中学生

# 数学建模读本

孔凡海 编著

江苏教育出版社

# 中学生

# 数学建模读本

孔凡海　编著

江苏教育出版社

# 中学生数学建模读本

孔凡海　编著

责任编辑　蔡　立

出　　版：江 苏 教 育 出 版 社
（南京马家街 31 号，邮政编码：210009）
发　　行：江　苏　新　华　书　店
印　　刷：通 州 市 印 刷 总 厂
（通州市交通北路 20 号　邮政编码：226300）

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 7.875　插页 1　字数 189,000
1998 年 1 月第 1 版　1998 年 1 月第 1 次印刷
印数 1—5,000 册

ISBN 7—5343—3149—8

G・2863　　　　定价：8.10 元

# 序

一份清样放在书桌上，标题是“中学生数学建模读本”，作者是南京的一位中学教师，在应试教育的功利主义压力之下，许多中学教师对课本以外的数学知识，恐怕已经没有多少兴趣了，数学建模一词，中学数学教育界很少听到，研究者更属稀有. 因此，说这本书的出现使人感到惊讶，大概是不会错的.

其实，数学模型的教学，是数学教学的基本内容之一. 小学数学课开宗明义讲的自然数，乃是远古先民计算猎物的数学模型；分数是分配食物和财产的数学模型；欧氏几何是现实空间的数学模型；二次曲线是行星运动的数学模型；微积分是物体运动的数学模型；概率论则是描述偶然现象和必然现象的数学模型. 从总体上说，离开了数学模型，也就没有数学本身了.

近二十年来，中国数学教育在数学模型教学方面不是前进，而是倒退了. 数学的价值被简化成“训练逻辑思维的体操”，“升学应试的敲门砖”，数学模型的教学因“浪费时间”、“高考不考”诸理由而备受冷落. 确实，数学模型教学注重数学知识的发生过程，强调数学创造能力的培养，因而需要学生花费较多的时间，因此也就为“片面追求升学率”者所不容. 某些教育行政长官，以“升学率”的升降衡量基层的校长和教师的工作优劣，却从不过问数学教学和本地的经济发展是否有关，学生是否能用数学观念去帮助各个部门建立数学模型. 正因为上述因素，数学模型教学的式微，自是难以避免的了。

但是，人各有志. 孔凡海作为一位中学教师，却致力于研究中学数学中的数学模型，广收资料，编写成书. 放着省力且有实惠的

路不走，偏偏找一种吃力不讨好但意义深远的事情来做.仅就这一点精神，就应该获得人们的称赞.

话又说回来，难道“数学模型”的教学就一定会妨碍“考试成绩”？我看未必.在常规教学之外，通过少量“建立数学模型”的创造性学习过程，增强了数学学习的兴趣，提高了学生的数学能力，也许会大大促进数学考试成绩的提高.这正如在吃力地运转的机器里，加上一些润滑油，机器的效益将会获得很大的提高.何况我国的高考命题也在改革，数学模型是否以适当的方式进入数学试卷，也是大家讨论的问题之一.我真诚地希望会有一些大胆的教师，能够冲破阻力，最终获得数学模型教学促进考试成绩提高的成功经验.

本书作为一种教材，需要通过大家的使用，加以修改、充实、提高.书中的资料多从其他书中引用而来，自己的教学经验，自己的例子实在不多，这是缺点，一时难以避免.建立中国自己的中学数学建模教学体系，当是21世纪的任务了.

张奠宙

1997年8月于华东师范大学

# 前　言

读者朋友们，当你见到我们这本书时，可能首先会对这本书的封面设计感到疑惑. 这分明是一本关于中学数学的书，封面却没有采用常见的直线、方块、圆等图案，而是采用了一幅漂亮的风景画，这幅风景画使你犹如置身于一个田园牧场，既有不见边际的绿草地，又有静谧流淌的小河，思维的翅膀还会使你联想到远处的蓝天白云，图画中，七座小桥格外引人注目，它连接着河中的绿岛和岸上的绿地，也使整个风景显得浑然一体，格外和谐.

采用这样的封面设计，表面上似乎偏离主题，其实恰恰反映了我们出版此书的初衷. 一方面，七座小桥的想法源自于欧拉的"七桥问题"，"七桥问题"是数学建模中一个非常著名的实例. 另一方面，我们认为，数学建模其实也是一座桥，画中的小桥连接起了美丽的风景，而数学建模则将抽象、艰深的数学理论和它在现实生活中丰富多彩的应用连接起来. 所以，数学建模不应该是单调、枯燥、乏味的，它内中蕴含着美. 出于这些考虑，我们特意选用了这样一个"有悖常规"的封面，试图以此体现数学理论和实际应用相结合所呈现出的五彩缤纷、绚丽多姿.

那么，究竟什么是数学建模呢？所谓数学建模，就是将社会生活中的实际问题，通过化简、抽象等手段转化为一个数学问题（也就是建立起关于实际问题的数学模型），然后分析、求解出这个数学问题的结论，进而把这个结论还原到实际问题中，对实际问题进行解释、预测、控制.

简而言之，数学建模就是用数学理论来解决实际问题. 数学作为一门理论性极强的学科，并不是如许多人所想象的脱离实际的

"空中楼阁":数学之所以产生,是因为人们在实际生活中需要分配猎物,丈量田亩;数学的每一步发展,它的起因往往是人们在生产生活中遇到难题而求助于数学,而数学家解决这个问题的过程又推动了数学自身的发展,数学的发展又为人们改造社会、自然的活动提供了极大的帮助,有时甚至是决定性的帮助.我们在日常生活中,也能时时感受到"生活处处皆数学",数学在物理、化学、计算机等领域的广泛应用自不待言,就是在许多看似和数学毫无瓜葛的领域,数学也有广泛的应用,而且这种应用往往是非常有趣的.

举个简单的例子,奥运会男子跳远比赛作为人类挑战自己跳跃极限的重要舞台,历来备受关注.现在如果给你历届奥运会男子跳远冠军的成绩,请你预测一下2000年悉尼奥运会跳远冠军的比赛成绩.这个问题就是让资深的田径专家来回答,恐怕也会令其大伤脑筋,对于这个似乎与数学毫无关系的问题,数学家们却想出了自己的办法.他们通过数学建模的方法,将这个问题转化为数学问题,预测出2000年奥运会冠军成绩为9.10米.这个结果是否正确,现在还不能下最后的结论,但值得注意的是,用他们的方法推测出88年奥运会冠军的成绩为8.88米,与实际成绩仅相差0.16米(这个例子的完整解法收在本书的第三章第二节).

大多数读者是通过大学数学建模竞赛知道数学建模的,大学数学建模竞赛正在大学校园中广泛地开展.但这并不意味着数学建模一定就是大学生的专利,应该说,对中学生进行数学建模能力训练是非常必要和有益的.

中学生究竟为什么而学数学?是不是仅仅为了通过高考?答案是否定的.一方面,数学是高考的必考科目,要想考上理想的大学,就必须有好的数学成绩;但另一方面,今天的中学生未来都要成为掌握专门知识,从事各项实际工作的人才,他们今天所学的数学知识将来会应用到他们的实际工作中,应该说这是学习数学的更重要的方面.

由于巨大的升学压力，当前的中学数学教育仍然把着眼点放在帮助学生通过高考上，向学生大量讲授基础知识，让学生大量做题，忽视培养学生在实际中用数学的能力. 这时，如果对学生进行数学建模能力训练，可以较好地弥补这一缺陷. 数学建模把课堂上的数学知识延伸到实际生活中，呈现给学生一个五彩缤纷的数学世界. 数学和现实生活中如此众多的事物联系在一起：预测下世纪的世界人口数要用数学，决定工厂的生产计划要用数学，计算单位时间城市之间电话通话次数要用数学，甚至揭示蜜蜂筑巢的秘密也要用数学. 相信学生在接触数学建模之后，数学在他们眼中会更有趣，更贴近生活，从而培养起他们在实际工作中应用数学的意识和能力.

为了准备高考，学校的教学计划安排得非常紧张，在这种情况下，再对学生进行数学建模能力训练，看起来，一是加重学生负担，二是影响学生准备高考. 其实，这种担心大可不必.

首先，数学建模能够提高学生学习数学的兴趣. 兴趣是最好的老师，学生如果对数学有兴趣，可能花很少的时间就能学好它；如果没有兴趣，即使成天陷在题海之中也未必能学好. 数学建模因为贴近实际生活，有较强的趣味性，学生容易对其产生兴趣，这种兴趣又能激发学生去更努力地学习数学.

其次，学习数学建模同样对学生参加高考有帮助. 当前，中学教育正由应试教育向素质教育转变，为配合这种转变，高考也越来越强调考核学生的能力，尤其是考核学生运用数学知识解决实际问题的能力，1995 年的高考中出现了一道关于淡水鱼市场价格的应用题（见本书第八章第四节），分值达到 12 分，这两年的高考也都有类似的应用型大题出现. 由于平时缺少这方面的训练，考生普遍失分很多. 如果平时能有意识地经常从题海中跳出来，掌握一些数学建模方面的知识，他们解决这类问题就会容易得多，这应该叫做“磨刀不误砍柴工”.

正是因为这些原因，一些地方开始举办中学数学建模竞赛.例如，从1991年起上海市举办了“金桥杯”中学生数学知识应用竞赛，北京市从1993年起举办“方正杯”中学生数学知识应用竞赛.需要说明的是，数学竞赛和数学建模竞赛并不是一回事.它们都要求学生具有较高层次的数学能力，但两者着重点不同，前者偏重于基础，后者偏重于应用.通俗地讲，数学竞赛培养未来攀登基础数学高峰的数学家，数学建模竞赛则培养在实践中用数学的数学技术专家.

讲了这么多，无非想说明上面提出的观点：对中学生进行数学建模能力的训练是非常必要和有益的.正是因为这一点，我们认为这本书的出版是一件很有意义的事情.中学数学建模是一项刚刚兴起的数学活动，教师、学生普遍希望有一本浅显易懂，适合中学生水平的辅导材料，但目前这种材料又极少.本书力求在中学生知识许可的范围内，向中学生介绍数学建模的概念、常用方法以及丰富有趣的建模实例.我们真诚希望这本书能够满足读者朋友们的需求，为教师读者讲授数学建模，中学生读者学习数学建模提供有益的帮助.

由于中学开展数学建模教学是一种新的尝试和探索，建立中国的数学建模教学体系没有现成的经验可以借鉴，因此笔者在本书中尝试建立的中学数学建模教学框架是初步的、不完善的，希望广大读者在使用中多批评、多指正，共同努力完善这个框架.书中引用资料大多源自国外，部分出自国内，由于多种原因，未注明出处，诚望谅解，深表感谢.

在本书的写作过程中，得到了华东师范大学张奠宙教授（数学家、数学教育家、国际数学教育委员会执行委员）、唐瑞芬教授和赵小平老师，广东教育学院苏式冬教授，苏州大学徐稼红老师以及上海黄浦区教育学院朱成杰副教授的关心和帮助，并得到了江苏教育出版社领导王建军的大力支持，在此一并表示衷心的感谢.

1997年8月

# 目　录

# 第一章　数学建模概述

数学建模或数学模型是今天科技工作者经常使用的一个名词.现代社会是信息社会,信息量空前膨胀,信息交流空前频繁,现代科学技术发展的一个重要特征是各门学科日益定量化、精确化.这必然促使人们定量地思维,而定量化思维的核心是数学,人们可以通过建立数学模型,分析求解,使问题条理化,从而进行定量化思维.随着科学技术的飞速发展和电子计算机的不断进步以及广泛应用,数学的应用领域日益扩大,早已超越了传统的物理、力学、工程领域,逐渐渗透到生物、化学、医学、气象、人口、生态、经济、管理领域和社会生活的其他各个方面.与此同时,很多部门又涌现出大量的数学问题,等待人们去研究.

向中学生介绍数学建模是本书的主题.重点是讨论如何建立数学模型(简称"数学建模"或"建模"),学习怎样从遇到的实际问题出发,进行抽象和假设,运用数学工具得到一个数学结构,然后再通过数学上的这个结构去揭示实际问题的真面目.

本章将介绍数学建模的有关概念以及大致的分类,通过实例说明数学建模的一般步骤和原则,最后总体介绍数学建模的意义、特点与学习方法.

## 第一节 数学建模

数学是什么，恩格斯指出，“数学是关于现实世界的空间形式和数量关系的科学”. 现实世界是数学的丰富源泉，也是数学应用的归宿. 社会生活中，当人们面对一个实际问题时，往往不是直接就现实材料本身寻找解决问题的办法，而是经过一番必要而且合理的简化和假设，恰当地运用数学工具得到一个数学结构，通过数学上的这个结构研究实际问题. 也就是把现实问题抽象为一个数学问题，并又合理地返回到实际中去，这个过程就是数学建模(Mathematical Modelling)，其中的数学结构或框架就是数学模型(Mathematical Model). 不过人们常常将数学建模与数学模型不加以区别，认为是同义语，其实两者是有区别的.

模型本是一个普通的名词，大家并不陌生. 按《辞海》的解释：模型是“根据实物、设计图或设想，按比例、生态或其他特征制成的同实物相似的物体”. 例如，地理课上使用的地球仪和地图是地球表面的模型，温度计中的水银柱是温度的模型，深圳的“锦绣中华”是中国许多名胜古迹模型的集合，北京的世界公园是世界上许多名胜的模型的集合. 一般地说，模型相对于具体物体而言，有四个基本的性质：目的性、清晰性、准确性、经济性. 把所研究的对象变为模型的过程就称之为建模或者说是模型化.

按模型的表达形式，模型大致地可分为实体模型和符号模型两大类：

一是实体模型，它主要包括：(一) 实物模型. 例如，大楼建筑模型，军事作战用的沙盘，三峡截流模型等，它们仅仅将现实物体的尺寸加以改变，看起来逼真 .(二)模拟模型. 例如，电路图、地图

等，它们在一定假设之下，用形象鲜明、便于处理的一系列符号代表现实物体的特征.

二是符号模型，也称语言模型，这是模型中最具魅力的一大部分. 通常包括数学模型、仿真模型和化学、音乐等学科的符号模型，也包括用自然语言（例如汉语、英语等语言）对事物所作的直观描述.

如果说实体模型不过是现实世界的放大和缩小，在某种程度上只是起着便于观察和研究的作用的话，那么符号模型，则是对现实世界简约的但是本质的描述. 在人类历史的长河中，符号模型对生产力的发展起着无法估量的作用. 今天，如果没有符号模型（特别是数学模型），许多基本的生产活动便无法进行，更不要说计算机的应用了.

数学模型不同于一般的模型. 数学模型是指对于现实世界的某一特定对象，为了某个特定的目的，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构. 它或者能够解释特定现象的现实性态，或者能预测对象的未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制. 数学建模就是利用数学语言模拟现实，即把事物或某事物所在的系统的主要特征、主要关系，用数学语言概括地、近似地表达成一种数学框架（Framework），也就是数学模型. 数学模型是对客观事物的空间形式和数量关系的一个近似的反映.

按广义理解，一切数学概念、数学理论体系、数学公式、方程以及算法系统都可称为数学模型. 因为人们实际生活中计数的需要，算术产生了，算术正是分享猎物、计算盈亏等实际问题的数学模型；方程是表示平衡关系的数学模型；函数是表示物体变化运动的数学模型；几何则是物体空间结构的数学模型.

事实上，数学模型可以粗略地分为三类：

（一）概念型数学模型. 例如，实数、集合、函数、向量等数学概

念；

（二）方法型数学模型. 例如，各种方程、公式、运算法则，以及列表、图等等；

（三）结构型数学模型. 例如，整数数系、实数数系等数学结构.

按狭义的理解，数学模型是指解决特定问题的一种数学框架或结构. 这一框架或结构可以用一组方程来表示，更一般地可以用数学解析式表示，但是也可以用程序语言、图形等表示. 例如，二元一次方程是"鸡兔同笼"问题的数学模型，一次函数是匀速直线运动的数学模型. 这类数学模型如果是某种方法型模型或结构型模型的子模型，则可以利用已有的数学理论来解. 如果不是已有模型的子模型，则它就是一种新的数学模型，就需要逻辑地建立起它的理论，倘若所研究的问题具有普遍性，而又能建立起成熟的理论，那么就会在数学上取得很大的成就. 在应用数学中，数学模型一般都是指后面这一类，也是我们主要研究的.

我们一般是按狭义理解数学模型的，那么数学模型的特征是什么呢？

第一，它是在某事物中为达到一些特殊目的而作的一个抽象化、简单化的数学结构. 这意味着在建模过程中，必须对整个事物进行扬弃、筛选，舍弃次要因素，突出主要因素，找出事物最本质、最核心的部分. 它是事物的一种模拟，但非实际的原型，虽然源于现实，但又高于现实.

第二，它是数学上的抽象，在数值上可以作为公式应用，可以推广到与原事物相近的一类问题中去.

第三，数学模型可以作为某事物的数学语言，也可以译成算法语言，编写成程序进入计算机操作.

在本节的最后，我们给数学建模下个定义：数学建模就是找出具体问题的数学模型，找出数学模型的解，验证数学模型解的全过程.

## 第二节　建模实例

本节我们将介绍两个数学建模的例子，通过这两个例子，我们可以感受到什么是数学建模，面对一个具体问题，科学家是如何进行数学建模的.

**例 1-2-1**　兔子繁殖问题

中世纪西欧经济开始繁荣，到东方经商的西方商人逐渐增多，其中意大利比萨的一位名叫伦纳德，绰号为斐波那契(Fibonacci，1180—1250)的人在到东方旅行之后，受到东方和阿拉伯的数学影响，于 1202 年出版了一本《算盘之书》. 斐波那契是中世纪欧洲最杰出的数学家，在这本著作中，他提出下面一个有趣的问题：

如果兔子在出生后的第二个月开始生小兔子，每一对兔子一个月繁殖一次，一次只生一对小兔子(一雄一雌). 假定中间不发生任何死亡事件，那么一对新生的兔子在一年后能繁殖多少对？

根据图 1-2-1 所示的繁殖过程，我们来计算一下：

第一个月，只有一对小兔子；

第二个月，小兔子未成熟不会生殖，仍只是一对；

第三个月，这对兔子生了一对小兔子，所以这里共有两对；

第四个月，老兔子又生了一对小兔子，而上个月出生的小兔子还没有成熟，这时共有三对；

如此下去，可以用表 1-1 得出下面的结果.

**表 1-1**

| 月份 | 去年 12 月 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 兔子数(对) | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | 233 | … |