大学数学习题精解系列

计算方法典型例题分析

（第二版）

孙志忠　编著

- 计算方法课程的好帮手
- 数值分析课程的好助教
- 传授灵活多样的解题技巧
- 开拓思路提高综合分析能力

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书是为理工科院校各专业的学生在学习“计算方法”课程或“数值分析”课程时，更好地理解课程内容、掌握解题思路和方法，提高综合分析能力而编写的辅导教材. 包括误差分析、方程求根、线性代数方程组的解法、函数插值、曲线拟合与函数逼近、数值积分与数值微分、常微分方程初值问题的数值解法、矩阵特征值与特征向量的计算共8章. 每章先给出内容提要，然后按教学内容的顺序精编若干典型例题，并作分析解答，部分题目给出了多种解法. 书末附3份模拟试卷及其参考答案与评分标准.

图书在版编目(CIP)数据

计算方法典型例题分析/孙志忠编著. —2版.—北京:科学出版社,2005
(大学数学习题精解系列)
ISBN 7-03-015640-4

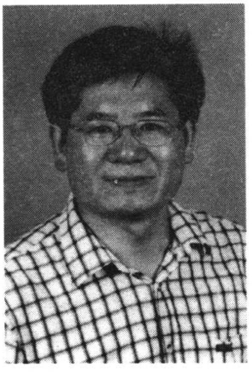
Ⅰ.计… Ⅱ.孙… Ⅲ.计算方法-高等学校-解题 Ⅳ.O241-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第056650号

责任编辑:赵 靖 祖翠娥/责任校对:张怡君
责任印制:安春生/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001年3月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2005年8月第 二 版 印张:17 1/4
2005年8月第五次印刷 字数:323 000
印数:17 001—20 000
定价: 25.00元
(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

作 者 简 介



孙志忠，男，1963 年 3 月生. 1984 年、1987 年先后在南京大学获得学士学位、硕士学位. 1990 年在中国科学院计算中心（现计算数学与科学工程计算研究所）获得博士学位. 1990 年至今在东南大学数学系任教. 现任教授，博士生导师，计算数学教研室主任. 曾获东南大学教学工作优秀特别奖及全国数学建模优秀教练员称号.

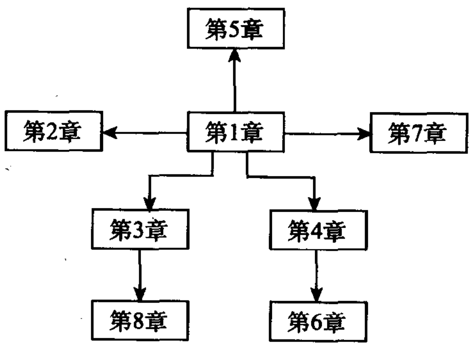
孙志忠教授的专业为计算数学与科学工程计算，研究方向为偏微分方程数值解法中的差分方法理论. 主持完成国家自然科学基金项目和江苏省自然科学基金项目各一项. 正在主持国家自然科学基金项目一项. 在“Numer. Math.”，“Math. Comp.”，“Appl. Numer. Math.”，“Numer. Methods Partial Differential Eq.”，“J. Comp. Appl. Math.”，“J. Comp. Math.”，《计算数学》，《应用数学学报》等国内外核心刊物上发表论文 30 余篇. 主持完成校重点课程建设项目和重点教材建设项目各一项. 负责的工科研究生数值分析课程 2002 年被评为“江苏省研究生培养创新工程优秀研究生课程”. 出版的教材有《计算方法与实习》、《计算方法与实习学习指导与习题解析》、《计算方法典型例题分析》、《数值分析》、《数值分析全真试题解析》和《偏微分方程数值解法》，其中《计算方法与实习》被评为 2001 年度全国优秀畅销书，《数值分析》在 2003 年被评为东南大学优秀研究生教材.

第二版前言

在“计算方法”或“数值分析”课程的学习过程中，解题是一项非常重要的活动.灵活运用所学知识去分析问题和解决问题是一种能力的训练. 为了帮助学生学好计算方法，开拓思路，提高解题技巧，掌握解题方法，我们参照了教育部高等教育司关于高等学校工科本科生“数值计算方法”课程基本要求，并阅读了近几年来国内出版的多本计算方法和数值分析教材，精编了 182 道典型例题，并作了解答，也希望读者用其他方法给出解答.

全书共 8 章. 每章先给出内容提要，然后按教学内容的顺序精编典型例题. 对每一道例题注重分析和讨论，以便读者更好地理解、掌握解题思路和方法，提高综合分析能力. 较难的题目以“ * ”标注. 书末附 3 份模拟试卷及其参考答案.

读者可按如下路径阅读.



本书自 2001 年出版以来，承蒙广大读者的喜爱，已经发行 17000 册. 这次趁修订再版的机会，考虑到部分学生的需求，在第 5 章中增添了最佳平方逼近和最佳一致逼近的有关内容.

书中有疏漏及不妥之处，恳请读者指正. Email：zzsun@seu. edu. cn.

编者诚挚地感谢科学出版社的同志们为本书的出版付出的辛勤劳动.

作　者

2005 年 1 月

第一版前言

在“计算方法”或“数值分析”课程的学习过程中，解题是一项非常重要的活动.灵活运用所学知识去分析问题和解决问题是一种能力的训练.为了帮助学生学好计算方法，开拓思路，提高解题技巧，掌握解题方法，我们参照了教育部高等教育司关于高等学校工科本科生“数值计算方法”课程基本要求及近几年来国内出版的多本计算方法的教材，精选了177道典型题目作了解答，也希望读者用另外的方法给出解答.

为了便于读者阅读，我们按教学内容的顺序进行编排.对每一道题目注重分析和讨论，以便读者更好地理解、掌握解题思路和方法，提高综合分析能力.较难的题目以“*”标注.书末附3份模拟试卷及其参考答案.

书中有疏漏及不妥之处，恳请读者指正.

编者诚挚地感谢科学出版社的同志们为本书的出版付出的辛勤劳动.

作　者

目　　录

第 1 章　误 差 分 析

1.1　内 容 提 要

本章要求掌握绝对误差、相对误差、有效数字、数据误差的影响及设计算法时应注意的几个问题.

绝对误差与绝对误差限

设 x^* 为准确值，x 是 x^* 的一个近似值，称 $e=x^*-x$ 为近似值 x 的绝对误差，简称误差. 如果有数 ε 使得 $|e|\leqslant\varepsilon$，则称 ε 为近似值 x 的绝对误差限，简称误差限.

相对误差和相对误差限

设 x^* 是准确值，x 是 x^* 的一个近似值，称 $(x^*-x)/x^*$ 为近似值 x 的相对误差，记作 e_r.

在实际计算中，x^* 是未知的，常以 $\bar{e}_r=(x^*-x)/x$ 作为相对误差. 事实上

$$\bar{e}_r-e_r=\frac{e_r^2}{1-e_r},\qquad \bar{e}_r-e_r=\frac{\bar{e}_r^2}{1+\bar{e}_r}.$$

当 e_r 很小时，$\bar{e}_r-e_r$ 是 e_r 的二阶小量；当 $\bar{e}_r$ 很小时，$\bar{e}_r-e_r$ 是 $\bar{e}_r$ 的二阶小量. 所以 e_r 和 $\bar{e}_r$ 中只要有一个很小，则另一个也很小，且它们是同量级的小量.

如果有常数 ε_r 使得 $|e_r|\leqslant\varepsilon_r$（或 $|\bar{e}_r|\leqslant\varepsilon_r$），则称 ε_r 为近似值 x 的相对误差限.

有效数字

如果近似值 x 的误差限是其某一位上的半个单位，且该位直到 x 的第一位非零数字一共有 n 位，则称近似值 x 具有 n 位有效数字.

$$x=\overbrace{*\quad *\quad *\quad *\quad \cdots\quad *}^{n\text{ 位}}\cdots$$

误差限不超过该位的半个单位

自左向右看，第一个非零数

数据误差的影响

给定函数 $y=f(x_1,x_2)$. 设 x_1,x_2 分别为 x_1^*,x_2^* 的近似值,则

$$
\begin{aligned}
e(y)&=f(x_1^*,x_2^*)-f(x_1,x_2)\\
&\approx\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}(x_1^*-x_1)+\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}(x_2^*-x_2)\\
&=\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}e(x_1)+\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}e(x_2),
\end{aligned}
$$

$$
e_r(y)=\frac{e(y)}{y}\approx\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\ \frac{x_1}{y}e_r(x_1)+\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\ \frac{x_2}{y}e_r(x_2).
$$

由以上两式可得

$$e(x_1+x_2)\approx e(x_1)+e(x_2),\qquad e_r(x_1+x_2)\approx\frac{x_1}{x_1+x_2}e_r(x_1)+\frac{x_2}{x_1+x_2}e_r(x_2),$$

$$e(x_1-x_2)\approx e(x_1)-e(x_2),\qquad e_r(x_1-x_2)\approx\frac{x_1}{x_1-x_2}e_r(x_1)-\frac{x_2}{x_1-x_2}e_r(x_2),$$

$$e(x_1x_2)\approx x_2e(x_1)+x_1e(x_2),\qquad e_r(x_1x_2)\approx e_r(x_1)+e_r(x_2),$$

$$e\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\approx\frac{e(x_1)}{x_2}-\frac{x_1}{x_2^2}e(x_2),\qquad e_r\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\approx e_r(x_1)-e_r(x_2),x_2\neq 0.$$

设计算法时要注意的几个问题

(1) 应用数值稳定的递推公式.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$是由递推公式

$$
\begin{cases}x_n=F(x_{n-1}), & n=1,2,\cdots,\\ x_0\ \text{给定}\end{cases}\tag{1.1}
$$

得到的. 若 x_0 有误差 e_0,则实际上只能得到

$$
\begin{cases}\tilde{x}_n=F(\tilde{x}_{n-1}), & n=1,2,\cdots,\\ \tilde{x}_0=x_0-e_0,\end{cases}
$$

记 $e_n=x_n-\tilde{x}_n,n=1,2,\cdots$. 如果存在不依赖于 n 的常数 C 使得

$$|e_n|\leqslant C|e_0|,\quad n=1,2,\cdots,$$

则称递推公式(1.1)是数值稳定的. 否则称其为数值不稳定的.

(2) 注意简化运算步骤,减少运算次数.

(3) 要避免相近数相减.

(4) 多个数相加,应先将绝对值较小的数相加之后,再依次与绝对值较大的数相加.

1.2 典型例题分析

1.2.1 绝对误差 相对误差 有效数字

例 1.1 问 3.142,3.141,$\frac{22}{7}$分别作为 π 的近似值各具有几位有效数字?

解 $\pi=3.14159265\cdots$. 记 $x_1=3.142$, $x_2=3.141$, $x_3=\frac{22}{7}$.

由 $\pi-x_1=3.14159\cdots-3.142=-(3.142-3.14159\cdots)=-0.00040\cdots$知

$$\frac{1}{2}\times10^{-4}<|\pi-x_1|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3},$$

因而 x_1 具有 4 位有效数字.

由 $\pi-x_2=3.14159\cdots-3.141=0.00059\cdots$知

$$\frac{1}{2}\times10^{-3}<\left|\pi-x_2\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-2},$$

因而 x_2 具有 3 位有效数字.

由 $\pi-\frac{22}{7}=3.14159\cdots-3.14285\cdots=-0.00126\cdots$知

$$\frac{1}{2}\times10^{-3}<\left|\pi-\frac{22}{7}\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-2},$$

因而 x_3 具有 3 位有效数字.

例 1.2 (1) 经过四舍五入得出 $x_1=6.1025$, $x_2=80.115$,试问它们分别具有几位有效数字? (2) 求 x_1+x_2, x_1-x_2, x_1x_2, $\frac{x_1}{x_2}$的绝对误差限.

解 (1) 记 x_1 和 x_2 的精确值分别为 x_1^* 和 x_2^*,则有

$$\left|x_1^*-x_1\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4},\qquad\left|x_2^*-x_2\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3}.$$

所以 x_1 和 x_2 分别具有 5 位有效数字.

(2) 由于$\left|e(x_1)\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}$, $\left|e(x_2)\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3}$,所以

$$\left|e(x_1+x_2)\right|\approx\left|e(x_1)+e(x_2)\right|\leqslant\left|e(x_1)\right|+\left|e(x_2)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 0.00055,$$

$$\left| e(x_1 - x_2) \right| \approx \left| e(x_1) - e(x_2) \right| \leqslant \left| e(x_1) \right| + \left| e(x_2) \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 0.00055,$$

$$\left| e(x_1 x_2) \right| \approx \left| x_2 e(x_1) + x_1 e(x_2) \right| \leqslant x_2 \left| e(x_1) \right| + x_1 \left| e(x_2) \right|$$

$$\leqslant 80.115 \times \frac{1}{2} \times 10^{-4} + 6.1025 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 0.007057,$$

$$\left| e\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \right| \approx \left| \frac{1}{x_2} e(x_1) - \frac{x_1}{x_2^2} e(x_2) \right| \leqslant \frac{1}{x_2} \left| e(x_1) \right| + \frac{x_1}{x_2^2} \left| e(x_2) \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{80.115} \times \frac{1}{2} \times 10^{-4} + \frac{6.1025}{80.115^2} \times \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$= 0.10995 \times 10^{-5}.$$

例 1.3　设 $x_1 = 1.21, x_2 = 3.65, x_3 = 9.81$ 都精确到二位小数,试估计由这些数据计算 $x_1 x_2 + x_3$ 的相对误差.

解　记 $x_1 = 1.21$, $x_2 = 3.65$, $x_3 = 9.81$, $u = x_1 x_2$, $v = u + x_3$, 则

$$\left| e(x_1) \right| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2}, \quad \left| e_r(x_1) \right| = \left| \frac{e(x_1)}{x_1} \right| \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-2}}{1.21},$$

$$\left| e(x_2) \right| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2}, \quad \left| e_r(x_2) \right| = \left| \frac{e(x_2)}{x_2} \right| \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-2}}{3.65},$$

$$\left| e(x_3) \right| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-3}, \quad \left| e_r(x_3) \right| = \left| \frac{e(x_3)}{x_3} \right| \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-2}}{9.81}.$$

因为

$$e_r(u) = e_r(x_1 x_2) \approx e_r(x_1) + e_r(x_2),$$

$$e_r(v) = e_r(u + x_3) \approx \frac{u}{u + x_3} e_r(u) + \frac{x_3}{u + x_3} e_r(x_3)$$

$$\approx \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2 + x_3} \left(e_r(x_1) + e_r(x_2) \right) + \frac{x_3}{x_1 x_2 + x_3} e_r(x_3),$$

所以

$$\left|e_r(v)\right| \approx \left|\frac{x_1x_2}{x_1x_2+x_3}(e_r(x_1)+e_r(x_2))+\frac{x_3}{x_1x_2+x_3}e_r(x_3)\right|$$

$$\leqslant \frac{x_1x_2}{x_1x_2+x_3}\left(\left|e_r(x_1)\right|+\left|e_r(x_2)\right|\right)+\frac{x_3}{x_1x_2+x_3}\left|e_r(x_3)\right|$$

$$\leqslant \frac{1.21\times3.65}{1.21\times3.65+9.81}\times\left(\frac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{1.21}+\frac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{3.65}\right)$$

$$+\frac{9.81}{1.21\times3.65+9.81}\times\frac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{9.81}$$

$$=0.00206.$$

例 1.4 采用迭代法计算$\sqrt{7}$,取

$$\begin{cases} x_0=2, \\ x_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_k+\dfrac{7}{x_k}\right), \qquad k=0,1,2,\cdots. \end{cases}$$

若 x_k 是$\sqrt{7}$ 的具有 n 位有效数字的近似值,求证 x_{k+1}是$\sqrt{7}$ 的具有 $2n$ 位有效数字的近似值.

解 首先我们证明$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\sqrt{7}$. 由

$$x_{k+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{7}{x_k}\right)-\sqrt{7}=\frac{1}{2x_k}(x_k-\sqrt{7})^2, \qquad k=0,1,2,\cdots$$

知 $x_{k+1}-\sqrt{7}\geqslant0$, $k=0,1,2,\cdots$,即 $x_k\geqslant\sqrt{7}$, $k=1,2,3,\cdots$.因而

$$x_1-\sqrt{7}=\frac{1}{2x_0}(x_0-\sqrt{7})^2=\frac{1}{4}(\sqrt{7}-2)^2, \tag{1.2}$$

$$\left|x_{k+1}-\sqrt{7}\right|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{7}}(x_k-\sqrt{7})^2, \qquad k=1,2,3,\cdots. \tag{1.3}$$

递推可得

$$\left|x_{k+1}-\sqrt{7}\right|\leqslant(x_k-\sqrt{7})^2\leqslant[(x_{k-1}-\sqrt{7})^2]^2=(x_{k-1}-\sqrt{7})^{2^2}$$

$$\leqslant[(x_{k-2}-\sqrt{7})^2]^{2^2}=(x_{k-2}-\sqrt{7})^{2^3}\leqslant\cdots$$

$$\leqslant(x_1-\sqrt{7})^{2^k}\leqslant\left[\frac{1}{4}(\sqrt{7}-2)^2\right]^{2^k}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{7}-2}{2}\right)^{2^{k+1}}, \qquad k=0,1,2\cdots.$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\sqrt{7}$.

设 x_k 是 $\sqrt{7}$ 的具有 n 位有效数字的近似值，即 $\left|x_k-\sqrt{7}\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-(n-1)}$，则由(1.3)式知

$$\left|x_{k+1}-\sqrt{7}\right|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{7}}(x_k-\sqrt{7})^2\leqslant\frac{1}{2\sqrt{7}}\left[\frac{1}{2}\times10^{-(n-1)}\right]^2$$

$$\leqslant\frac{10}{4\sqrt{7}}\times\frac{1}{2}\times10^{-(2n-1)}\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-(2n-1)}.$$

因而 x_{k+1} 是 $\sqrt{7}$ 的具有 $2n$ 位有效数字的近似值.

1.2.2　数据误差的影响

例 1.5　设 $x>0$，x 的相对误差限为 δ，求 x^n 和 $\ln x$ 的相对误差限.

解　由已知条件知 $\left|e_r(x)\right|\leqslant\delta$. 由一元函数 $y=f(x)$ 的相对误差公式

$$e_r(y)\approx f'(x)\frac{x}{f(x)}e_r(x)$$

有

$$e_r(x^n)\approx nx^{n-1}\cdot\frac{x}{x^n}\cdot e_r(x)=ne_r(x),\qquad \left|e_r(x^n)\right|\approx\left|ne_r(x)\right|\leqslant n\delta;$$

$$e_r(\ln x)\approx\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\ln x}e_r(x)=\frac{1}{\ln x}e_r(x),\qquad \left|e_r(\ln x)\right|\approx\left|\frac{e_r(x)}{\ln x}\right|\leqslant\frac{\delta}{\left|\ln x\right|}.$$

例 1.6　设 $y=\ln x$. 当 $x\approx a\,(a>0)$ 时，如果已知对数 $\ln a$ 的绝对误差限为 $\frac{1}{2}\times10^{-n}$，试估计真数 a 的相对误差限及有效数字位数.

解　由 $y=\ln x$ 知 $\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x}$. 因而 $e(y)\approx e_r(x)$. 于是

$$e(\ln a)\approx e_r(a).$$

由 $\left|e(\ln a)\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-n}$ 得到

$$\left|e_r(a)\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-n},$$

又由 $e(a)=a\,e_r(a)$ 得

$$\left|e(a)\right|\leqslant a\times\frac{1}{2}\times10^{-n}.$$

设 $a=(0.\beta_1\beta_2\cdots)\times10^m$，$\beta_1\geqslant1$,则

$$\left|e(a)\right|\leqslant10^m\times\frac{1}{2}\times10^{-n}.$$

因而真数 a 具有 n 位有效数字.

例 1.7 设计算球体积允许其相对误差限为 1%,问测量球半径的相对误差限最大为多少?

解 记球半径为 R,球体积为 V. 由题意知 $\left|e_r(V)\right|\leqslant1\%$. 由公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 知 $\mathrm{d}V=4\pi R^2\mathrm{d}R$,于是

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{4\pi R^2\mathrm{d}R}{\frac{4}{3}\pi R^3}=3\frac{\mathrm{d}R}{R}.$$

因而

$$\left|e_r(R)\right|\approx\frac{1}{3}\left|e_r(V)\right|\leqslant\frac{1}{3}\times1\%=0.33\%,$$

即测量球半径的相对误差限最大为 0.33%.

例 1.8 真空中自由落体运动距离 s 和时间 t 的关系是 $s=\frac{1}{2}gt^2$, g 是重力加速度. 现设 g 是准确的,而对 t 的测量有 ±0.1 秒的误差. 证明当 t 增加时,距离的绝对误差增加,而相对误差却减少.

解 由 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 得 $\mathrm{d}s=gt\mathrm{d}t$,因而

$$e(s)\approx gt\,e(t),\qquad e_r(s)=\frac{e(s)}{s}\approx\frac{gt\,e(t)}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{2}{t}e(t).$$

于是

$$\left|e(s)\right|\approx gt\left|e(t)\right|,\qquad\left|e_r(s)\right|\approx\frac{2}{t}\left|e(t)\right|.$$

易知当 $\left|e(t)\right|$ 固定时, $\left|e(s)\right|$ 随着 t 的增加而增加,而 $\left|e_r(s)\right|$ 随着 t 的增加而减少.

例 1.9 已测量某长方形场地长 $a=110$ 米,宽 $b=80$ 米.若

$$\left|a-a^*\right|\leqslant0.1(\text{米}),\qquad\left|b-b^*\right|\leqslant0.1(\text{米}),$$

试求其面积的绝对误差限和相对误差限.

解 由题意知 $a=110$, $b=80$, $\left|e(a)\right|\leqslant0.1$, $\left|e(b)\right|\leqslant0.1$, $\left|e_r(a)\right|=$

$\left|\frac{e(a)}{a}\right| \leqslant \frac{0.1}{110}$, $|e_r(b)| = \left|\frac{e(b)}{b}\right| \leqslant \frac{0.1}{80}$.

面积 $S = ab$. 计算面积 S 的绝对误差限为

$$\begin{aligned}|e(S)| &\approx |be(a) + ae(b)| \leqslant b|e(a)| + a|e(b)| \\ &\leqslant 80 \times 0.1 + 110 \times 0.1 = 19,\end{aligned}$$

计算面积 S 的相对误差限为

$$\begin{aligned}|e_r(S)| &\approx |e_r(a) + e_r(b)| \leqslant |e_r(a)| + |e_r(b)| = \frac{0.1}{110} + \frac{0.1}{80} \\ &= 0.00216.\end{aligned}$$

例 1.10　由图 1.1 知道三角形一边和两邻角的近似值为 $a = 100, \beta = 45°$, $\gamma = 45°$. 假设 a, β, γ 的观测误差限分别为0.1, 0.1°,0.1°, 试计算另外的边和角, 并给出误差的界.

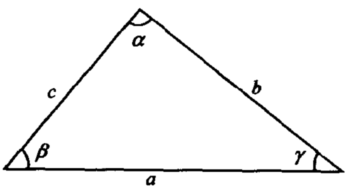


图 1.1

解　由题意知 $a = 100, \beta = 45° = \frac{\pi}{4}, \gamma = 45° = \frac{\pi}{4}$, $|e(a)| \leqslant 0.1$, $|e(\beta)| \leqslant 0.1° = \frac{\pi}{1800}$, $|e(\gamma)| \leqslant 0.1° = \frac{\pi}{1800}$. 根据三角形内角和为 π 知

$$\alpha = \pi - \beta - \gamma = \frac{\pi}{2},$$

$$|e(\alpha)| \approx |-e(\beta) - e(\gamma)| \leqslant |e(\beta)| + |e(\gamma)| \leqslant \frac{\pi}{1800} + \frac{\pi}{1800} = \frac{\pi}{900} = 0.2°.$$

由正弦定理有

$$b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 100 \times \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}} = 50\sqrt{2},$$

$$c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 100 \times \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}} = 50\sqrt{2}.$$

由

$$db=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}da+a\ \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}d\beta-a\ \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}d\alpha$$

知

$$e(b)\approx\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}e(a)+a\ \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}e(\beta)-a\ \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}e(\alpha),$$

因而

$$\begin{aligned}|e(b)|&\approx\left|\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}e(a)+a\ \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}e(\beta)-a\ \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}e(\alpha)\right|\\&\leqslant\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}|e(a)|+a\ \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}|e(\beta)|+a\ \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}|e(\alpha)|\\&=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}}\times0.1+100\times\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}}\times\frac{\pi}{1800}+100\times\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\times\frac{\pi}{900}\\&=0.194.\end{aligned}$$

同理$|e(c)|\leqslant0.194$.

1.2.3 设计算法时应注意的几个问题

例 1.11 设 $I_n=\int_0^1 x^n e^{x-1}dx$,求证:

(1) $I_n=1-nI_{n-1}$, $n=1,2,3,\cdots$;

(2) 正向递推时误差传播逐步放大,逆向递推时误差传播逐步衰减.

解 (1) 当 $n\geqslant1$ 时,

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^1 x^n e^{x-1}dx=\int_0^1 x^n de^{x-1}=x^n e^{x-1}\Big|_{x=0}^{1}-\int_0^1 e^{x-1}dx^n\\&=1-n\int_0^1 x^{n-1}e^{x-1}dx=1-nI_{n-1}.\end{aligned}$$

(2) 正向递推　由 I_{n-1} 计算 I_n:

$$I_n=1-nI_{n-1},\qquad n=1,2,3,\cdots.$$

若已知 I_{n-1} 的一个近似值 $\tilde{I}_{n-1}$,则实际算得的 I_n 的近似值为

$$\tilde{I}_n=1-n\tilde{I}_{n-1}.$$

将以上两式相减得

$$I_n - \tilde{I}_n = (-n)(I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1}),$$

两边取绝对值得

$$\left| I_n - \tilde{I}_n \right| = n \left| I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1} \right|.$$

I_{n-1} 的误差将放大 n 倍传到 I_n. 因而正向递推时误差传播逐步放大.

逆向递推　由 I_n 计算 I_{n-1}:

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n), \qquad n = N, N-1, N-2, \cdots, 1.$$

若已知 I_n 的一个近似值 $\tilde{I}_n$,则实际算得的 I_{n-1} 的近似值为

$$\tilde{I}_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - \tilde{I}_n).$$

将以上两式相减得

$$I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1} = \left(-\frac{1}{n}\right)(I_n - \tilde{I}_n),$$

两边取绝对值得

$$\left| I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1} \right| = \frac{1}{n} \left| I_n - \tilde{I}_n \right|.$$

I_n 的误差将缩小 n 倍传到 I_{n-1}. 因而逆向递推时误差传播逐步衰减.

例 1.12　利用秦九韶算法计算多项式

$$p(x) = x^7 - 2x^6 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x - 1$$

在 $x = 2$ 处的值 $p(2)$.

解　将所给多项式的系数按降幂排列,缺项系数看成零.

	1	−2	0	−3	4	−1	6	−1
2		2	0	0	−6	−4	−10	−8
	1	0	0	−3	−2	−5	−4	−9

所以 $p(2) = -9$.

例 1.13　计算

$$(10 - \sqrt{99})^{10}.$$

取 $\sqrt{99} \approx 9.9499$,分析下述两种运算各具有几位有效数字.

(1) $(10 - \sqrt{99})^{10} \approx (10 - 9.9499)^{10} = 0.99627047 \times 10^{-13}$;

(2) $\dfrac{1}{(10 + \sqrt{99})^{10}} \approx \dfrac{1}{(10 + 9.9499)^{10}} = 0.10013658 \times 10^{-12}$.