赵小云 著

奥林匹克数学
方法与解题研究

科学出版社
www.sciencep.com

奥林匹克数学

方法与解题研究

奥林匹克数学方法与解题研究

赵小云 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书对数学奥林匹克的历史和发展,奥林匹克数学及其特征,奥林匹克数学与数学教育,奥林匹克数学的内容和方法,以及数学奥林匹克命题理论和数学奥林匹克解题理论等方面进行了系统研究和探讨.全书内容丰富,观点鲜明.

本书可供高等师范院校的数学系师生、从事数学奥林匹克教学和研究的人员以及中学数学教师和数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学方法与解题研究/赵小云著.—北京:科学出版社,2005
ISBN 7-03-014731-6

Ⅰ.奥…　Ⅱ.赵…　Ⅲ.数学课-中小学-教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 130881 号

责任编辑:吕　虹　张邦固/责任校对:钟　洋
责任印制:钱玉芬/封面设计:王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2005 年 7 月第 一 版　开本:B5(720×1000)
2005 年 7 月第一次印刷　印张:18 1/2
印数:1—3 000　字数:363 000

定价:38.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序

随着数学奥林匹克的发展，在我国，各类不同程度、不同层次的数学奥林匹克活动已成为广大中小学生一项重要的课外活动.数学奥林匹克对于提高广大学生学习数学的兴趣，对于促进中小学数学教育水平的提高，对于选拔出一批具有良好数学素质的优秀学生都会产生极大的作用和影响.奥林匹克数学的研究也已成为数学教育的重要课题，奥林匹克数学理论正逐渐成为一门独立的数学教育分支.本书对数学奥林匹克的历史和发展，奥林匹克数学及其特征，奥林匹克数学与数学教育，奥林匹克数学与数学方法论，以及奥林匹克数学命题理论和奥林匹克数学解题理论等方面进行了系统的研究和探讨.

近几年来，随着《中国教育改革和发展纲要》的颁布，实施素质教育，提高整个民族的素质已被人们高度关注.数学是一切科学的基础，在当今科学技术高度发达的信息社会中，数学文化素养已成为每一个公民，以至于整个民族文化素养的重要内容和标志.作者相信，数学奥林匹克的健康发展，必将给数学教育的繁荣和发展带来深刻的作用和影响.

本书是作者十余年来从事奥林匹克数学的教学与研究工作之结晶.本书的出版得到了科学出版社的大力支持和帮助，在此作者表示衷心的感谢.

作　者

2004年10月

目　　录

上篇　原理和方法篇

第一章　数学奥林匹克的历史和现状 …………………………… 3
1. 数学奥林匹克简史 …………………………… 3
1.1 数学奥林匹克起源 …………………………… 3
1.2 前苏联及俄罗斯数学奥林匹克 …………………………… 4
1.3 国际数学奥林匹克 …………………………… 4
1.4 美国数学奥林匹克 …………………………… 5
1.5 中国的中学数学奥林匹克 …………………………… 5
2. 中国在IMO中的崛起 …………………………… 6
3. IMO的发展与未来 …………………………… 7
第二章　奥林匹克数学及其特征 …………………………… 9
1. 奥林匹克数学是高等数学与初等数学之间的数学 …………………………… 9
2. 奥林匹克数学是现代数学与中学数学之间的桥梁 …………………………… 15
3. 灵活性和创造性是奥林匹克数学的精髓 …………………………… 17
第三章　数学奥林匹克在数学教育中的地位和作用 …………………………… 28
1. 有益于人才的发现和培养 …………………………… 28
2. 激发了青少年学习数学的兴趣,具有开发智力和创造力的深远意义 …………………………… 29
3. 促进和推动了数学教育的改革和发展 …………………………… 30
3.1 促进了中学数学教师的知识更新,是提高数学教师业务素质的重要途径 …………………………… 30
3.2 促进了数学第二课堂的开展,有利于发展学生个性 …………………………… 30
3.3 促进了中学数学课程的改革和现代化 …………………………… 31
3.4 对中学数学教学改革具有导向和推动作用 …………………………… 32
4. 丰富了初等数学研究的内容和数学解题理论 …………………………… 32
第四章　奥林匹克数学的内容和方法 …………………………… 66
1. 多项式问题 …………………………… 66
1.1 基本内容 …………………………… 66
1.2 方法评析 …………………………… 69
2. 数列与递归 …………………………… 73

2.1 基本内容 …… 73
2.2 方法评析 …… 74
3. 函数方程 …… 79
3.1 基本内容 …… 79
3.2 方法评析 …… 79
4. 极值和不等式问题 …… 85
4.1 基本内容 …… 85
4.2 方法评析 …… 87
5. 数论问题 …… 96
5.1 基本内容 …… 97
5.2 方法评析 …… 98
6. 几何问题 …… 103
6.1 基本内容 …… 104
6.2 方法评析 …… 105
7. 组合数学 …… 112
7.1 基本内容 …… 112
7.2 方法评析 …… 113
第五章 奥林匹克数学命题研究 …… 119
1. 数学奥林匹克的命题原则 …… 119
1.1 科学性 …… 119
1.2 目的性 …… 122
1.3 适应性 …… 124
1.4 创新性 …… 125
2. 数学奥林匹克的命题方法 …… 127
2.1 演绎法 …… 127
2.2 基本量法 …… 129
2.3 陈题改造 …… 131
2.4 移用科研成果 …… 136

下篇 解题研究篇

第一章 集合与函数 …… 141
1. 集合 …… 141
2. 充要条件 …… 150
3. 映射与函数 …… 155

4. 函数的性质 …… 158
5. 二次函数 …… 162
第二章　数列 …… 167
1. 数列及其求和 …… 167
2. 数学归纳法 …… 176
第三章　三角函数 …… 179
第四章　方程与不等式 …… 184
1. 方程 …… 184
2. 不等式的解法 …… 188
3. 不等式的证明 …… 190
4. 不等式的应用 …… 193
5. 极值问题 …… 196
第五章　直线与圆的方程 …… 204
第六章　圆锥曲线方程 …… 209
第七章　立体几何 …… 222
第八章　排列与组合 …… 240
第九章　复数 …… 246
第十章　数论初步 …… 256
第十一章　平面几何 …… 260
第十二章　杂题 …… 277
主要参考文献 …… 287

上篇

原理和方法篇

第一章 数学奥林匹克的历史和现状

1. 数学奥林匹克简史

1.1 数学奥林匹克起源

解题的竞赛在数学发展的历史过程中由来已久．但是，像今天这样为激发中学生的学习兴趣，发现和选拔人才，由中学生自愿参加的数学竞赛，通常认为始源于匈牙利．

1894 年，为了祝贺匈牙利著名数学家，全国数学协会主席埃特沃斯（L. Eotvos）教授担任匈牙利教育大臣，匈牙利物理-数学协会举办了第一届中学生数学竞赛．从此以后，除了由于两次世界大战和匈牙利事件间断过 7 年以外，每年举行一次，一直沿袭至今．

匈牙利数学竞赛在每年 10 月举行，每次考试共 3 个试题，限参赛者在 4 小时内完成，允许使用任何参考书．匈牙利许多著名数学家和学者都参与了数学竞赛的辅导和命题．

匈牙利数学奥林匹克是世界上最有影响的数学奥林匹克之一．其试题新颖、别致，独具风格，充分体现了灵活性和创造性的思维，中学生用学过的初等数学知识就可解答，但又涉及许多高等数学课题的背景．例如，1947 年的匈牙利数学奥林匹克中有这样一个问题：

问题 1-1 证明：在任意 6 个人中，总有 3 人相互认识或相互不认识．

此题的背景是图论中的拉姆齐（Ramsey）数问题：给定正整数 t，求这样的正

整数 r_t,使得当 $n\geqslant r_t$ 时,任何一个 t 色完全图 k_n 中都有单色三角形,而当 $n<r_t$ 时,总存在这样的 t 色完全图 k_n,它不含有单色三角形.

数 r_t 称为拉姆齐数,问题 1-1 就是 $r_2=6$.

由于拉姆齐数问题是现代数学中的一个研究热点,1953 年在美国著名图论专家 Harary 的建议下,问题 1-1 又被选为美国普特南(Putnam)大学生数学奥林匹克试题.并在以后若干年中,被许多国家反复改造加以应用.1964 年的第 6 届国际数学奥林匹克(IMO)试题:

问题 1-2 17 个科学家中,每名科学家都和其他科学家通信,在他们通信时只讨论三个问题.而且任意两名科学家通信时只讨论一个问题.证明其中至少有三名科学家,他们互相通信中讨论的是同一个问题.

这便是 $r_3=17$,也是问题 1-1 的推广.

1.2 前苏联及俄罗斯数学奥林匹克

前苏联是开展数学竞赛活动比较早的国家之一.1934 年列宁格勒大学主办了列宁格勒中学生数学奥林匹克,首次将数学竞赛与奥林匹克体育竞赛相联系,称数学竞赛为数学奥林匹克,形象地揭示了数学竞赛是参赛选手间智力的角逐.1935 年莫斯科大学和基辅大学又分别主办了莫斯科数学奥林匹克和基辅数学奥林匹克.以后每年举行(除了在 1942 年至 1944 年中断过 3 年外),到 1962 年,开始举办全苏数学奥林匹克.

前苏联数学奥林匹克的特点是分年级进行,每个年级(七至十一年级)都是要求在 4 小时内解答 5 个试题.高年级的优胜者可被免试推荐进入大学.现在,俄罗斯(包括原苏联的其他国家)的数学奥林匹克活动已发展到包括小学生,中学生和大学生在内的各级各类数学奥林匹克.其中尤以中学数学奥林匹克活动开展得最为广泛和普遍.今天,俄罗斯是继匈牙利之后的又一富有实力的国家,在已举办的 41 届国际数学奥林匹克中总分 15 次居第一,名列各国之首.

1.3 国际数学奥林匹克

20 世纪以来,许多国家相继开展了数学奥林匹克活动.特别是东欧的一些国家,如罗马尼亚(始于 1902 年),保加利亚(始于 1949 年)等等.到 20 世纪 50 年代中期,许多国家已形成了学校,地(市),省,直至全国的不同级别的数学奥林匹克.为国际数学奥林匹克的举办奠定了良好的基础.

1956 年,在罗马尼亚的罗曼(Roman)教授的倡议下,东欧国家和苏联确定了举办国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad,简称 IMO)的计划.第一届 IMO 于 1959 年 7 月在罗马尼亚的布拉索(Brasov)市举行,以后每年举行一次(除 1980 年因东道国蒙古经济困难停办外),至今已举办了 41 届,参赛的国家也越来越多,第一届 IMO 仅有东欧的 7 个国家参加,如今参加的国家和地区已达 80 多个.

一年一度的 IMO 由各参赛国家或地区轮流主办,所需经费由主办国负担,整个活动由东道国设立的组织委员会领导.IMO 的业务由各国领队组成的主试委员会主持,主试委员会主席一般由东道国担任.

IMO 一般在每年 7 月进行,其试题的产生是由各参赛国家或地区事先提供一定数量的预选题(东道国不出题),然后由主试委员会选出 6 道题作为考试题.考试分两天进行,每试 4.5 小时,3 道试题,每题 7 分,两试满分为 42 分.参赛代表队的成员一般由正副领队和六名学生队员组成.

在 IMO 中起重要作用的是协调委员会,因为考试前由各国领队将试题译成本国的文字,并经协调委员会认可,而考试后各国的试卷也均由本国的正副领队批改,然后与协调委员会成员协商,如有分歧,由主试委员会仲裁,使评分标准保持一致.

IMO 的口号是:面向未来——为了人类的进步,其目的为鼓励更多的青少年成才.为此,IMO 的获奖人数多达参赛人数的一半,根据分数评选出金、银、铜牌三个等级的获奖者,其比例约为 1:2:3.此外,主试委员会还对某个试题做出了非常漂亮解答的选手给予特别奖.IMO 只举办个人赛,不举行团体赛,但每次竞赛后,仍列出团体总分的名次.

IMO 是世界公认的最高水平的数学竞赛,1980 年国际数学教育委员会(ICME)决定成立国际数学奥林匹克委员会作为其下设的一个专业委员会(IMO 委员会已于 1981 年 4 月正式成立).这不仅在组织上保证了 IMO 的正常进行,而且也意味着在学术上得到了国际数学教育委员会的确认,也就是说,关于数学奥林匹克的研究是数学教育中一个重要的研究课题.

1.4　美国数学奥林匹克

美国是参加 IMO 比较晚的国家,它于 1974 年才开始加入 IMO.然而在美国,数学竞赛已有十分悠久的历史.早在 1938 年,美国就有一个大学生的数学竞赛——普特南数学竞赛,美国中学生数学竞赛(AHSME)始于 1950 年,现在已成为一种国际性的竞赛,包括我国在内的许多国家都参加了这一竞赛.AHSME 通常在每年 2 月底或 3 月初的一个星期二举行,题目为 30 个选择题,考试时间为 90 分钟.自 1983 年开始又举办了美国数学邀请赛(AIME),通常在 3 月下旬的一个星期二举行,AIME 的题目为 15 个填空题,考试时间为 150 分钟.AIME 的优胜者可参加 5 月初举行的美国数学奥林匹克(始于 1972 年),美国数学奥林匹克(USAMO)共 5 个试题,考试时间为 3.5 小时,对 USAMO 中成绩最好的 20 名左右选手再进行三个星期的训练,从中选出 6 名学生作为美国队成员参加 IMO.

1.5　中国的中学数学奥林匹克

中国的中学生数学竞赛始于 1956 年,由已故著名数学家华罗庚教授倡导举

办.他亲自担任北京市数学竞赛委员会主任,并主持了命题工作,同年上海、天津、武汉也举办了数学竞赛.

中国的数学竞赛经历了曲折的道路.1958年以后的几年,由于国家处于经济困难时期,数学竞赛也被迫停止.1962年随着经济形势的好转,北京又恢复了数学竞赛,并在国内掀起了一个数学竞赛的浪潮.但是,1965年以后,由于文化大革命的原因,数学竞赛再度被迫中断十余年.直到1978年,数学竞赛第三次兴起,华罗庚教授再一次主持了全国八省市数学竞赛.1979年发展为除台湾省外的全国数学竞赛.

从1981年开始,中国的数学竞赛逐步纳入轨道.1981年中国数学会制定了"中学生数学竞赛简章(草案)",并正式定名为"全国各省、市、自治区高中数学联合竞赛",同时确定每年在10月中旬的第一个星期天举行全国高中数学联赛.从此,我国的数学竞赛活动得到了蓬勃发展.1985年全国初中数学联赛开始举行,1990年又举办了全国小学生数学奥林匹克.

2. 中国在IMO中的崛起

1985年,我国首次派出两名选手参加第26届IMO,以了解情况,取得经验.结果获得了一枚铜牌,成绩属中下水平.为了提高我国选手的参赛水平,自1986年开始,中国数学会决定每年1月份由中国数学会普及工作委员会、中国数学奥林匹克委员会和北京大学等四所重点大学联合举办全国中学生数学冬令营.冬令营的参加者为各省市在全国高中数学联赛中的优胜者(大约80余人,一般每省市至少有一个名额).自1991年起,冬令营又定名为"中国数学奥林匹克"(简称CMO),CMO的考试类似于IMO:考试分两天进行,每试3个题,时间为4.5小时,每题21分,二试满分126分.由CMO选拔出20余名选手组成国家集训队,然后经过集训选出6名队员组成国家代表队参加IMO.

1986年,我国选派了6名选手正式组队参加第27届IMO,中国队取得了总分第四名的好成绩.以后几年我国在IMO中都取得了好成绩.1989年我国代表队在第30届IMO中第一次获得了总分第一,1990年我国又成功地举办了第31届IMO,第31届IMO也是IMO第一次在亚洲国家举行,我国选手又一次获得了总分第一的优异成绩.

表1.1是我国在26～41届IMO中的获奖情况(见表1.1).

我国参加IMO的历史虽然不长,但是,我国中学生参加IMO所取得的优异成绩表明,我国已进入IMO的强国之列.

表 1.1

届 次	时 间	地 点	代表队人数	团体名次	金牌数	银牌数	铜牌数
26	1985.7	芬 兰	2	32	0	0	1
27	1986.7	波 兰	6	4	3	1	1
28	1987.7	古 巴	6	8	2	2	2
29	1988.7	澳大利亚	6	2	2	4	0
30	1989.7	联邦德国	6	1	4	2	0
31	1990.7	中 国	6	1	5	1	0
32	1991.7	瑞 典	6	2	4	2	0
33	1992.7	俄罗斯	6	1	6	0	0
34	1993.7	土耳其	6	1	6	0	0
35	1994.7	中国香港	6	2	3	3	0
36	1995.7	加拿大	6	1	4	2	0
37	1996.7	印 度	6	6	3	2	1
38	1997.7	阿根廷	6	1	6	0	0
39	1998.7	中国台湾					
40	1999.7	罗马尼亚	6	1	4	2	0
41	2000.7	韩国	6	1	6	0	0

注:由于众所周知的原因,1998 年我国未派队参赛.

3. IMO 的发展与未来

IMO 源于东欧,前五届(1959～1964)的参赛队全部是欧洲国家. 自第 6 届至第 12 届非欧洲参赛队仅有一个亚洲的蒙古,而欧洲最多有 13 个国家参赛. 自第 23 届以后,欧洲以外的参赛队数目逐渐增加,在第 29 届时,非欧洲参赛队数目总和(共 26 个)第一次超过欧洲参赛队数(23 个). 以后几年中世界各大洲参赛的国家和地区越来越多,特别地,到 2000 年第 41 届时,全世界共有 82 个队参赛,遍布五大洲的各个国家和地区. 参赛队数目的增长表明,IMO 已被越来越多的国家和地区所接受,IMO 的成绩和水平正逐渐成为评价 21 世纪教育和科学技术发展水平的标志之一. 可以预言,在今后的 IMO 中,参赛队数目还会逐渐增加,特别是发展中国家的参赛队数目将继续增加.

综观 IMO 的产生、发展和壮大,欧洲的 IMO 水平具有明显优势,而亚洲的

IMO水平则也在迅速提高.表1.2是1994～2000年(35届～41届)IMO团体总分前六名的排名情况.

由表1.2可以看出,尽管亚洲的IMO起步较晚,但其发展水平稳步提高.除中国队外,像越南、伊朗、韩国等队的IMO水平也已进入世界强国之列.由于目前欧洲参赛国已占欧洲国家总数的70%以上,他们基本代表了欧洲数学奥林匹克的发展水平.可以预测:欧洲的IMO水平的高峰已经过去,欧洲整体的IMO水平将处于一个相对稳定的状态,而亚洲的IMO水平正进入一个高速发展的鼎盛时期.除此之外,美洲的美国、加拿大等队仍将保持IMO的强国水平,而其余各洲也将处于相对平稳的状态.

表1.2

名次 国家 年份	第一名	第二名	第三名	第四名	第五名	第六名
1994(35届)	美国	中国	俄罗斯	保加利亚	匈牙利	
1995(36届)	中国	罗马尼亚	俄罗斯	越南	匈牙利	保加利亚
1996(37届)	罗马尼亚	美国	匈牙利	俄罗斯	英国	中国
1997(38届)	中国	匈牙利	伊朗	美国(并列)保加利亚		乌克兰
1998(39届)	伊朗	保加利亚	匈牙利(并列)美国			
1999(40届)	中国(并列)俄罗斯		越南	罗马尼亚	保加利亚	白俄罗斯
2000(41届)	中国	俄罗斯	美国	韩国	越南(并列)保加利亚	

注:1998年(39届)中国未参加.

第二章 奥林匹克数学及其特征

随着数学奥林匹克的发展，已逐渐形成了一门特殊的数学教育分支——奥林匹克数学.前中国数学会理事长、中科院院士王元教授指出，将高等数学下放到初等数学中去，用初等数学的语言来表述高等数学的问题，并用初等数学的方法来解决这些问题，这就是奥林匹克数学的任务.

1. 奥林匹克数学是高等数学与初等数学之间的数学

奥林匹克数学主要包括数论、组合数学、多项式、函数方程、数列、不等式和几何等等.由此，奥林匹克数学所涉及的内容，并不包含高等数学，因为它不超出初等数学和中学数学所能接受的范围，但是它又不同于中学数学教材中的内容，因为它有许多高等数学的背景，采用了很多高等数学中的思想和方法，它包含着比中学数学更为广泛的知识，需要更为灵活的思维和技巧.

历年来的奥林匹克数学试题及备选题，它们最能代表奥林匹克数学的这一特点.

问题 2-1 函数

$$F(x)=|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B|$$

在$\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$上的最大值 M 与参数 A、B 有关.试问 A、B 取何值时 M 最小?

这是 1983 年全国高中数学联赛试题.它是由施咸亮教授提供的一个函数极值问题，其背景就是函数逼近论中的最佳逼近问题.