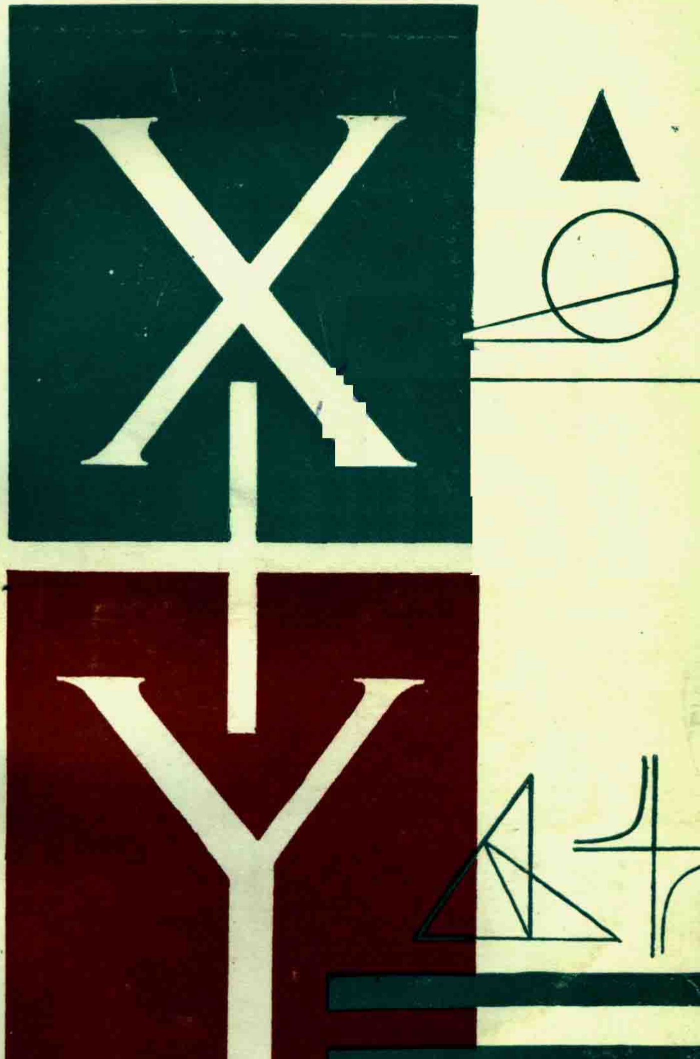
代数

第二册



高中数学题精编

浙江教育出版社

高中数学题精编

代　　数

第二册

谢玉兰　丁宗武　许纪传
钱孝华　江焕棣　陶敏之

浙江教育出版社

高中数学题精编

代数

第二册

谢玉兰　丁宗武　许纪传

钱孝华　江焕棣　陶敏之

*

浙江教育出版社出版

（杭州武林路125号）

宁波甬江印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本787×1092　1/32　印张6.125　字数135,000

1984年11月第一版

1984年11月第一次印刷

印数：1—66,500

统一书号：7346·169

定　价：0.61元

目　录

第一章　反三角函数和简单三角方程

一、反三角函数

【分析与要点】

1　三角函数是周期函数，在其定义域内当然不是一一映射，对于同一函数值，相应的自变量有无穷多个．因此，为了获得反三角函数，必须缩小、限制原三角函数的定义域为某一单调区间，使之成为一一映射．例如

三角函数：　$y=\sin x$，$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$；

（x 为自变量）

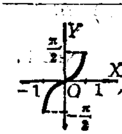
反三角函数：$x=\arc\sin y$，$-1\leqslant y\leqslant 1$；

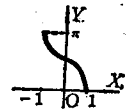
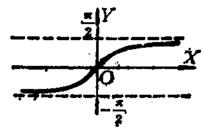
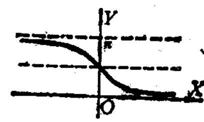
↓改变记号　（y 为自变量）

反三角函数：$y=\arc\sin x$，$-1\leqslant x\leqslant 1$．

（x 为自变量）

2

名　　称	定　义　域	值　　域	图　　象
$y=\arc\sin x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$	

名　　称	定 义 域	值　　域	图　　象
$y=\operatorname{arc}\cos x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant \pi$	
$y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$	$-\infty<x<+\infty$	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$	
$y=\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$	$-\infty<x<+\infty$	$0<y<\pi$	

3　在学习反三角函数的概念或有关反三角函数的计算过程中，只要把反三角函数 y 看成角或弧，而把自变量 x 看成三角函数值，在解决许多反三角函数的问题时，能收到较好的效果．但这个角必须满足反三角函数的值域要求．

4　几个重要的关系式：

(1) $\operatorname{arc}\sin(-x)=-\operatorname{arc}\sin x$,

$\operatorname{arc}\cos(-x)=\pi-\operatorname{arc}\cos x$,

$\operatorname{arc}\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$,

$\operatorname{arc}\operatorname{ctg}(-x)=\pi-\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$;

(2) 在反三角函数定义域内有如下恒等式：

$\sin(\operatorname{arc}\sin x)=x$, $\cos(\operatorname{arc}\cos x)=x$,

$x\in[-1,1]$,

$\operatorname{tg}(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)=x$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x)=x$,

$x\in(-\infty,+\infty)$;

（3）在反三角函数的值域内有如下恒等式：

$$\arcsin(\sin x)=x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arccos(\cos x)=x,\quad x\in[0,\pi],$$

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)=x,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg} x)=x,\quad x\in(0,\pi).$$

（A）

1．下列各式是否有意义：

（1）$\arcsin 3$；　　（2）$\arcsin 30°$；

（3）$\arccos\frac{\pi}{6}$；　　（4）$\arcsin\frac{\pi}{3}$；

（5）$\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$；　　（6）$\arccos\frac{a^2}{a^2+1}$；

（7）$\arcsin(\sqrt{2}-1)^2$；　　（8）$\arcsin\frac{\sqrt{10}}{\pi}$；

（9）$\arcsin(\cos x)$；　　（10）$\arcsin(\sec x)$．

2．填空：

（1）$\arcsin(\quad\quad)=-\frac{\pi}{2}$；

（2）$\sin[\arccos(\quad\quad)]=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（3）$\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=(\quad\quad)$；

(4) $\arcsin\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=(\quad)$;

(5) $\cos[\arcsin(\quad)]=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(6) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)=(\quad)$;

(7) $\sin[\arcsin(\quad)]=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(8) $\arcsin[\cos(\quad)]=\frac{\pi}{6}$.

3. 判断下列各式是否成立，并说明理由：

(1) $\because\ \sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore\ \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=120°$;

(2) $\sin(\arcsin\sqrt{3})=\sqrt{3}$;

(3) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$;

(4) $\arcsin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(5) $|\arcsin x|\leqslant 1$;

(6) $\sin\left(\arccos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$;

(7) $\sin(\arcsin x)=x$;

(8) $\arcsin(\sin x)=x$;

(9) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

(10) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 5)=5$;

(11) $\because$ $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$,

$\therefore$ $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\dfrac{1}{2}$

$$=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$ $\sin\left[\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$

$$=\sin\left(\pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

于是 $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

【注意】

(1) 在进行反三角函数的运算时，必须牢记反三角函数的定义域和值域，特别是值域．如在写出了$y=\arcsin x$的同时，应随即写出$\sin y=x$，$y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

如 $\alpha=\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$,

则 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\therefore$ $\alpha=-\dfrac{\pi}{6}$.

又如 $\beta=\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

则 $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\beta\in[0,\pi]$

$\therefore \quad \beta=\dfrac{3\pi}{4}$;

（2）要特别强调公式 $\arcsin(\sin x)=x$ 成立的条件是 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 没有这个条件，这个公式是不能随便用的。

4．求下列函数的定义域与值域：

（1） $y=\arcsin(1-2x)$；

（2） $y=\dfrac{1}{2}\arcsin\left(-\dfrac{x}{2}\right)$；

（3） $y=2\arcsin\dfrac{1}{2x}$；

（4） $y=\arcsin|x|$；

（5） $y=\sqrt{\arccos x}$；

（6） $y=\arccos(x^2-3)+\dfrac{\pi}{4}$.

5．（1）求函数 $y=x+\arcsin x$ 当 $x=0$、$\dfrac{1}{2}$、1、$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时的值；

（2）求函数 $y=\arccos x+\operatorname{arctg}2x$ 当 $x=0$、$-\dfrac{1}{2}$、$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时的值；

（3）设 $f(x)=\arcsin(\sin x)$，

求 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$、$f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$、$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值。

6．求下列各式中 α 的取值范围：

（1） $\alpha=\arcsin x$，$x\in[-1,0]$；

(2) $\alpha=\arccos x$，$x\in[-1,0]$；

(3) $\alpha=\operatorname{arc\,tg} x$，$x\in[-1,1]$；

(4) $\alpha=\operatorname{arc\,ctg} x$，$x\in[-1,\sqrt{3}]$；

(5) $\alpha=2\pi-2\arccos x$，$|x|\leqslant 1$.

7．不查表，确定下列各式的符号，并说明理由：

(1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$；

(2) $\operatorname{arc\,tg}(-2)-\operatorname{arc\,tg}(-1.5)$；

(3) $\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)-\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\right)$；

(4) $\operatorname{arc\,ctg}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{arc\,ctg}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$；

(5) $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)-\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$；

(6) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}-\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

8．写出下列各三角函数的反函数，并指明反函数的定义域和值域：

(1) $y=\sin 3x$；　　(2) $y=2\cos\frac{x}{3}$；

(3) $y=4\operatorname{tg} 3x$.

9．写出下列各反三角函数的反函数，并指明反函数的定义域和值域：

(1) $y=\arccos 2x$；　　(2) $y-3=5\arcsin x$；

(3) $y+1=3\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$.

10．求下列各式的值：

(1) $\operatorname{tg}\left[\arccos\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$;

(2) $\operatorname{ctg}\left\{\arccos\left[\sin\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$;

(3) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$; (4) $\sin\left[2\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$;

(5) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$;

(6) $\sin\left(\arccos\frac{b}{a}\right)$, $(a>b>0)$;

(7) $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)$;

(8) $\arccos\left[\cos\left(-\frac{17}{10}\pi\right)\right]$;

(9) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)$; (10) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{5}\right)$.

11．求下列各式的值：

(1) $\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$;

(2) $\cos\left[\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$;

(3) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\operatorname{arctg}2\sqrt{3}\right)$;

(4) $\cos\{2\arcsin[\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}x)]\}$, $(|x|\geq 1)$.

【注意】进行反三角函数的三角运算时，要特别注意用反三角函数所表示的角的取值范围．因而，在使用同角三角函数的平方关系、半角公式等时，要按角的范围确定其符号．

12. (1) 已知 $\operatorname{arc\,ctg} x=\frac{2\pi}{3}$，求 $\arccos\frac{3x}{2}$ 的值；

(2) 已知 $\arcsin x=-\frac{\pi}{3}$，求 $\operatorname{arc\,tg} 2x$ 的值．

13. 用反三角函数表示下列式子中的 x：

(1) $\sin x=\frac{1}{3}$，$x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$；

(2) $\cos x=-\frac{3}{4}$，$x\in[\pi, 2\pi]$；

(3) $\sin 3x=-\frac{1}{5}$，$x\in\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$；

(4) $\operatorname{tg} 2x=5$，$x\in[0, \pi]$；

(5) $\sin x=\frac{1}{a^2+1}$，$x\in\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$；

(6) $\cos x=\frac{1}{b^2+1}$，$x\in[-\pi, 0]$；

(7) $\operatorname{tg} x=\frac{b}{a}$，$(a>0, b>0)$，$x\in[-\pi, 0]$；

(8) $\cos x=\frac{2ab}{a^2+b^2}$，$x\in[0, \pi]$．

14. (1) 直角 $\triangle ABC$ 的两条直角边长分别为 a、b，用反正弦函数表示锐角 A 和 B；

(2) 菱形的周长等于 p，它的较短的对角线等于 d，求菱形的锐角．

(B)

15. 求下列各式的值：

(1) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)$；

(2) $\operatorname{tg}\left[\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)\right]$;

(3) $\cos\left[\arccos\frac{4}{5}-\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$;

(4) $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arc\,tg}1-2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)$;

(5) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{4}\right)$;

(6) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2a-b}{\sqrt{3}b}-\operatorname{arc\,tg}\frac{2b-a}{\sqrt{3}a}\right)$.

16. (1) 把 $\arccos\frac{40}{41}$化为反正切函数;

(2) 把 $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$化为反余弦函数;

(3) 把 $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}$化为反正切函数;

(4) 把 $\arcsin\frac{2}{3}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}$化为反正切函数.

17. 求下列各式中的 x:

(1) $\arcsin(\sin x)=-\frac{\pi}{4}$, $x\in[0, 2\pi]$;

(2) $\arccos(\cos x)=\frac{\pi}{3}$, $x\in[0, 2\pi]$;

(3) $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}x)=\frac{\pi}{6}$, $x\in[-2\pi, 0]$;

(4) $\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg}x)=\frac{\pi}{4}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

(5) $\arcsin(\cos x)=\frac{\pi}{2}$, $x\in R$;

(6) $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg} x)=0$, $x\in R$.

18. 求下列各函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3-x}+\arccos\dfrac{x-2}{3}$;

(2) $y=\lg\left[\dfrac{\pi}{3}-\arccos(4-x)\right]$;

(3) $y=\arcsin(\lg x)$;

(4) $y=\sqrt{\arcsin(\log_2 x+1)}$;

(5) $y=\arccos\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

(6) $y=\arcsin\left(\dfrac{2}{2+\sin x}\right)$;

(7) $y=\arccos(\operatorname{tg} x)$;

(8) $y=\arcsin\sqrt{\operatorname{tg} x-1}-\dfrac{\pi}{4}$;

(9) $y=\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{3}{2}\arccos(|2x|+1)$.

19. 为求 函数 $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x^2-1}$ 的值域，下面的解法是否正确？正确的答案应该是什么？

解：$\because\ \dfrac{1}{x^2-1}\neq 0$,

$\therefore\quad y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 且 $y\neq 0$.

20. 求适合下列各式中的 x：

(1) $\arcsin\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\arccos x$;

(2) $\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})=\arcsin x$;

(3) $\operatorname{arc\,tg} 1=\arccos(x-1)$;

(4) $\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{11}{60}\right)=-\operatorname{arc\,tg} x$.

21. 求适合下列各式中的 x：

(1) $6\arcsin(x^2-8x+7.5)=\pi$;

(2) $(\arccos x)^2-6\arccos x+8=0$;

(3) $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{4}$.

22. 求证下列各式：

(1) $\cos(2\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(2) $\cos(\arccos x+\arccos y)$

$=xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}$, $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$;

(3) $\lg[\cos(\arcsin x)]$

$=\frac{1}{2}\lg(1+x)+\frac{1}{2}\lg(1-x)$, $|x|<1$.

23. 指出下面解题的错误，并给出正确的解答：

(1) 求证：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, $|x|\leqslant 1$.

证法一：设 $\arcsin x=\alpha$, 则 $\sin\alpha=x$,

设 $\arccos x=\beta$, 则 $\cos\beta=x$.

$\therefore\quad \sin\alpha=\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$,

$\therefore\quad \alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$, 则 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$,

即 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

证法二：

$$
\begin{aligned}
\text{左边}&=\sin(\arc\sin x+\arc\cos x)\\
&=\sin(\arc\sin x)\cos(\arc\cos x)\\
&\quad+\cos(\arc\sin x)\sin(\arc\cos x)\\
&=x^2+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}=x^2+(1-x^2)=1,
\end{aligned}
$$

右边 $=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，

$\therefore$ 左边=右边.

(2) 求证：$\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\arccos\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$.

证明：设 $\alpha=\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$$\beta=\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}},\ \left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right),$$

得 $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$$\cos\beta=\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}},\ \sin\beta=\frac{3-\sqrt{6}}{6},$$

$$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3-\sqrt{6}}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

又 $\because\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}<-\beta<0$，