SHUXUE SIXIANGFANGFA YU ZHONGXUE SHUXUE

数学思想方法与中学数学

钱珮玲　邵光华　编著

北京师范大学出版社

数学思想方法与中学数学

钱珮玲　邵光华　编著

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学思想方法与中学数学/钱珮玲,邵光华编著.-北京:北京师范大学出版社,1999.7

ISBN 7-303-05027-2

Ⅰ.数… Ⅱ.①钱…②邵… Ⅲ.数学课-中学-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 11364 号

北京师范大学出版社出版发行

(北京新街口外大街 19 号 邮政编码:100875)

出版人:常汝吉

北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:850mm×1 168mm 1/32 印张:12.125 字数:300 千字

1999 年 7 月第 1 版 2000 年 3 月第 2 次印刷

印数:2 001 ~ 5 000 定价:15.00 元

内容简介

数学思想方法是以具体数学内容为载体，又高于具体数学内容的一种指导思想和普遍适用的方法. 它能使学生领悟数学的真谛，懂得数学的价值，学会数学地思考和解决问题，它能把知识的学习与培养能力、发展智力有机地统一起来. 本书通过化隐为显的数学思想方法的介绍，以及从数学科学的特点出发，对基于数学内容中的数学思想方法的提炼和挖掘，使读者更好地理解和掌握基本的数学思想方法，更有效地学习数学，应用数学. 全书分为上、下两篇，上篇共分五章，介绍数学解决问题的一般方法、数学化活动过程的一般方法、数学构建理论的一般方法、数学推理和证明方法等中学数学教与学中涉及的一些基本和常用的思想方法，并精选了适合于中学数学的典型例子；下篇共分六章，围绕中学数学内容，揭示近现代数学理论和思想方法与中学数学的有机联系，及其对中学数学的指导意义，充分展示了数学科学逐级抽象的特征.

本书可作为数学教育方向的研究生、研究生学位课程班、以及大学高年级“数学思想方法”课程的教材，也可作为广大中学教师和数学教育工作者的参考书.

序

这是一部论述数学教育和研究中的思想方法的书. 做任何事情,如果想事半功倍,就必须讲究方法.其实何止事半功倍,有时方法甚至起决定性作用. 缺乏有效的方法,不仅谈不上效率,而且问题不能解决,事情也就根本不能成功.数学是一门高度抽象而又计算精巧的学科,除了上计算机外,很少实验,主要依靠合理的思维. 这样,便更加加重了方法的分量. 在攻读数学时,必需讲究思想方法,学数学时如此,研究数学时更是如此. 数学大师们的许多宝贵经验,值得我们去挖掘、去学习、并运用到自己的实践中去.但是要自己去总结前人的经验,真是谈何容易,时间、能力和资料都未必容许,对青年学者更是如此. 因此,我们迫切希望有几部关于数学思想方法的好书. 本书就是其中之一,而且富有特色.

本书作者主要是研究数学教育的.他们给大学生、研究生多次讲授数学思想方法的课程. 每次开课,至少要讲一个学期,因此有足够充实的时间去搜集,去思考,去整理,经过反复修改,最后成书.因此,本书不是急就篇,而是经过长期积累、长期研究的智慧的结晶.

本书的目标是两重的.一是讨论了数学活动的一般规律,剖析了解决数学问题的一般方法,诸如化归方法、抽象方法、合情推理、数学建模等等. 这些构成本书上篇的内容. 下篇更富有本书的特

色：作者立足于近现代数学的高度，揭示近现代数学对中学数学的指导意义以及二者间的有机联系．这部分内容使本书有别于其它关于数学思想方法的著作．例如，作者从“如何度量海岸线”这一具体问题出发，引出分形几何的基本思想，从一维微分出发，将微分概念拓广到无穷维空间和微分流形上去，等等．

我们希望，本书将对大学和中学的老师和同学，对广大的数学爱好者，会有所启迪和助益．在数学教育中，也可考虑将本书用作大学生或硕士研究生的“数学思想方法”课程的教材或参考书．我们预祝本书获得成功，希望它成为数学教育方面的一部好书．

王梓坤

1998.12.23

前 言

数学教育作为教育的一个重要组成部分，在发展人、发展社会方面有着十分重要的作用．“今日数学及其应用”一文中精辟地指出了数学教育的价值和目标：“数学的贡献在于对整个科学技术(尤其是高新技术)水平的推进与提高，对科技人才的培养和滋润，对经济建设的繁荣，对全体人民科学思维的提高与文化素质的哺育．”总之，数学已成为现代社会的一种文化，数学的观念在众多不同层次上影响着我们的生活方式和工作方式．而数学思想方法，作为数学知识内容的精髓，是数学的一种指导思想和普遍适用的方法，是铭记在人们头脑中起永恒作用的精神和态度，数学的观点和文化．它能使人们领悟数学的真谛，懂得数学的价值，学会数学地思考和解决问题，它能把知识的学习和培养能力、发展智力有机地联系起来，这也正是人们重视数学思想方法有关问题研究的原因所在．

自20世纪80年代初，徐利治教授在大学数学系开设“数学方法论”课程以来，数学思想方法的研究不断深入，课程建设不断发展，目前各类数学方法论的著作大多从不同角度组织有关内容，人们也力图建立一个体系，例如考虑是否可按数学研究中的三个阶段来组织内容：1°实际问题数学化方法(包括观察、实验、归纳、类比、抽象化、模型化等方法)．2°数学材料逻辑化的组织方法(如公理化方法、结构方法等)．3°应用方法，但都尚未形成共识，不过有一点是肯定的，那就是任何一本书都不可能涉及所有的数学思想方法．

我们为本课程确定的目标是：1°研究数学活动的一般规律和

方法；2°领悟数学的精神、思想和方法，建立正确的数学观和数学教育观，提高数学素养，增强驾驭中学数学的能力；3°将数学思想方法与中学数学教学研究密切结合起来．据此，在内容的选择方面，侧重于数学活动的一般规律和方法（即上篇的内容），和近现代数学思想方法对中学数学的指导（即下篇的内容）．

上篇在全面简要介绍数学思想方法研究的内容和目的意义后，针对中学数学教与学中所涉及的基本和常用的思想方法，剖析了数学解决问题的一般方法——化归方法的基本思想和原则，化归的基本策略；数学化活动过程中的一般方法——抽象方法的主要方式和原则；数学的推理方法（包括数学发现和发明中的合情推理）和证明方法；构建数学理论的一般方法——公理化方法和结构方法．

下篇内容的选择有别于其它数学思想方法的著作，是本书的特点之一．它从中学数学内容出发，通过近现代数学中有关内容的阐述，揭示近现代数学与中学数学的有机联系，以及近现代数学思想方法对中学数学的指导．例如，我们将运算和函数这两个中学数学中的重要概念统一于“关系”之下展开讨论，并用关系的有关知识阐明了“复数为什么不能比较大小”的问题，以及用等价关系扩充数系、引出方向、自由向量等概念的思想方法．此外，通过对空间双重意义的剖析，从现实空间到各类抽象空间抽象过程的阐述，充分展示了数学逐级抽象的特征．通过分析定义概率的三种不同方式的不足之处，引出概率的公理化定义，在此基础上指出概率与实分析之间的有机联系，从而体现了公理化方法在构建数学理论中的作用和意义，从线段长度的度量到一般集合的度量，继而从“如何度量海岸线”问题，引出分形几何的基本思想方法．还通过对微分本质的揭示，将微分概念拓广到无穷维空间和微分流形上，等等．

本书上篇第二、三、四、五章初稿由邵光华提供，下篇第六章由

李占柄提供，其余部分和全书统稿由钱珮玲完成．全书内容曾给学科教学论研究生和研究生课程班多次讲授．诚然，我们的想法还不尽完善，但我们认为，数学思想方法是以数学内容为载体，基于数学知识，又高于数学知识的一种隐性的知识，一种数学的观点和方法，要在反复体验中才能认识、理解、掌握和运用，因此，教材内容的合理编排和高质量的教学设计是贯彻数学思想方法教学的基础和保证，我们愿与同行们一起努力探索数学思想方法教与学的有关问题，热切地期望听到读者的反馈信息，得到专家的指导帮助．

本书内容可以在60至72学时内学完，可采用讲授、自学、讨论相结合的方式进行，还可辅以对有关内容教学设计的探讨．

限于我们的水平，书中难免有不妥和谬误之处，诚恳地期望读者提出建议和批评意见．

衷心感谢中科院院士王梓坤教授为本书作序．

本书的出版得到了北师大出版社林水平、潘淑琴同志、数学系丁尔升先生和其他老师的热情支持和帮助，在此表示由衷的谢意！

目　　录

上　篇

第一章　数学思想方法简介

数学科学在本世纪得到了空前的发展，不仅表现在基础理论研究的广泛深入，论文爆炸；更表现在数学内部各学科之间，数学与其它科学的学科之间相互渗透的空前加强，除了熟知的自然科学之外，还有科学技术，人文、社会科学、以及哲学、文艺等方面. 数学的广泛应用不仅形成了一大批新的应用数学学科，而且在与计算机的结合过程中，形成了数学技术. 因此，数学不仅仍然发挥着基础理论和基础应用的重大作用，而且已成为现代社会中一种不可替代的技术，成为一个国家综合实力的重要组成部分. “国家的繁荣昌盛关键在于高新技术的发展和经济管理的高效率，高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学”这一观点已在世界范围内成为有识之士的共识.

因此，数学教育作为教育的一个重要组成部分，在发展人，发展社会方面有着极其重要的作用. “今日数学及其应用”一文中精辟地指出了数学教育的价值和目标：“数学的贡献在于对整个科学技术（尤其是高新技术）水平的推进与提高，对科技人才的培养和滋润，对经济建设的繁荣，对全体人民科学思维的提高与文化素质

的哺育”. 总之,数学已成为我们这个时代的一种文化,数学的观念在众多不同的层次上影响着我们的生活方式和工作方式. 而数学思想方法作为数学知识内容的精髓,是铭记在人们头脑中起永恒作用的数学的精神与态度,数学的观点与文化. 人们重视数学思想方法的提炼、概括和应用也就是顺理成章的事了.

§1 何谓数学思想方法

“数学思想方法”一词无论在数学、数学教育范围内,还是在其它科学中,已被广为使用. 中学数学教育大纲中明确指出数学基础知识是指:数学中的概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映出来的数学思想方法.

但是,什么是数学思想? 数学方法? 数学思想方法? 却不像数学中的概念那样可以明确地给出定义(至少目前不能),只能给出一种解释或界定.

我们认为,所谓数学思想是对数学知识的本质认识,是从某些具体的数学内容和对数学的认识过程中提炼上升的数学观点,它在认识活动中被反复运用,带有普遍的指导意义,是建立数学和用数学解决问题的指导思想. 例如:模型思想、极限思想、统计思想、最优化思想、化归思想、分类思想等.

数学方法是指在数学地提出问题、解决问题(包括数学内部问题和实际问题)过程中,所采用的各种方式、手段、途径等,其中包括变换数学形式. 例如,要求和:

$$\arctan 1+\arctan \frac{1}{3}+\arctan \frac{1}{7}+\cdots+\arctan \frac{1}{1+n+n^2}.$$

可考虑用分解组合的方法,变换问题的数学形式,注意到

$$\arctan \frac{1}{1+k+k^2}=\arctan \frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}.$$

联想正切的差角公式

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},$$

得到

$$\alpha-\beta=\arctan\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

再设

$$\tan\alpha=k,\ \tan\beta=k+1,$$

即可将原式变形为

$$\arctan 1+(\arctan 2-\arctan 1)+(\arctan 3-\arctan 2)+\cdots$$
$$+(\arctan n-\arctan(n-1))+(\arctan(n+1)-\arctan n)$$
$$=\arctan(n+1).$$

即使是重大的数学方法，也是从变换问题的数学形式中不断深入展开研究形成的．例如群论的产生和建立与代数方程的可解性问题，即五次以上代数方程没有根式解的问题直接相关．在此问题的研究过程中，从代数方程根与系数的韦达关系开始，到提出预解式和预解方程的概念，从二次、三次、四次代数方程根的层次结构形式，到一般高次代数方程如果存在根式解，则公式中必将包含由开方根运算构成的一些层次，应把解的公式中层次结构的形式同域的扩张概念联系起来，把每一层次的对应域的形成要素归结为预解式和预解方程的寻求，以及把预解式的寻求归结为置换群的各阶子群的结构分析等主要方法都是在不断变换问题的数学形式中逐渐深入展开，提炼概括形成的．

数学方法在实际运用时往往具有过程性和层次性的特点．

这是因为每一种数学方法总包含若干个环节，每个环节具有独特意义，环节之间又有一定关系．在上面第一个例子中，关键一步是变换形式

$$\arctan \frac{1}{1+k+k^2}=\arctan \frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}.$$

再联想正切的差角公式．取反正切函数，……一步一步地变换形式，直至问题解决．在第二个例子中，其过程性尤为明显，伽罗瓦的成功之处和重要功绩就是在“预解式和预解方程的寻求”这一环节上，他看到了预解式的构成并不存在明确的方法或法则，即使是特殊的方程，构造其预解式也需要很大的技巧．经过变换数学形式的深入研究，他设法绕过了预解式，对置换群提出了一系列重要概念（如：正规子群、单群、复群、以及群之间的同构等概念），并证明了一些基本定理，建立了方程可解性理论．

数学方法的层次性是由数学特点决定的，在全部数学内容中均包含着从客观现实到逐级抽象结果的不同层次，数学内容是数学方法的基础和载体，因此数学方法也有不同层次，当然，在不同层次间又有着交错的关系．就拿最简单的二元一次方程组的解法来说，也有着三个层次：消元法是第一个层次；为了消元可考虑用加减消元或代入消元，这是第二个层次；为此，需要进行具体的恒等变形，这是第三个层次．又如变换方法，一般来说，我们有以下层次关系：

- 变换方法
  - 恒等变换
    - 分解组合
    - 换元
    - 配方
    - 待定系数法
    - ……
  - 幂级数变换法(母函数法)
  - 几何变换
    - 正交变换
      - 平移
      - 旋转
      - 反射
    - 仿射变换
    - 射影变换
    - ……
  - 积分变换
  - 微分变换
  - ……

从中不难体验到,层次越低,可操作性越强,层次越高,包含的内涵越丰富.

数学思想和数学方法是紧密联系的,一般来说,强调指导思想时称数学思想,强调操作过程时称数学方法.

例如化归思想方法是数学研究问题的一种基本思想方法,我们在处理和解决数学问题时,总的指导思想是把问题转化为能够解决的问题,这就是化归思想. 而实现这种化归,就是将问题不断地变换形式,通过不同的途径实现化归,例如可通过一般化与特殊化的途径,通过合情推理(归纳、类比)的途径或通过恒等变形等途径去实现化归,这时就可称为是化归方法. 下面仅举一例说明之:

在 XOY 平面上,已知三直线

$$l_1: x\cos 3\alpha + y\cos\alpha = a,$$

$$l_2: x\cos 3\beta + y\cos\beta = a,$$

$$l_3: x\cos 3\gamma + y\cos\gamma = a$$

相交于一点(交点不在坐标轴上). 求证:$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$.

证明:朝着"和谐化"的方向,可将3倍角化为单角,并设l_1,l_2,l_3均过$P_0(x_0,y_0)$点($x_0\neq0,y_0\neq0$),得到

$$x_0[4\cos^3\alpha-3\cos\alpha]+y_0\cos\alpha=a,$$
$$x_0[4\cos^3\beta-3\cos\beta]+y_0\cos\beta=a,$$
$$x_0[4\cos^3\gamma-3\cos\gamma]+y_0\cos\gamma=a.$$

显然,上述三个方程的结构完全相同,只是角度α,β,γ不同,联想方程解的定义,可把$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$理解为关于$t$的三次方程

$$x_0(4t^3-3t)+y_0t=a$$

的三个根,上式经整理可变形为

$$4x_0t^3-(3x_0-y_0)t-a=0\ (x_0\neq0,\ y_0\neq0).$$

问题由代数方程根与系数的韦达关系获证.

显然,若用通常三角函数的有关知识求解是十分繁杂的,而化归为代数方程根与系数的关系去处理就十分简明.

极限思想方法是微积分的基本思想方法. 极限思想是大家熟知的,这是一种用运动变化的观点,把所考察的对象(如圆的面积、变速运动物体的瞬时速度、曲边梯形的面积等)看作某对象(内接正n边形的面积、匀速运动物体的速度、矩形面积的和)在无限变化过程中变化结果的思想,是"从有限中找到无限,从暂时中找到永久,并且使之确定下来"的一种运动辩证思想. 在这种思想指导下,人们给出了用差商的极限去描述切线斜率、变速运动物体的瞬时速度、加速度等概念的方法;以及用分割求和取极限的方法去描述变速运动物体的路程与速度的关系、曲边梯形的面积与曲边的关系;此外,广义积分、级数和等概念也都是用不同形式的极限方法得到的. 总之,极限思想方法贯穿了微积分的全部内容. 乃至以后抽象空间中的各类收敛性,也都是极限思想方法的运用和拓广.

关于统计思想方法,我们知道,进行统计推断的方法有两大类——统计估计和统计检验,每一类又都有各自的方法: