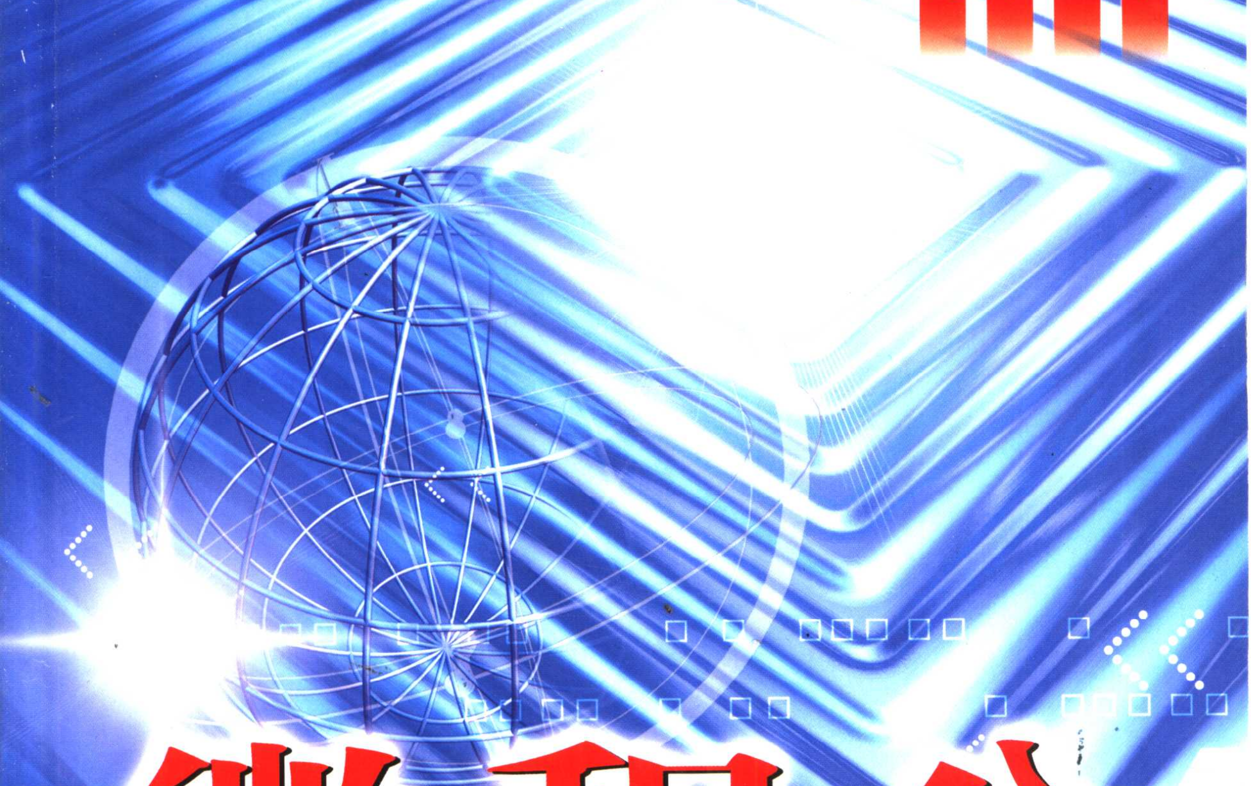
同济大学主编《微积分》同步习题全解

九章丛书



微积分
习题全解

编写　九章系列课题组
主编　苏志平

辽宁师范大学出版社

微积分习题全解

编写　九章系列课题组
主编　苏志平

辽宁师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题全解 / 苏志平主编. －大连:辽宁师范大学出版社,2004. 8

ISBN 7-81103-074-8

Ⅰ. 微… Ⅱ. 苏… Ⅲ. 微积分—高等学校—解题 Ⅳ. O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 085426 号

【**内容简介**】 本书是为了配合高等教育出版社出版,同济大学数学系编写的《微积分》配套辅导用书。书中由考试要求、内容提要、习题解答等部分组成。本书巧妙地运用了"知识点窍"与解题过程相结合,旨在帮助读者掌握课程重点、学会分析方法、提高解题能力。

责任编辑:穆 杰

责任校对:童 娇

封面设计:黄志勇

出 版 者:辽宁师范大学出版社

地 址:大连市黄河路 850 号

邮 编:116029

印 刷 者:廊坊华星印刷厂

发 行 者:全国新华书店

幅面尺寸:727mm × 960mm 1/16

印 张:25.75

字 数:418 千字

出版时间:2004 年 8 月第 1 版

印刷时间:2004 年 8 月第 1 次印刷

本册定价:28.00 元

前　　言

《微积分》作为高等数学重要组成部分，是理工科学生学习其他课程的基础，也是许多专业研究生入学考试的必考科目。为了帮助广大学生扎实地掌握《微积分》的精髓和解题技巧，提高解答各种题型能力，我们特约有经验有实力的教师精心编写了这本书。本书紧扣由高等教育出版社出版的同济大学应用数学系编写的《微积分》上册教材编写而成。归纳总结解题套路并提供有针对性练习，是一本具有较高价值的辅导书。

本书共分为九章，分别是第一章　极限与连续、第二章　一元函数微分学、第三章　一元函数积分学、第四章　微分方程、第五章　向量代数与空间解析几何、第六章　多元函数微分学、第七章　重积分、第八章　曲线积分与曲面积分、第九章　无穷级数。其中每章又细分为考试要求、内容提要、习题解答三个模块。本书在编写过程中参考了高等教育出版社出版的《微积分》学习指导用书，在此深表感谢。

由于编者水平有限及时间仓促，不妥之处在所难免。希望广大读者不吝批评、指正。

编者

2004 年 8 月

目　　录

预 备 知 识

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法;
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;
3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念;
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,理解初等函数的概念;
5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.

内容提要

1. 集合的基础知识

(1) 数集

$$\text{复数集 }\mathbf{C}\begin{cases}\text{实数集 }\mathbf{R}\begin{cases}\text{有理数集 }\mathbf{Q}\begin{cases}\text{整数集 }\mathbf{L}\begin{cases}\text{自然数集 }\mathbf{N}\\ \text{负整数集 }\mathbf{Z}\backslash\mathbf{W}\end{cases}\\ \text{非整有理数集 }\mathbf{Q}\backslash\mathbf{Z}\end{cases}\\ \text{无理数集 }\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{cases}\\ \text{虚数集 }\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}=\{a+bi \mid \neq 0,a,b\in R\}\end{cases}$$

(2) 运算公式

1° $A\cup B=\{u \mid u\in A \text{ 或 } u\in B\}$;

2° $A\cap B=\{u \mid u\in A \text{ 且 } u\in B\}$;

3° $A\backslash B=\{u \mid u\in A \text{ 且 } u \overline{\in} B\}$;

4° $A^c=\{u \mid u\in I \text{ 且 } u \overline{\in} A\}$;

5° $A\times B=\{(a,b) \mid a\in A,b\in B\}$.

(3) 区间和邻域

$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$; $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$;

$[a,+\infty]=\{x \mid x\geqslant a\}$;

$v(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$;

$\dot{v}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=\{x \mid x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\}$;

点 a 的左 δ 邻域 $=\{x \mid a-\delta<x<a\}$.

2. **映射**

设 X 和 Y 为两个非空集合，若存在法则 T，使得 $X \in X$ 惟一确定 $y = T(x) \in Y$，则称 T 为 X 到 Y 的映射，记作 $T:X \to Y$；称 x 为原像，y 为像．

集合 X 称为映射 T 的定义域，X 的所有元素的像组线的集合称为映射 T 的值域；

满射　若 $T(x) = Y$，即 Y 中任一元素都是 X 中某元素的像，则称 T 为 X 到 Y 的一个满射；

单射　对任意 $x_1, x_2 \in x, x_1 \neq x_2$，必有 $T(x_1) \neq T(x_2)$，则称 T 为 X 到 Y 的单射；

一一映射　既满足满射又符合单射的映射，又称为一一对应；

复合映射　$(T_2 \circ T_1)(x) = T_2[T_1(x)]$.

3. **一元函数**

(1) 概念

设数集 $D \subset R$，则 D 到 R 的任一映射 f 称为定义在 D 上的一元函数，简称为函数，记作 $y = f(x), x \in D$.

定义域和对应法则是函数的两要素．

点集 $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为 $y = f(x)$ 的图形（或图象）.

以上定义的是单值函数，当对应法则为多值时，可根据不同情况进行化简，得到单值函数来进行研究．

(2) 反函数

设函数 $f:D \to f(D)$ 为一一映射，则称其逆映射 $f^{-1}:f(D) \to D$ 为 f 的反函数．f^{-1} 的对应规则由 f 的对应规则决定．

换言之，设函数 f 的定义域 D 与值域 $f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 一一对应，则 x 也是 y 的函数，记作 $x = f^{-1}(y)$，称映射 f^{-1} 为 f 的反函数．习惯上 x 总表示为自变量，y 表示因变量，因此常记作 $y = f^{-1}(x)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数．

在同一坐标系中，$x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图形相同；而 $y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图形关于 $y = x$ 对称．

(3) 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域是 D'，函数 $u = g(x)$ 的定义域是 D，若 $u = g(x)$ 的值域 $g(D) \subset D'$，则将由下式

$$y = f[g(x)]$$

定义的函数称为由函数 $u = g(x)$ 和 $y = f(u)$ 构成的复合函数．

记作 $f \circ g$，即对每个 $x \in D$，有 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.

(4) 函数的几种特性

1° 有界性；　2° 单调性；　3° 奇偶性；　4° 周期性．

(5) 基本初等函数

1°　幂函数　$y = x^a$（a 为常数）

2°　指数函数　$y = a^x$（$a > 0$，且 $a \neq 1$）

3° 对数函数 $y = \log_a x$（a 是常数，且 $a > 0, a \neq 1$）

4° 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, \cdots$

5° 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, \cdots$

（6）初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和函数复合步骤所构成的并可以用一个算式表示的函数统称为初等函数．

工程中常用的一类初等函数：

1° 双曲正弦

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2° 双曲余弦

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3° 双曲正切

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

4° 反双曲正弦

$$y = \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

5° 反双曲余弦

$$y = \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

6° 反双曲正切

$$y = \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$$

双曲函数有与三角函数相似的和角、差角、倍角关系，请读者自己研读并比较；同时应熟悉其性质和图形．

习题解答

1. 设 $A = \{x \mid \sqrt{1 - x^2} \leqslant 1\}$、$B = \{x \mid 0 < x < 2\}$ 是实数域中的两个子集，写出 $A \cup B$、$A \cap B$、$A \backslash B$ 及 $B \backslash A$ 的表达式．

【知识点窍】 考查了并集、交集和差集的基本概念，其具体定义见知识简介部分．

【解题过程】 对于 A，有 $\sqrt{1 - x^2} \leqslant 1$，则 $\cup \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1, 1 \geqslant x^2 \geqslant 0, -1 \leqslant x \leqslant 1$

所以，
$$A \cup B = \{x \mid -1 \leqslant x < 2\};$$
$$A \cap B = \{x \mid \cup < x \leqslant 1\};$$
$$A \backslash B = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 0\};$$
$$B/A = \{x \mid 1 < x < 2\}.$$

3. 两个集合 A 与 B 之间如果存在一一对应，则称集合 A 与 B 等势．试说明下列数集是等势的：

(1) 整数集合 Z 与自然数集 N;

(2) 区间(1,2) 与区间(3,5).

【知识点窍】 该题为信息题,通过所给条件证明欲证问题. 解(1) 题须注意:整数比自然数多负数部分,通过分段分析一一对应即可:解(2) 题时,可以设(1,2) 为自变量,(3,5) 为变量,构造函数即可.

【解题过程】 (1) 令 $f:N$ 与 Z 一一对应,即

$$f(m) = 2m - 1,\text{当 } m = 1,2,3,\cdots;$$

$$f(m) = 2|m|,\text{当 } m = 0,-1,-2,\cdots$$

此时 f 为 N 与 Z 之间的一一对应,故 N 与 Z 等势.

(2) 令 $f:(1,2)$ 与 $(3,5)$ 一一对应,即存在 $x \in [1,2]$, $f(x) = 2x + 1$,则 f 是(1,2) 与(3,5) 之间的一一对应,故(1,2) 与(3,5) 等势.

5. 求下列函数的自然定义域:

$$(3) y = \frac{1}{1 - x^2} + \sqrt{x+1}; \qquad y = \frac{1}{[x+1]}.$$

【知识点窍】 函数自然定义域为使算式有意义的一切实数组成的集合. 一般求定义域时应注意的问题:分母不为0、偶次根号下数值大于0、对数大于0等.

【解题过程】 (3) $y = \dfrac{1}{1 - x^2} + \sqrt{x+1}$,定义域:$1 - x^2 \neq 0$ 且 $x + 1 \geqslant 0$,解之得 $x > -1$ 且 $x \neq 1$;

(4) $y = \dfrac{1}{[x+1]}$,定义域为 $[x+1] \neq 0$,解之得 $x \notin [-1,0)$.

6. 下列函数 f 和 φ 是否相同?为什么?

$$(1) f(x) = \frac{x}{x}, \varphi(x) = 1; \qquad (4) f(x) = 1, \varphi(x) = \sec^2 x - \tan^2 x.$$

【知识点窍】 定义域与对应法则为函数的二要素. 故判断二函数是否相同,对各自定义域和对应法则进行比较即可.

【解题过程】 (1) 对 $f(x) = \dfrac{x}{x}, x \neq 0$,而 $\varphi(x) = 1, x \in \mathbf{R}$,两者自然定义域不同,故函数不同;

(4) $f(x) = 1$ 与 $\varphi(x) = \sec^2 x - \tan^2 x, x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 不同,因为两者定义域不同.

7. 讨论下列函数的奇偶性:

$$(1) y = x + x^2 - x^3; \qquad (4) y = x\sin\frac{1}{x}.$$

【知识点窍】 若 $f(-x) = f(x)$,则 $f(x)$ 为偶函数;若 $f(-x) = -f(x)$,则 $f(x)$ 为奇函数;否则,$f(x)$ 非奇非偶. 由上述条件,本题只须对 $f(-x)$ 化简并与 $f(x)$ 比较即可.

【解题过程】 (1) $y(-x) \neq y(x), y(-x) \neq -y(x)$,故 $y = x + x^2 - x^3$ 非奇非偶函数;

(4) $y(-x) = (-x) \cdot \dfrac{1}{\sin(-x)} = x\sin\dfrac{1}{x} = y(x)$,所以 $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 是偶函数.

8. 证明:两个偶函数之积是偶函数. 两个奇函数之积是偶函数:一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

【知识点窍】 考查了奇函数与偶函数的基本特性,构造新函数 $F(x)$ 为两个函数之积,然后求出 $F(x)$ 的奇偶数即可.

【解题过程】 令 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$,当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 皆为偶函数时,$\forall x \in D$,

$$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot g(x)=F(x),$$

$\therefore F(x)$ 为定义在 D 上的偶函数,即两个偶函数之积为偶函数;

同理,当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 皆为奇函数时,$\forall x\in D$,

$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=k[-f(x)]\cdot[-g(x)]=f(x)\cdot g(x)=F(x)$,

$\therefore F(x)$ 为定义在 D 上的偶函数,即两个奇函数之积为偶函数;

当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一个为偶函一个为奇函时,我们设 $f(x)$ 为偶函数,则 $\forall x\in D$,

$F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot[-g(x)]=-f(x)\cdot g(x)=-F(x)$,

$\therefore F(x)$ 为定义在 D 上的奇函数,即一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

9. 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l,l)$ 上任何函数,证明:$\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数. $\varphi(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数,并写出下列函数所对应的 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(x)$:

(1)$f(x)=a^2(a>0)$; (2)$f(x)=(1-x)^2$.

【知识点窍】 继续考查函数的奇偶特性,利用性质直接证明即可.

【解题过程】 $\because \varphi(-x)=f(-x)+f(-(-x))=f(x)+f(-x)=\varphi(x)$,

$\therefore \varphi(x)$ 在对称区间 $(-l,l)$ 上为偶函数;

同理,$\psi(-x)=f(-x)-f(-(-x))=-[f(x)-f(-x)]=-\psi(x)$,

$\therefore \psi(x)$ 在对称区间 $(-l,l)$ 上为奇函数;

(1)$f(x)=a^x,\varphi(x)=f(x)+f(-x)=a^x+a^{-x},\psi(x)=f(x)-f(-x)=a^x-a^{-x}$;

(2)$f(x)=(1+x)^n,\varphi(x)=f(x)+f(-x)=(1+x)^n+(1-x)^n$,

$\psi(x)=f(x)-f(-x)=(1+x)^n-(1-x)^n$.

10. 利用第9题的结论证明:定义在区间 $(-l,l)$ 上的任何函数可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

【知识点窍】 利用上题结论,根据已知函数构造出一个奇函和一个偶函,叠加即可证明.

【解题过程】 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 上的函数,则令

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},x\in(-l,l);$$

由于 $\varphi(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=\varphi(x),\psi(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-\psi(x)$,

所以 $\varphi(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 上的偶函数,而 $\psi(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 上的奇函数,且有 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ 恒成立,原命题得证.

11. 证明:

(1) 两个单调增加(减少)的函数之和是单调增加(减少)的;

(2) 两个单调增加(减少)的正值函数之积是单调增加(减少)的.

【知识点窍】 考查函数的单调性,对任意 $x_1,x_2,\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f_2(x)$,则称 $f(x)$ 为单调增函数;

反之,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 为单调减函数;

【解题过程】 (1) 设 $f(x),g(x)$ 均为定义在 D 上的单调递增函数,则令 $F(x)=f(x)+g(x)$

当 $x_1<x_2$ 时,$F(x_1)=f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)=F(x_2)$,即两个单调增加的函数之和是单调增加的;同理,两个单调减少的函数之和是单调减少的.

(2) 设 $f(x),g(x)$ 均为定义在 D 内的单调增加的正值函数,则对 I 内任意 $x_1>x_2$,有 $f(x_1)\cdot g(x_1)<f(x_2)\cdot g(x_2)$,

$\therefore$ 两个单调增加的正值函数之积单调增加;
同理,两个单调减少的正值函数之积是单调减少的.

12. 求下列函数的反函数及反函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$;　　(2) $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}\quad(x\geqslant 0)$;

(3) $y=\sqrt{1-x^2}\quad(-1\leqslant x\leqslant 0)$

【知识点窍】 考查反函数的概念和求解,同时复习了函数的自然定义域,做此类题时,须先判断反函数是否存在;求出反函数后,再根据实际函数求自然定义域.

【解题过程】 (1) 先判断反函数的存在性.

由于$\dfrac{2^x}{2^x+1}=1-\dfrac{1}{2^x+1}$,$x\in(-\infty,+\infty)$上单调增加,故反函数存在.

$$2^x=\frac{1}{1-y}-1=\frac{y}{1-y},x=\log_2\frac{y}{1-y},$$

即反函数写作　$y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$,　　定义域$\begin{cases}1-x\neq 0\\ \dfrac{x}{1-x}>0\end{cases}$　解之得 $x\in(0,1)$;

(2) 由于$\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$,故当$x\in[0,+\infty)$时,$\dfrac{x-1}{x+1}\in[-1,1)\subset[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$,且$\dfrac{x-1}{x+1}$单调增加,从而$y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$在$[0,+\infty]$上单调增加,且$1-2\sin 1\leqslant y\leqslant 1+2\sin 1$,故所给函数的反函数存在,且反函数的定义域为$[1-2\sin 1,1+2\sin 1]$.

由$y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$,$\dfrac{y-1}{2}=\sin\dfrac{x-1}{x+1}$,$\dfrac{x-1}{x+1}=\arcsin\dfrac{y-1}{2}$,$x=\dfrac{1+\arcsin\dfrac{y-1}{2}}{1-\arcsin\dfrac{y-1}{2}}$,

故反函数为$y=\dfrac{1+\arcsin\dfrac{x-1}{2}}{1-\arcsin\dfrac{x-1}{2}}$,

定义域为原函数的值域,为$[1-2\sin 1,1+2\sin 1]$;

(3) 先判定反函数的存在性.

由所给函数在$[-1,0]$上单调递增,故反函数存在,且易求得

$$y=\sqrt{1-x^2},y^2=1-x^2,x=-\sqrt{1-y^2}(\text{正值不合题意,舍去})$$

故反函数为$y=-\sqrt{1-x^2}$,定义域为原函数的值域,即$[0,1]$;

13. 利用 $y=\sin x$ 的图形,画出下列函数的图形:

(1) $y=\sin x+1$;　　(2) $y=2\sin x$;

【知识点窍】 考查初等函数中正弦函数曲线的描绘,注意幅值大小,相位改变的条件.

【解题过程】 图(1) 中(a) 为 $\sin x$ 图形,(b)、(c) 分别对应(1)、(2) 式所作图形.

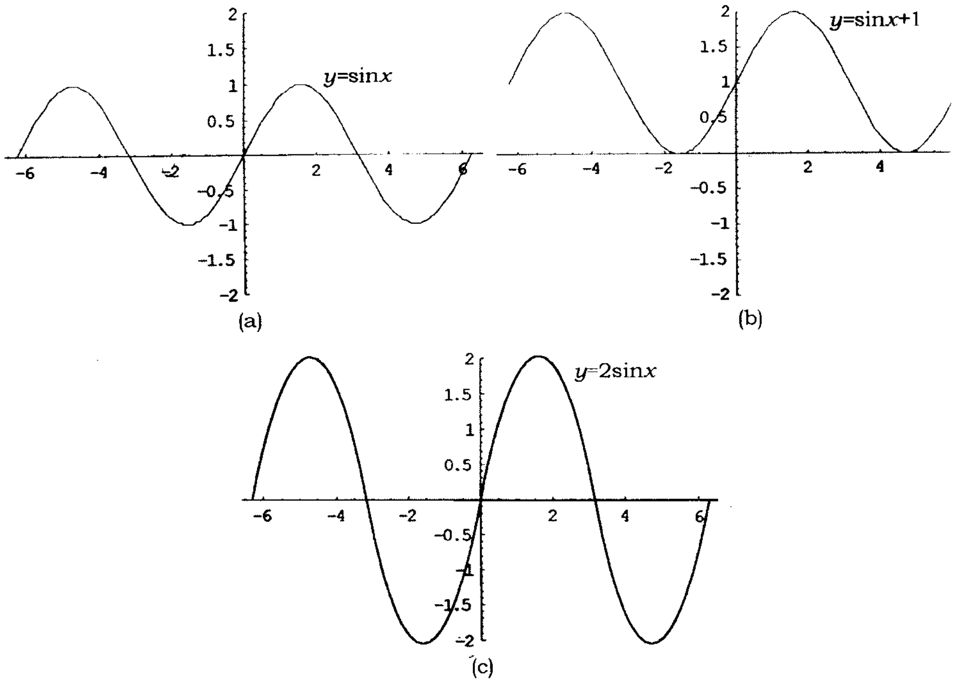


图 1

14. 作出下列函数的图形：

(1) $y = \operatorname{sgn}(\cos x)$；

(2) $y = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right]$.

【解题过程】 (1) 先作出 $\cos x$ 图形，如图 2(a)；再根据 $y = \operatorname{sgn}(x)$ 即符号函数的定义，作出 $y = \operatorname{sgn}(\cos x)$ 的图形，如图 2(b).

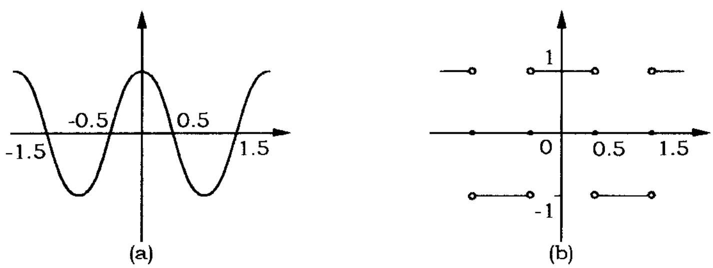


图 2

(2) 考查 $[x]$ 函数的性质，表示 x 的整数部分.

解题时，先作出 $y = [x]$ 和 $2[\frac{x}{2}]$ 的图形，然后相减可得 $y = [x] - [\frac{x}{2}]$ 的图形.

也可直接化简为

$$y = [x] - 2[\frac{x}{2}] = \begin{cases} 0 & \text{当 } 2k \leqslant x < 2k+1 \\ 1 & \text{当 } 2k+1 \leqslant x < 2k+2 \end{cases} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

可作出其图形如图 3.

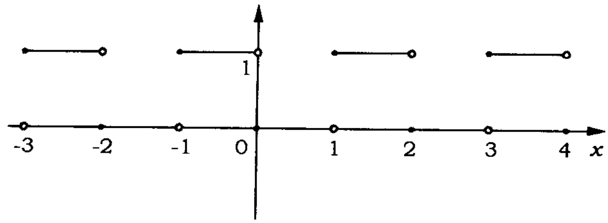


图 3

[redacted] 证明:

(2) $\cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$.

【解题过程】 (2) $2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2} = 2\cdot\frac{e^{\frac{x+y}{2}} - e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}$

$$= \frac{1}{2}(e^x - e^y - e^{-y} + e^{-x})$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$= \cosh x - \cosh y$$

另解 $\cosh x - \cosh y = \cosh\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \cosh\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)$

$$= \cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2} + \sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2} -$$

$$\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\left(-\frac{x-y}{2}\right) - \sinh\frac{x+y}{2}\sinh\left(-\frac{x-y}{2}\right)$$

$$= 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}.$$

[redacted] 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当} |x| < 1, \\ 0 & \text{当} |x| = 1, \\ -1 & \text{当} |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = e^x$,求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形

【解题过程】 $f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1 & |e^x| < 1 \\ 0 & |e^x| = 1 \\ -1 & |e^x| > 1 \end{cases}$

即 $f[g(x)] = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x > 0 \end{cases}$ 如图 4(a).

而 $g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1 = e & |x| < 1 \\ e^0 = 1 & |x| = 0, \\ e^{-1} & |x| > 1 \end{cases}$ 如图 4(b).

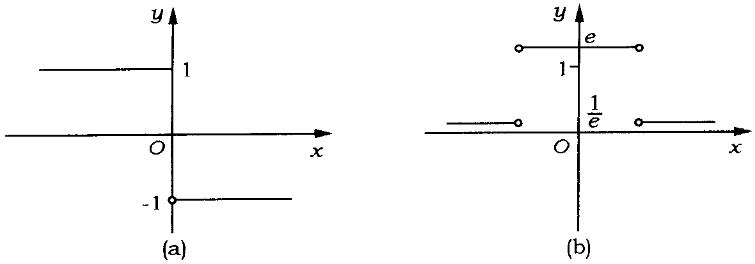


图 4

18. (1) 设$f(x-2)=x^2-2x+3$,求$f(x+2)$;

(2) 设$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$,求$f(x)$;

(3) 设$f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$,求$f(\cos x)$.

【知识点窍】 这类题有两种解法. 其一是将$f(g(x))$的右端化作自变量为$g(x)$的函数,再令$x=g(x)$代入即得$f(x)$;另一种则令$u=g(x)$,求出$f(u)$即为所求$f(x)$.

【解题过程】 (1)$f(x-2)=x^2-2x+3=(x-2)^2+2(x-2)+3$,

故
$$f(x)=x^2+2x+3,$$
$$f(x+2)=(x+2)^2+2(x+2)+3=x^2+6x+11.$$

另解 令$u=x-2$,则$x=u+2$,得
$$f(u)=(u+2)^2-2(u+2)+3=u^2+2u+3,$$

从而
$$f(x+2)=(x+2)^2+2(x+2)+3=x^2+6x+11;$$

(2)$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$,

故
$$f(x)=x^2-2;$$

(3)$f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2(1-\sin\frac{2x}{2})$,

于是有 $f(x)=2(1-x^2)$,
$$f(\cos x)=2(1-\cos^2 x)=2\sin^2 x.$$

19. 当复合函数$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$的中间函数$g(x)$发生变化时,复合函数的图形也随之变化. 试用计算机作出下列图形,并与$y=\sin x$的图形比较之:

(1)$y=\sin\sqrt{x}$,显示区域为$[0,400]\times[-1.5,1.5]$;

(2)$y=\sin x^2$,显示区域为$[-5,5]\times[-1.5,1.5]$.

【解题过程】 为了与$y=\sin x$比较,先作出$y=\sin x$的图形,如图5(a);再分别作出$y=\sin\sqrt{x}$与$y=\sin x^2$的图形,如图5(b)、(c). 原代码如下

```
Plot[Sin[x],{x,0,30},PlotRange→{-1.5,1.5}]
Plot[Sin[Sqrt[x]],{x,0,400},PlotRange→{-1.5,1.5}]
Plot[Sin[x^2],{x,-5,5},PlotRange→{-1.5,1.5}]
```

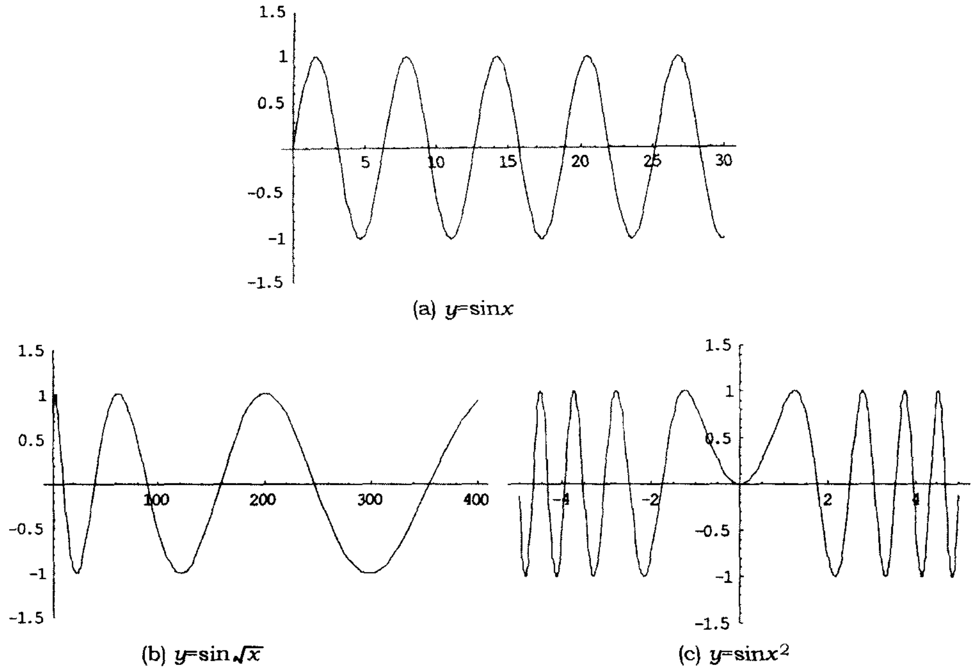


图 5

由函数图形比较可知，$y = \sin x$ 的周期性即波峰、波谷之距相等，而 $y = \sin\sqrt{x}$ 的波峰、波谷之距随 x 增大而增大，$y = \sin x^2$ 的波峰、波谷之距随 $|x|$ 的增大反而减小．

20. 利用计算机作函数的图形时，必须注意选择好图形的显示区域．若选择得不好，则显示的图形不能充分表示出所求作的图形的特点，甚至可能因机器误差而产生变形，得出错误的图形．试用 Mathematica 在计算机上作下列图形：

(1) $y = x^3 - 49x$，显示区域分别取作

(Ⅰ)$[-10,10]\times[-10,10]$；

(Ⅱ)$[-10,10]\times[-100,100]$；

(Ⅲ)$[-10,10]\times[-200,200]$，

试对显示的图形进行比较，哪一个能比较充分地反映所求作的图形的特点？

(2) $y = \sin 50x$，显示区域分别取作

(Ⅰ)$[-12,12]\times[-1.5,1.5]$；

(Ⅱ)$[-9,9]\times[-1.5,1.5]$；

(Ⅲ)$[-0.25,0.25]\times[-1.5,1.5]$，

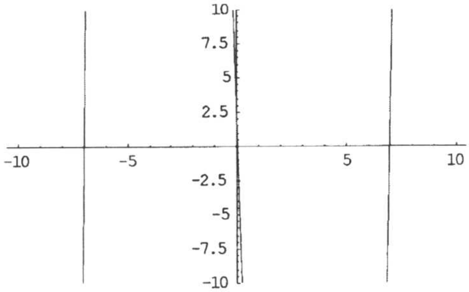
试对显示的图形进行比较，哪一个显示了真实的函数图形？

【解题过程】 (1) 源程序如下

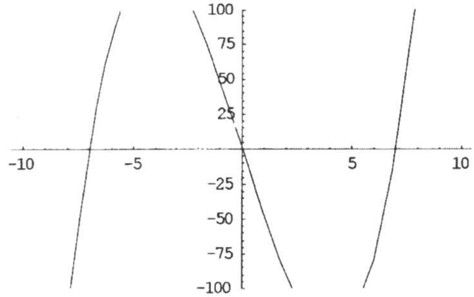
```
g[x]:= x^3 - 49x
Plot[g[x],{x, -10,10},PlotRange → {-10,10}]
Plot[g[x],{x, -10,10},PlotRange → {-100,100}]
Plot[g[x],{x, -10,10},PlotRange → {-200,200}]
```

运行后得图形分别得图 6(a)、(b)、(c).

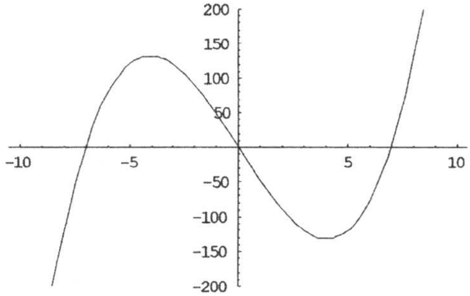
比较(a)、(b)、(c) 图形,可以知道在作图时选择好图形显示区域的重要性,选择不当,则图形失真,不能充分表示出所求图形的特点,甚至因机器误差而变形,得出错误图形.



(a)



(b)



(c)

图 6

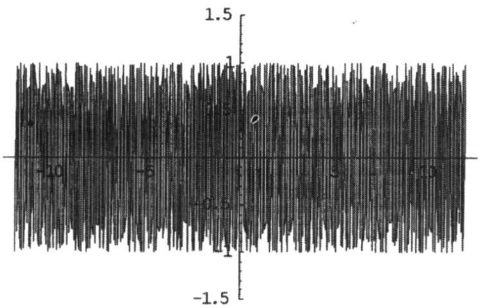
(2) 源程序如下

Plot[Sin[50x],{x, - 12,12},PlotRange → {- 1.5,1.5}]

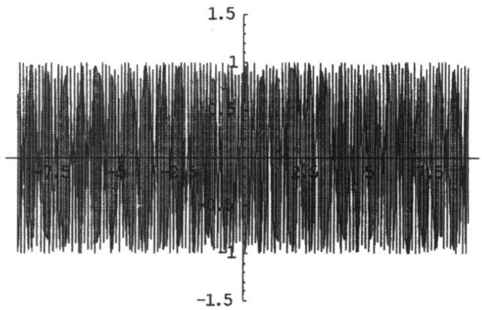
Plot[Sin[50x],{x, - 9,9},PlotRange → {- 1.5,1.5}]

Plot[Sin[50x],{x, - 0.25,0.25},PlotRange → {- 1.5,1.5}]

运行上述语句可得图形分别如图 7(a)、(b)、(c).



(a)



(b)