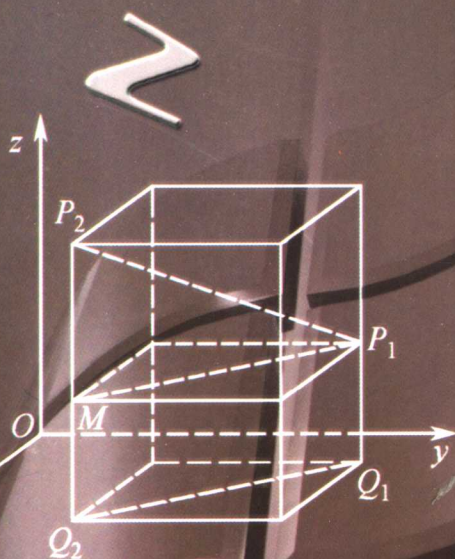


解析几何

陈抚良 张振兰 黄浩然 编



科学出版社

www.sciencep.com

解 析 几 何

陈抚良 张振兰 黄浩然 编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书针对中学新课标和大学面向 21 世纪教学改革的实际,系统地介绍了空间直角坐标系及其相关概念、空间的平面和直线、常见的曲面与曲线、空间区域及作图、一般二次曲线方程的化简与作图、几何学发展及前沿概况等。

本书适合于师范类高校作为必修课的教材或参考书,也可供高等院校理工类学生、大学自考生、中等学校数学教师、工程技术人员学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

解析几何/陈抚良等编. —北京:科学出版社,2005

ISBN 7-03-014864-9

I. 解… II. 陈… III. 解析几何-高等学校-教材 IV. O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第002229号

责任编辑:杨瑰玉

责任印制:高 嵘/封面设计:曹 刚

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

湖北北京山德新印刷有限公司印刷

科学出版社出版 各地新华书店经销

*

2005年1月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2005年1月第一次印刷 印张:9 1/4

印数:1~4 000 字数:241 000

定价:15.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

编者的话

本书是根据面向 21 世纪教材改革的精神,针对中学的教材改革,结合三位作者数十年从事教学实践的体会并总结“解析几何”课程建设的课题研究成果编写而成的.

本书在编写过程中注意突出下列几点:

一、针对中学的新课标,力求解决传统的“解析几何”教材与高中数学教学内容部分重复和脱节的现象.

二、更注重代数、作图等知识的充实和运用,尤其是介绍了几何发展的简史及某些前沿概况,体现了现代数学思想,使本教材观点较高,内容有新意,且表述深入浅出.

三、新增了空间区域简图及画法和相关内容,将有利于提高学生空间图形的作图能力及几何直观想象力,为学生学习多元微积分、高等几何、微分几何等后继课程奠定坚实的基础.

四、在内容的取舍、编排、习题选配等方面作了较大的改革尝试和整合,使之更贴近教学实际,易教易学.

本书由陈抚良(第四、六章)、张振兰(第二、三章)、黄浩然(第一、五章)合编,全书由黄浩然统稿.

书中标有“*”号的内容可根据教学实际选修.

本书在编写过程中参考了国内外诸同仁的教材,也得到了不少同行的帮助,还得到了江西师范大学教务处、数学与信息学院的大力支持,在此一并致谢.

限于编者水平,书中定有不少不妥之处,敬请读者批评指正.

编者

2004 年 10 月

目 录

第一章 空间坐标系与向量代数	1
§ 1 空间直角坐标系的建立	1
§ 2 两点间的距离和球面方程	5
§ 3 柱面坐标和球面坐标	9
§ 4 向量代数	12
§ 5 利用向量法解立体几何问题	63
§ 6 方程与图形	73
* § 7 坐标变换与点变换	76
总习题一	94
第二章 空间的平面与直线	97
§ 1 平面方程, 平面间相关位置	97
§ 2 空间直线的方程, 直线、平面间的位置关系	106
§ 3 点、直线、平面间的度量关系	115
§ 4 平面束	125
总习题二	130
第三章 常见的曲面	134
§ 1 空间曲面和空间曲线的参数方程	134
§ 2 柱面	140
§ 3 锥面	148
§ 4 旋转曲面	154
§ 5 椭球面、双曲面、抛物面	160
§ 6 二次曲面的种类	171
§ 7 直纹二次曲面	173
总习题三	180
第四章 二次曲面所围空间区域	183
§ 1 直观图及投影的概念	183

§ 2 二次曲线的直观图	188
§ 3 二次柱面的直观图	193
§ 4 二次曲面的直观图	196
§ 5 空间区域简图的画法	203
第五章 一般二次曲线方程的化简与作图	214
§ 1 二次曲线方程的化简	215
§ 2 不变量与二次曲线方程的化简及分类	225
总习题五	239
* 第六章 几何学的发展简介	241
§ 1 几何学的产生	241
§ 2 几何学的发展简史和前沿概述	242
附录 矩阵与行列式	248
§ 1 矩阵与行列式的定义	248
§ 2 行列式的性质	251
§ 3 线性方程组	254
部分习题答案与提示	262

第一章 空间坐标系与向量代数

数学中两大研究对象“形”与“数”的矛盾统一是数学发展的内在因素. 用代数方法研究几何问题是解析几何的基本思想. 为了把代数运算引到几何中来, 首先必须设法把空间的几何结构代数化, 数量化. 本章介绍空间坐标系, 是形与数结合的基础. 有了空间坐标系, 就可将空间的点与三个有顺序的实数构成的实数组相对应, 从而使空间曲线或曲面与它们的方程组或方程相对应.

§ 1 空间直角坐标系的建立

我们知道, 在平面直角坐标系中, 一个点的位置可以用两个数 (即该点的坐标) 来确定, 而在空间中的一个点却要用三个数才能确定它的位置. 例如: 要想描述飞离发射架后某时刻导弹的确切位置, 如果说明此刻导弹位于发射架以东 50 千米, 以北 30 千米, 离地 15 千米, 那么导弹在空间中的具体位置就确定了.

现在我们来引进空间直角坐标系的概念.

在空间, 任意取定一点 O 和过点 O 的三条两两互相垂直的直线 Ox, Oy, Oz , 分别取定它们的正向, 再取定长度单位 (图 1-1). 这样就确定了一个空间直角坐标系 $Oxyz$, 点 O 叫做坐标原点, 三条轴 Ox, Oy 与 Oz 都叫做坐标轴, 并依次叫做 x 轴, y 轴和 z 轴. 每两条坐标轴所决定的

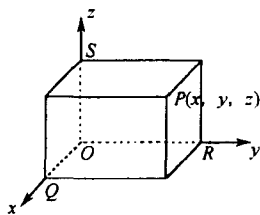


图 1-1

平面叫做坐标平面. 共有三个坐标平面, 按照坐标平面所包含的坐标轴, 分别叫做 xOy 平面、 yOz 平面和 zOx 平面.

直角坐标系有右手系和左手系两种. 如果把右手的拇指和食

指分别指着 x 轴和 y 轴的方向时,中指就可以指着 z 轴的方向,这样的坐标系叫做右旋坐标系或右手坐标系;如果左手的这三个手指依次指着 x 轴、 y 轴和 z 轴,这样的坐标系叫做左旋坐标系或左手坐标系(图 1-2). 我们以后在讨论空间问题时,如无特别声明,一般都采用空间右手直角坐标系.

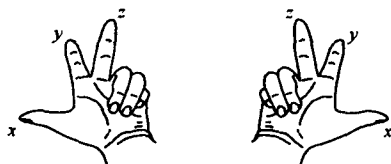


图 1-2

在建立了空间直角坐标系之后,对于空间任意一点 P ,可确定它的坐标如下:过点 P 分别作三条坐标轴的垂直平面,它们和坐标轴 Ox, Oy, Oz 依次交于 Q, R, S (图 1-1),这三点在相应坐标轴上的坐标依次为 x, y, z ,于是对于点 P 就确定了三个有顺序的实数 x, y, z ,叫做点 P 的坐标,记为点 $P(x, y, z)$ 或 (x, y, z) . x, y, z 依次称为点 P 的横坐标、纵坐标、竖坐标. 反之,任意给定三个有顺序的实数 x, y, z ,我们在 x 轴、 y 轴、 z 轴上分别作出以 x, y, z 为坐标的点 Q, R, S ,再过 Q, R, S 分别作出与 x 轴、 y 轴、 z 轴垂直的三个平面,设它们相交于 P 点,则 P 点的坐标就是 (x, y, z) .

因此,在空间取定直角坐标系后,空间中任意一点惟一地决定一个“有序三数组”;反之,任意一个这样的“有序三数组”惟一地决定空间中的一个点. 也就是说,建立了空间直角坐标系之后,空间中的所有点与由三个有顺序的实数构成的数组的全体之间便建立了一一对应关系.

显然,在 xOy 面上的点的竖坐标 $z=0$,即 xOy 面上点的坐标是 $(x, y, 0)$;在 yOz 平面和 zOx 平面上,点的坐标分别是 $(0, y, z)$ 和 $(x, 0, z)$. 而在 x 轴、 y 轴、 z 轴上,点的坐标分别是 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$. 原点的坐标为 $(0, 0, 0)$.

三个坐标平面把空间划分成八个区域,称为八个卦限,用大写罗马字母表示.它们按图 1-3 所示依次叫做第 I 卦限,第 II 卦限,……,第 VIII 卦限.各卦限内的点(除去坐标面上的点外)的坐标 (x, y, z) 的符号如表 1-1 所示.

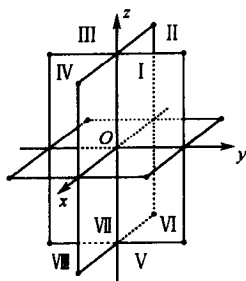


图 1-3

表 1-1 各卦限的坐标符号

卦限 坐标	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

例如,点 $(1, 3, 2)$ 在第 I 卦限,点 $(-2, 3, 5)$ 在第 II 卦限,而点 $(-2, -1, -3)$ 和点 $(-5, 3, -2)$ 分别在第 VII 和第 VI 卦限.

为了正确地画出空间直角坐标系及描出坐标为已知的点,我们在这里介绍一种画图法.按照这种画法,可以获得较好的立体感和直觉的效果.任意取定一点为原点 O ,从点 O 起向右的射线为正 y 轴,竖直向上的射线为正 z 轴,向左下方的对角线为正 x 轴.取 y 轴和 z 轴的单位长相等,但 x 轴上的单位长则取成等于那两个单位长的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (即等于以 y 轴和 z 轴的单位长为边长的正方形的对角线的一半).这样,直观上就会觉得这三个轴上的单位长是大体相等的(图 1-4).

如果从点 $P(x, y, z)$ 向 xOy 平面引垂线得垂足 Q (图 1-4),那

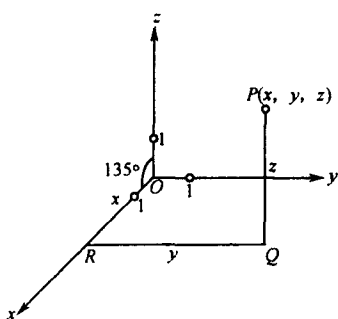


图 1-4

么点 P 的竖坐标 z 的绝对值就是 QP 的长度, 而 z 为正或为负依有向线段 QP 与 z 轴同向或反向而定. 这就是说, 点 P 的竖坐标 z 可以用有向线段 QP 的长度和方向来表示. 同样, 横坐标 x 和纵坐标 y 也可以分别用有向线段 OR 和 RQ 的长度和方向来表示. 由此可知, 点 P 的坐标可以用折线 $ORQP$ 来表示, 这条折

线叫做点 P 的坐标折线(图 1-4). 因此, 要由坐标 (x, y, z) 作出点 P 来, 只需从原点 O 出发画出坐标折线 $ORQP$. 反之, 已知点 P , 要确定其坐标, 就要从点 P 开始画出坐标折线 $PQRO$.

习 题 1-1

1. 先画出一个空间直角坐标系, 再描出下列各点:
 $A(2, 3, 1), B(-1, 3, 2), C(-1, -2, -4),$
 $D(0, 1, -1), E(0, 0, 5), F(-5, 0, 3),$
 $G(4, -1, 0), H(2, -2, -3).$
2. 下列各点相对于坐标系位置有何特殊?
 $A(-2, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, -5),$
 $D(0, 1, -2), E(3, 0, 1), F(2, -1, 0).$
3. 从点 $P(-1, 2, 3)$ 和 $Q(a, b, c)$ 分别向各坐标平面和各坐标轴引垂线, 求各垂足的坐标.
4. 已知点 $P(2, -3, -1)$ 和 $M(a, b, c)$, 分别求这两点关于坐标平面、坐标轴、坐标原点的对称点的坐标.
5. 指出适合下列条件的点的位置: (1) 横坐标为零的点; (2) 竖坐标为零的点; (3) 横坐标和纵坐标同时为零的点.
6. 设长方体的三条棱的长为 2, 7, 8. 若以它的对称中心为原

点,以平行于上述三条棱的直线依次为 x 轴, y 轴, z 轴,试写出长方体各个顶点的坐标.

§ 2 两点间的距离和球面方程

2.1 两点间的距离

现在,我们利用直角坐标来导出空间中两点间的距离公式.

定理 1 空间两点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离是

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

证 分别自 P_1 和 P_2 向 xOy 平面引垂线,垂足为 Q_1 和 Q_2 . 过 P_1 作平面平行于 xOy 平面,设这平面与 Q_2P_2 的交点为 M (图 1-5). 因 $\angle P_1MP_2$ 为直角,由勾股定理得

$$\begin{aligned} (P_1P_2)^2 &= (P_1M)^2 + (MP_2)^2 \\ &= (Q_1Q_2)^2 + (MP_2)^2, \end{aligned}$$

但

$$MP_2 = Q_2P_2 - Q_2M = Q_2P_2 - Q_1P_1 = z_2 - z_1.$$

注意到 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 实际上是点 Q_1 和 Q_2 在 xOy 平面上的直角坐标,根据平面解析几何两点间的距离公式,有:

$$(Q_1Q_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

从而得 $(P_1P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, 即

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad \square$$

由空间两点间的距离公式可知,任意一点 $P(x, y, z)$ 和原点的距离为 $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

例 1 在 y 轴上求一点,使它与点 $A(3, 1, 0)$ 和 $B(-2, 4, 1)$ 等距.

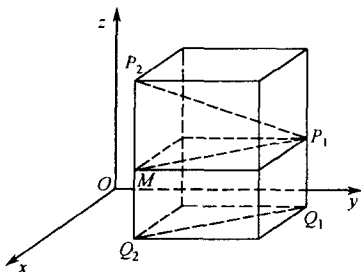


图 1-5

解 设所求点为 $P(0, y, 0)$, 则有 $|PA| = |PB|$, 即

$$\sqrt{(3-0)^2 + (1-y)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-2-0)^2 + (4-y)^2 + (1-0)^2}.$$

解得 $y = \frac{11}{6}$, 故所求点为 $P(0, \frac{11}{6}, 0)$. $\square$

2.2 球面方程

我们运用距离公式(1)来建立以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心, $r > 0$ 为半径的球面 S 的方程(图 1-6).

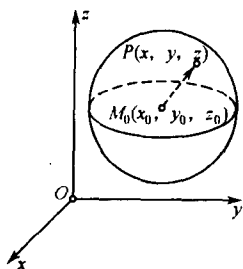


图 1-6

设 $P(x, y, z)$ 是空间任意一点, 那么点 P 在球面 S 上的充分必要条件是点 P 到球心 M_0 的距离为 r , 即 $|PM_0| = r$. 利用两点的距离公式, 有:

$$|PM_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r,$$

即

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2. \quad (2)$$

(2)式称为球面的标准方程. 特别地, 以原点为球心, 半径为 $r > 0$ 的球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (3)$$

将(2)式展开后, 得到

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0,$$

这是一个三元二次方程, 其特点是 x^2, y^2, z^2 项的系数都相等, 且交叉项 xy, yz, zx 消失. 反之, 若给定一个具有上述特点的三元二

次方程:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0,$$

通过配方, 方程可写成:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 + d - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{4} = 0,$$

即

$$\left[x - \left(-\frac{a}{2}\right)\right]^2 + \left[y - \left(-\frac{b}{2}\right)\right]^2 + \left[z - \left(-\frac{c}{2}\right)\right]^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}.$$

当 $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$ 时, 这个方程就表示以 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ 为球心, 半径 $r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}}$ 的球面;

当 $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0$ 时, 方程仅表示一个点 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$;

当 $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$ 时, 任何点的坐标都不会满足这个方程, 所以方程不表示任何曲面. 把这个规律写成定理, 即:

定理 2 形如

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

的三元二次方程, 其图形或者是球面, 或者是一个点, 或者不代表任何图形. $\square$

例 2 求方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 2 = 0$ 所表示的图形.

解 配方, 得到 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 2^2$. 因此方程表示一个以 $(1, -2, -1)$ 为球心, 半径为 2 的球面. $\square$

例 3 求方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ 所表示的图形.

解 配方, 得到

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 0.$$

因此方程表示一个点: $(1, -2, 0)$. $\square$

例 4 求方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2 = 0$ 所表示的图形.

解 配方,得到

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

显然任何点的坐标都不会满足上述方程,所以这个方程不代表任何图形. $\square$

习 题 1-2

1. 求点 $A(4, -3, 2)$ 到坐标原点和到各坐标轴的距离.

2. 在 z 轴上求一点,使它与点 $P(3, 2, -1)$ 和 $Q(0, 5, 1)$ 等距.

3. 证明:以 $A(4, 3, 1)$, $B(7, 1, 2)$ 和 $C(5, 2, 3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

4. 证明:顶点为 $A(1, -2, 1)$, $B(3, -3, -1)$, $C(4, 0, 3)$ 的三角形是直角三角形.

5. 求下列各球面的方程:

(1) 球心为 $(-1, 0, 1)$, 半径为 2;

(2) 球心在 origin, 且经过点 $(6, -2, 3)$;

(3) 球面过 origin, 球心坐标为 $(1, -2, 3)$;

(4) 通过 origin 与 $(4, 0, 0)$, $(1, 3, 0)$, $(0, 0, -4)$.

6. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ 的球心和半径, 并作图.

7. 求下列球面的球心与半径:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 2z + 10 = 0$;

(2) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$;

(3) $36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 36x + 24y - 72z - 95 = 0$.

8. 下列方程各代表什么图形:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2 = 0$;

(2) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z + 9 = 0$;

(3) $x^2 + y^2 + z^2 - 12y + 36 = 0$.

§ 3 柱面坐标和球面坐标

空间坐标系除了直角坐标系外,还有另两种较常用的坐标系——柱面坐标和球面坐标.

3.1 柱面坐标

设有空间直角坐标系 $Oxyz$, $P(x, y, z)$ 为空间任意一点. 过点 P 作 xOy 平面的垂线, 其垂足为 P' . 在 xOy 平面上取 O 点为极点, Ox 轴为极轴, 那么 P' 点的平面极坐标为 (r, θ) . 这时点 P 的位置可用数组 (r, θ, z) 确定 (图 1-7). 数组 (r, θ, z) 称为点 P 的柱面坐标, 记为 $P(r, \theta, z)$. 空间中这三个坐标的变化范围是:

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

如果取消上述限制, 允许取值范围扩大为 $-\infty < r, \theta, z < +\infty$, 可定义广义柱面坐标.

从图 1-7 中可知, 空间任一点 P 的直角坐标 (x, y, z) 与柱面坐标 (r, θ, z) 之间的变换公式为

$$(1) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z, \\ x^2 + y^2 = r^2, \\ \tan \theta = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

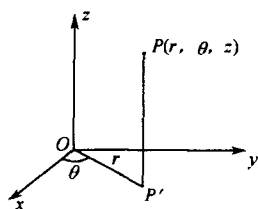


图 1-7

在柱面坐标系中, 下列三个方程表示的图形分别称为相应的坐标曲面:

$r = \text{常数}$, 是以 z 轴为轴, r 为半径的圆柱面;

$\theta = \text{常数}$, 是过 z 轴的半平面;

$z = \text{常数}$, 是与 xOy 平面平行的平面 (图 1-8).

读者容易证明,在柱面坐标系中两点 $P_1(r_1, \theta_1, z_1)$ 和 $P_2(r_2, \theta_2, z_2)$ 之间的距离为:

$$|P_1 P_2| = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 + (z_2 - z_1)^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}. \quad (2)$$

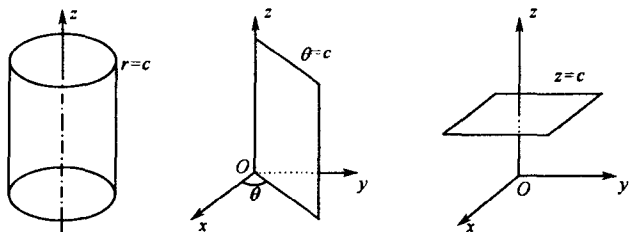
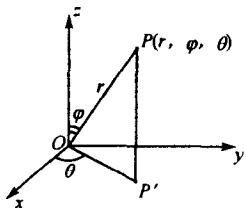


图 1-8

3.2 球面坐标

设有空间直角坐标系 $Oxyz$, $P(x, y, z)$ 为空间任意一点. 过 P 作 xOy 平面的垂线, 垂足为 P' 点, 连结 OP, OP' . 记 O 和 P 两点间的距离为 r , OP 与 z 轴正向的夹角为 φ , x 轴到 OP' 的夹角为 θ . 这时点 P 在空间的位置就可以用数组 (r, φ, θ) 来确定(图 1-9), 数组 (r, φ, θ) 叫做 P 点的球面坐标, 记为 $P(r, \varphi, \theta)$. 空间中这三个坐标的变化范围是:



$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

图 1-9

如果取消以上限制, 类似地可以定义广义球面坐标.

由图 1-9 可以看出, 空间任一点 P 的直角坐标 (x, y, z) 与球面坐标 (r, φ, θ) 之间的变换公式为

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi, \\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \varphi=\arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \tan\theta=\frac{y}{x}. \end{cases} \quad (3)$$

在球面坐标系中,三组坐标曲面分别是:

$r=\text{常数}$,是以原点 O 为球心、 r 为半径的球面;

$\varphi=\text{常数}$,是以原点 O 为顶点、 φ 为半顶角、 z 轴为轴的圆锥面;

$\theta=\text{常数}$,是过 z 轴的半平面(图 1-10).

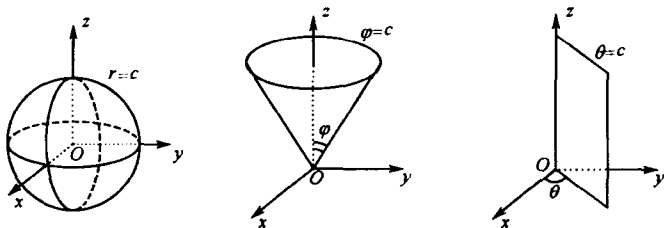


图 1-10

不难证明,在球面坐标系中两点 $P_1(r_1, \varphi_1, \theta_1)$ 和 $P_2(r_2, \varphi_2, \theta_2)$ 之间的距离为:

$$|P_1P_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2[\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos(\theta_2-\theta_1) + \cos\varphi_1\cos\varphi_2]}. \quad (4)$$

习 题 1-3

1. 点 A 的直角坐标是 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, 求它的柱面坐标和球