恰当有效解集
$\mathrm{He}^L(\boldsymbol{f},X)_K$	(VMP) 的局部 He 恰当有效解集
$\mathrm{Ge}(\boldsymbol{f},X)$	(VMP) 的 Ge 恰当有效解集
$\mathrm{KT}(\boldsymbol{f},X)$	(VMP) 的 KT 恰当有效解集
$\mathrm{KT}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{f},X)$	(VMP) 的 KT 恰当弱有效解集
$V-\mathrm{appr}$	表示向量逼近
U	论域

$\widetilde{A}=(m:\alpha,\beta)_{\mathrm{LR}}$	L-R 模糊数
$\underset{\sim}{\leqslant}$	模糊不等号, 表示“基本上小丁或等丁”
$\underset{\sim}{=}$	模糊等号
$\vee$	极大算子
$\wedge$	极小算子
$\det \boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
poss	可能性
nec	必然性
$\widetilde{u}=(u_1,u_2,u_3,u_4)$	梯形模糊数

$\varnothing$	空集
$\chi_A(u)$	集合 A 的特征函数
$\widetilde{A}$	模糊集
$\mu_{\widetilde{A}}$	模糊集合 $\widetilde{A}$ 的隶属函数
$\mu_{\widetilde{A}}(\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{x}$ 对模糊集 $\widetilde{A}$ 的隶属度
$\mathrm{supp}(A)$	模糊集 $\widetilde{A}$ 的支撑集
$\widetilde{A}=\widetilde{B}$	模糊集 $\widetilde{A}$ 与 $\widetilde{B}$ 相等
$\widetilde{A}\subseteq\widetilde{B}$	模糊集 $\widetilde{A}$ 被 $\widetilde{B}$ 包含
$\widetilde{A}^{c}$	模糊集 A 的余集
$\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$	模糊集 A 与 B 的并集
$\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$	模糊集 A 与 B 的交集
$\widetilde{A}+\widetilde{B}$	模糊集 A 与 B 的代数和
$\widetilde{A}\widetilde{B}$	模糊集 A 与 B 的代数积
$\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}$	模糊集 A 与 B 的有界和
$\widetilde{A}\odot\widetilde{B}$	模糊集 A 与 B 的有界积
$\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}$	模糊集 A 与 B 的有界差
$\widetilde{A}^{n}$	模糊集 A 的幂乘
A_α	模糊集 A 的 α-截集
$\widetilde{A}_1\times\widetilde{A}_2\times\cdots\times\widetilde{A}_n$	模糊集 $\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n$ 的笛卡儿乘积
$L(x)$	左基准函数
$R(x)$	右基准函数
$(+),(-),(\times),(\div)$	模糊数的模糊运算
m_α^{L}	模糊数 $\widetilde{M}$ 的 α-截集的左边界
m_α^{R}	模糊数 $\widetilde{M}$ 的 α-截集的右边界
$\max\{\widetilde{M},\widetilde{N}\}$	$\widetilde{M}$ 和 $\widetilde{N}$ 极大模糊数
$\min\{\widetilde{M},\widetilde{N}\}$	$\widetilde{M}$ 和 $\widetilde{N}$ 极小模糊数
$\max\{a,b\}$	a 和 b 的最大值
$\min\{a,b\}$	a 和 b 的最小值