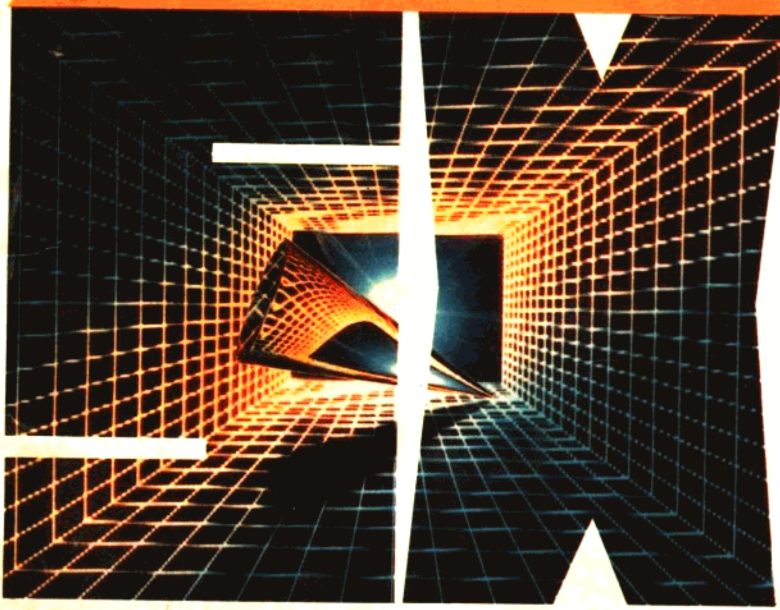
高中数学解题

方法与技巧

汪江松　编

★ 数理化解题方法与技巧丛书 ★



湖北教育出版社

[illegible]化解题方法与技巧丛书

高中数学解题方法与技巧

汪江松　编

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

数理化解题方法与技巧丛书

高中数学解题方法与技巧　　© 汪江松　编

出版发行：湖北教育出版社　　汉口解放大道新育村 33 号　邮编：430022　电话：85830435

经　销：新　华　书　店

印　刷：湖北教育出版社印刷厂　（433100·潜江市环城路 62 号）

开　本：787×1092mm　1/32　　14 印张

版　次：1995 年 8 月第 1 版　　1998 年 10 月第 8 次印刷

字　数：319 千字　　印数：133 001—138 000

ISBN 7—5351—1704—X/G·1392　　定价：12.00 元

说　　明

为了帮助广大中学生提高科学思维的能力，熟练运用各种解题方法与技巧，根据现行教学大纲的要求，紧扣现行中学数理化各科教材，我们编写了这套《数理化解题方法与技巧丛书》.

本册《高中数学解题方法与技巧》为这套丛书中的一种. 本书按"常用的数学思想方法"和"热点专题方法技巧"两个部分进行展开. 其中常用的数学思想方法，从思维的角度，分为九章，系统地揭示了那些常被"神化"了的破题"灵感"和"技巧"，并辩证地阐述了解题过程中转化和变通的常用方法，不但能使人知其然，而且能知其所以然，极便读者掌握和运用. 而热点专题方法技巧，则是根据各个专题的自身特点，全面地归纳总结出该专题常用的方法技巧. 这样全书从思维方法和知识系统两个方面构成网络来揭示整个高中数学解题中的主要方法和技巧，不但脉络清晰，便于掌握，而且覆盖全面，实用性强. 为了便于读者巩固和运用这些方法，各章章末均配有适量的习题. 在例题、习题中，历年的高考试题和竞赛试题占有一定的比例.

本书主要由汪江松先生撰写，曹衍清、王宪生、叶国祥老师承担了部分编写任务.

如果本书能为莘莘学子摆脱题海之苦、减轻学习负担、提高他们的数学能力作点贡献，我们将倍感欣慰.

对本书中的不妥之处欢迎读者批评指正.

汪江松

1994 年 8 月于武昌

目　　录

常用的数学思想方法

热点专题方法技巧

第一章　函数思想

函数是高中数学的重要内容之一，其理论和应用涉及各个方面，是贯穿整个高中数学的一条主线．函数思想，系最重要的、最基本的数学思想方法之一，可见它在整个高中数学中的地位和作用．我们这里所说的函数思想是指运用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题．为节省篇幅，本章仅侧重于对那些本身无明显的函数关系的问题，通过类比、联想、转化，合理地引进函数，并通过对所引进的函数的研究，使问题得以解决．

1.1　利用函数的定义域和值域

【例 1】 已知方程 $ax^2+2(2a-1)x+4a-7=0$ 中，a 为正整数，问 a 取何值时，方程至少有一个整数根．

分析 若用求根公式解出 $x=\dfrac{1-2a\pm\sqrt{3a+1}}{a}$ 来讨论 x 的整数值，将十分繁难．不妨把 a 表成 x 的函数来试试．

解 将原方程改写为

$$a(x+2)^2=2x+7 \qquad (*)$$

显然，当 $x=-2$ 时，$(*)$式不成立．

$$\therefore\quad a=\frac{2x+7}{(x+2)^2}\quad (x\neq-2) \qquad (**)$$

若要 a 为正整数，则须　$2x+7\geqslant(x+2)^2$

解得　$-3\leqslant x\leqslant1$（$x\in Z, x\neq-2$）

$\therefore$ x 只能在 $-3,-1,0,1$ 中取值.

代入(* *)式中可知,仅当 $x=-3$,$x=-1$ 和 $x=1$ 时能保证 a 为正整数. 此时分别有 $a=1$ 和 $a=5$.

故当 a 为 1 或 5 时原方程至少有一个整数根.

注 本来原方程中的变元是 x,a 为参数,解题过程中我们"反客为主",将方程表示成为 a 的函数关系式(* *),这种将参数和未知数等同看待的思想是函数思想的思维特征之一.

【例 2】 设对于任意实数 x,不等式

$$x^2\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0$$

都成立. 求实数 a 的取值范围. (1987 年全国高考试题)

解 原不等式可化为

$$x^2\log_2\frac{8(a+1)}{2a}-2x\log_2\frac{a+1}{2a}+2\log_2\frac{a+1}{2a}>0$$

即
$$3x^2+(\log_2\frac{a+1}{2a})(x^2-2x+2)>0$$

显然 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$

$$\therefore \quad \log_2\frac{a+1}{2a}>\frac{-3x^2}{(x-1)^2+1} \qquad (*)$$

令 $\dfrac{-3x^2}{(x-1)^2+1}=f(x)$,易见 $f(x)\leqslant 0$

$\because$ 原不等式对任意实数 x 成立,不妨取 $f(x)=0$

$\therefore$ $\log_2\dfrac{a+1}{2a}>0$ 即 $1<\dfrac{a+1}{2a}$

$\therefore$ $0<a<1$

注 这里的变形是为了分离参数 a 与变元 x,最后运用变元 x 的函数的值域来求解. 若用原不等式判别式来求解,运算稍繁.

【例 3】 求使 $\lg(xy)\leqslant\lg a\cdot\sqrt{\lg^2x+\lg^2y}$ 对大于 1 的任意 x 与 y 恒成立的 a 的取值范围.

解 $\because$ $\sqrt{\lg^2x+\lg^2y}>0$ $(x>1,y>1)$

$\therefore$ 原不等式可变为

$$\lg a\geqslant\frac{\lg x+\lg y}{\sqrt{\lg^2x+\lg^2y}}$$

令 $f(x,y)=\dfrac{\lg x+\lg y}{\sqrt{\lg^2x+\lg^2y}}=\sqrt{\dfrac{(\lg x+\lg y)^2}{\lg^2x+\lg^2y}}$

$$=\sqrt{1+\frac{2\lg x\lg y}{\lg^2x+\lg^2y}}\quad(\lg x>0,\lg y>0)$$

$\because$ $\lg^2x+\lg^2y\geqslant2\lg x\lg y>0$

$\therefore$ $\dfrac{2\lg x\lg y}{\lg^2x+\lg^2y}\leqslant1$

$\therefore$ $1<f(x,y)\leqslant\sqrt{2}$

故 $\lg a\geqslant\sqrt{2}$，$a\geqslant10^{\sqrt{2}}$

注 上述三例均是先分离参数，视参数为变元的函数，然后依变元函数的定义域或值域来求解.

1.2 利用函数的单调性

函数的单调性，对具体函数通常并不难判别. 对有些数学问题，若能与函数的单调性联系起来，常能获得简捷、直观的解法.

【例 4】 解方程：$3^{\sqrt{5x-2y}}+5^{\sqrt{y-5}}=2$

解 $\because$ $y=a^x(a>1)$在 R 上是增函数

且 $\sqrt{5x-2y}\geqslant0$，$\sqrt{y-5}\geqslant0$

$\therefore$ $3^{\sqrt{5x-2y}}\geqslant3^0=1$，$5^{\sqrt{y-5}}\geqslant5^0=1$

$\therefore$ $3^{\sqrt{5x-2y}}+5^{\sqrt{y-5}}\geqslant2$ $\quad(*)$

当且仅当$\begin{cases}\sqrt{5x-2y}=0\\\sqrt{y-5}=0\end{cases}$时$(*)$式取等号.

解得$\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$为原方程的解.

注 依函数的单调性及值域获得(*)式是关键的一步.

【例 5】 解不等式:

$$(x^2-20x+38)^3+4x^2+152<x^3+84x$$

解 原不等式变形为

$$(x^2-20x+38)^3+4(x^2-20x+38)<x^3+4x$$

令 $f(x)=x^3+4x$,原不等式即为

$$f(x^2-20x+38)<f(x) \qquad (*)$$

因为函数 $f(x)=x^3+4x$ 在 $x\in R$ 上单调递增,所以不等式(*)与

$$x^2-20x+38<x$$

同解.

解此不等式,得 $2<x<19$

注 这里运用函数的单调性,将函数值不等式 $f(X)<f(x)$,转化为其同解不等式 $X<x$ 来解,使问题化繁为简.其中根据题目的特殊性构造出恰当的函数是关键.

【例 6】 已知 $a,b,c\in R^+$,且 $a+b+c=1$.

求证:$abc+\frac{1}{abc}\geqslant 27\frac{1}{27}$.

证明 令 $f(x)=x+\frac{1}{x}$,取 $0<x_1<x_2<1$.

则 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)+(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1})$

$$=(x_2-x_1)(1-\frac{1}{x_1x_2})<0$$

∴ $f(x)$在$(0,1)$上为减函数.

又 $abc\leqslant(\frac{a+b+c}{3})^3=\frac{1}{27}$

∴ $f(abc)\geqslant f(\frac{1}{27})$

故 $abc+\frac{1}{abc}\geqslant 27+\frac{1}{27}=27\frac{1}{27}$

注 当所构造的函数增减性不明时，先应判定其所在定义域上的增减性.

【例 7】 证明：对于一切大于 1 的自然数 n，恒有

$$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2n-1})>\frac{\sqrt{1+2n}}{2}$$

分析 对这类问题，我们可以看成是变量为自然数 n 的函数，又原不等式等价于

$$\frac{(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2n-1})}{\sqrt{1+2n}}>\frac{1}{2}$$

证明 令 $f(n)=\dfrac{(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2n-1})}{\sqrt{1+2n}}$

$(n=2,3,\cdots)$

则 $f(n+1)=\dfrac{(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2n-1})(1+\frac{1}{2n+1})}{\sqrt{1+2(n+1)}}$

$(n=2,3,\cdots)$

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{(1+\frac{1}{2n+1})\sqrt{1+2n}}{\sqrt{2n+3}}=\frac{2n+2}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$$

$$=\frac{2(n+1)}{\sqrt{4(n+1)^2-1}}>1 \qquad (n=2,3,\cdots)$$

$\therefore$ $f(n+1)>f(n)$

即 $f(n)$ 是单调增函数 $(n=2,3,\cdots)$.

又 $f(2)=\dfrac{1+\frac{1}{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{16}{45}}>\sqrt{\dfrac{16}{64}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 当 $n=2,3,\cdots$ 时，恒有 $f(n)>\frac{1}{2}$.

故 $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2n-1})>\frac{\sqrt{1+2n}}{2}$

$(n=2,3,\cdots)$

注 对有关数列问题及涉及以自然数 n 为变量的问题，常可视为函数 $f(n)$，然后同 $f(x)$ 一样判定其单调性. 这里用的是比值法判定其单调性.

1.3 利用函数的奇偶性

【例 8】 解方程 $(5x+3)^3+x^3+6x+3=0$.

解 将方程改写成

$$(5x+3)^3+(5x+3)=-(x^3+x)$$

令 $f(x)=x^3+x$，则 $f(x)$ 为奇函数，且在 R 上单调增.

原方程即为 $f(5x+3)=-f(x)=f(-x)$

由 $f(x)$ 的单调性知，其对应法则 f 是一一对应的.

故 $5x+3=-x$

得 $x=-\frac{1}{2}$，即 $x=-\frac{1}{2}$ 为原方程的解.

注 这里运用函数的奇偶性及单调函数一一对应的关系将复杂的高次方程化归为简单的一元一次方程来求解.

【例 9】 已知 $(4x+y)^7+x^7+5x+y=0$. 求 $5x+y$ 的值.

解 条件等式可变形为

$$(4x+y)^7+(4x+y)=-(x^7+x)$$

令 $f(x)=x^7+x$，上式即为

$$f(4x+y)=-f(x)$$

易见 $f(x)$ 为奇函数.

$\therefore$ $f(4x+y)=f(-x)$