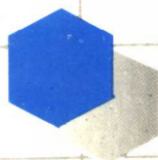


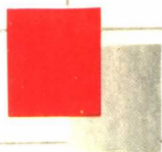
数学方法论丛书

SERIES ON MATHEMATICAL METHODOLOGY



数学的思维方式

席振伟 著



数学方法论丛书

数学的思维方式

席振伟 著

江苏教育出版社

1995·南京

数学方法论丛书
数学的思维方式

席振伟 著
责任编辑 王建军

出 版:江 苏 教 育 出 版 社
(南京中央路 165 号, 邮政编码:210009)
发 行:江 苏 省 新 华 书 店
照 排:南京理工大学激光照排公司
印 刷:常 熟 市 印 刷 二 厂
(地址:常熟市大义镇 邮政编码:215557)

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 7 字数 156.8 千字
1995 年 11 月第 1 版 1995 年 11 月第 1 次印刷
印数 1—3,000 册

ISBN 7—5343—2315—0

G·2068

定价:5.60 元

江苏教育版图书若有印刷装订错误,可向承印厂调换

《数学方法论丛书》顾问

王梓坤 胡世华 胡国定 程其襄

《数学方法论丛书》编辑委员会

主 编 徐利治

副主编 朱梧櫨 萧文强

编 委 (按姓氏笔画为序)

王兴华	王鸿钧	朱梧櫨	刘凤璞
吴学谋	吴望名	欧阳绛	郑毓信
赵振威	徐利治	唐复苏	萧文强

序

数学和任何一门自然科学或社会科学一样,其诞生和发展都离不开思维,都要依靠思维,并通过思维去研究和展现。对于作为思维存在形式之一的数学思维而言,人们也许会立即指出:其特征是高度的抽象性和严密的逻辑性,这固然言之有理,但却并不全然。随着数学方法论这一学科的诞生和发展,特别在我国数学教育界,自1980年以来在著名数学家徐利治先生的倡导下,数学方法论也日益受到重视和发展,以致人们在如下几个方面加深了认识。

其一是深刻认识到数学思维除了抽象性和逻辑性的特征外,同样具有甚或更重要的特征是观察、实验、类比、归纳、猜测、反驳、想象、直觉和美感等等;

其二是对于数学是一种文化这一古今有之的共识有了更深的理解,亦即进一步认识到数学不单纯是处理实际问题的工具,数学教育乃是一种文化素质的教育,或者说提高文化素质的原则,在数学教育中据有重要的位置。如所知,柏拉图曾张榜声明,不懂几何的人不要进他的哲学学校;英国律师至今都要在大学里学习许多数学知识,特别是许多高深的数学课程,都是被誉为西方名将摇篮之美国西点军校学生的必修课。其所以如此,无不源于提高文化素质的原则。几乎可以说,当这些学生真正成为哲学大师、著名律师或运筹帷幄的将帅时,实际上早把学生

时代所学到的那些具体的数学知识忘得一干二净,但他们在当年所受到的数学训练,却一直在他们的工作和事业中起着重要作用,甚至受用终身;

其三是进一步认识到任何重大数学发现和创新,都是数学思维方式发生变革的结果。如所知,大数学家希尔伯特曾指出:任何历史遗留难题的解决,或者任何重大的开创性数学工作的出现,都将伴随着新的数学园地的开辟。这无非是说,只有那些囿于传统思维方式和传统观念统治下无法解决的问题才能长期不得其解,因而此类问题的解决或其他有重大历史意义的开创性工作,都要有新的思维方式的出现和对于传统观念的突破,从而也就必然随之而开辟新的数学研究方向和领域。既然如此,我们若能深入探索数学思维方式的变化规律,进而自觉地把握和运用这些数学思维方式的变化规律,其意义之重大是不言而喻的。

总之,我国数学教育界已日益重视数学创造性活动中的数学形象思维与数学思维方式的研究,有关文献和著作日益增多,国内部分高等院校相继开设数学方法论课程,成立相应的研究中心;培养了一批数学方法论方向的研究生,多次举办全国性的数学方法论学术讨论会。席振伟所著《数学的思维方式》一书,无疑又是日益增多之数学方法论文献、著作中的一支奇葩。该书首先从哲学、现代心理学和思维科学的角度论述了思维概念的本质和特征,进而论述了数学的若干基本思维方式的含义、历史渊源、方法论功能及其应用,再则论述数学中的具体思维原理和方法。这也是本书作者多年来从事数学教学与科研的一项重要成果。全书内容丰富,说理清楚,堪称我国数学教育和数学方法论方面的又一部佳作,因而本人乐

于向读者推荐并为之作序。本书读者们有何积极建议或评述,可与本书作者通信讨论,以求更加完善和达到更高的学术水平。学无止境,相信作者会热烈欢迎和衷心感谢的。

朱梧楨

1993年12月9日于南京

出版说明

如大家所知,数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问,已有很长的历史,而且内容极为丰富。16世纪以来,如笛卡尔(Descartes)、莱布尼兹(Leibniz)、庞加莱(Poincaré)、克莱因(Klein)、希尔伯特(Hilbert)和阿达玛(Hadamard)等著名学者,都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解。就近现代而言,以著名的美籍匈牙利数学家波利亚(Polya)为例,他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究,出版了一系列论著,并被译为多种文字,受到全世界的普遍重视,被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。在我国,也有许多学者在各种不同的场合屡次指出:要在数学教材与教学过程中,注意对形成数学概念的认识过程的分析,努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段,特别是我国数学家徐利治教授,他先后到过苏联、德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流,结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状,深感在教学与科研领域中,有大力提倡数学方法论的必要。在他的倡议下,我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课,出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物,这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势。然而总的说来,在现今的数学教育与数学教学过程中,主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练,对于如何教给学生以寻找真理和发现真理的本领不够重视,在一定程度上低估了发散思维的训练在智力开发中的作用,以致不能较好地培养学

生的创造能力。

上述情况表明,我们仍需大力提倡数学方法论的研究,并应把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去。特别是,我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期,这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍,而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍,因为这是我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要,我社自1986年初就开始酝酿和筹备出版《数学方法论丛书》(以下简称《丛书》),并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作,纷纷承担《丛书》编写任务。1987年4月,我社与徐利治教授等充分磋商,组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问。我们深信,在《丛书》的全体编委的共同努力下,一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》,我们也由此而希望,这套《丛书》的出版,能在我国数学教学改革和培养人才的事业中有所贡献。

《丛书》共分三个档次,除了少数几本属于高档次的专著之外,其他两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑,《丛书》中的大部分题材,对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平,在《丛书》的编辑和出版过程中,难免会有缺点和差错。热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1988年6月

目
录

序言	1
一 思维与数学思维	1
1.1 思维	1
1.2 数学思维	6
二 数学的基本思维方式	18
2.1 符号思维方式	18
2.2 对偶思维方式	46
2.3 构造性思维方式	59
2.4 数学模型思维方式	69
2.5 公理化思维方式	79
2.6 关系、映射、反演思维方式	88
2.7 反例思维方式	96
三 数学中的具体思维原理、原则、 方法	105
3.1 集合论思想与计数原理	105
3.2 位值原则与记数方法	118
3.3 等价原理与大衍求一术	125
3.4 变化率思想与边际分析、弹 性分析	133
3.5 试验设计思想与正交试 验方法	142
3.6 群结构原理与几何学	148
3.7 排序、迭代和有向化	164
3.8 回归分析与马尔科夫预测	178
3.9 数学归纳原理与数学归纳 法	190
3.10 同构原理与同构方法	199
参考文献	209

一 思维与数学思维

对数学思维方式的研究与探索,是以思维和数学思维这两个基本概念作为基础和前提的。

本章将从思维的概念入手,论述数学思维的特性、品质、基本成分和思维结构,并进而揭示作为数学思维结构重要维度的数学思维方式的含义、内容及其对数学思维能力培养的重要意义。

1.1 思 维

1. 思维的概念与实质

思维从不同的角度观察有着不同的含义。恩格斯首先从哲学角度提出了思维是物质的运动形式的论点。他指出:“运动,就最一般的意义来说,就它被理解为存在的方式,被理解为物质的固有属性来说,它包括宇宙中发生的一切变化和过程,从单纯的位置移动起直到思维。”^[1]

在现代心理学中,思维被理解为“受社会所制约的,同言语紧密联系的,探索和发现崭新事物的心理过程,是对现实进行分析和综合中概括反映现实的过程。思维在实践活动基础上由感性认识产生并远远超出了感性认识的界限。”^[2]也有人认为:“思维是人脑对客观现实概括的和间接的反映,它反映的是事物本质与内部规律性。”^[3]

在思维科学中,有人把思维看作“是发生在人脑中的

信息变换”。^[1] 因为人脑对客观事物的反映不同于镜子的反映。镜子是由玻璃这种物质来反映事物的，人脑是由脑的原生物——意识来反映事物的。而所谓意识，乃是凝聚在脑物质上的信息，即人脑是通过接收与处理客观对象的信息来反映对象的。对象的信息在经过思维后，或者被凝合为意识的信息同化了，或者脑中的意识（信息凝合）被外来的信息改变了，总之是信息的原来形态发生了改变，即信息变换。

尽管不同学科对思维含义的表述各不相同，但细加辨别，其实质是相同的，即思维是理性认识阶段的反映活动。

唯物论认为，认识是主体对客体的反映，这种反映包括感性和理性两个阶段。而思维乃是主体对客体的理性反映形式。因为作为思维器官的人脑，是高度组织起来的特殊物质，它约有 1500 毫升的容量，是黑猩猩脑量的 4 倍，且神经细胞数达 $10^{14} \sim 10^{15}$ 的大脑皮层上还分化出了许多性质不同的区域，故人脑不仅有动物脑那样的功能，能天然地反映客体，产生感觉，而且更具有动物脑所不具备的功能——产生意识，即能自觉摄取知识，积累知识，并凭借知识对事物的本质进行总结、概括、抽象以形成概念，作出判断和进行推理，故它对客体的反映已超越了感性认识的范围，进入到揭示事物本质属性和内部联系的理性认识的阶段。

例如，对刮风、下雨等现象，人和动物一样都能感觉，但将这种现象与吹气、扇扇子、玻璃窗上结水珠、水管子“冒汗”等联系起来，发现它们是“空气对流”的表现形式或“水蒸气遇冷后液化”的结果，这时人们的认识活动已深入到了把握因果关系的思维了。

又如,对图形如梯形的认识,感性认识只能反映各种梯形的形状、大小、颜色,思维则能舍弃梯形的具体形状、大小和颜色等非本质特征,而把其一组对边平行、另一组对边不平行的本质特征概括出来,从而实现了认识从感性到理性的转化。

2. 思维的特性

思维有两个基本特性,即概括性和间接性。

(1) 概括性。思维的概括性首先表现在它能略去同类事物的具体差异,而抽取其共同本质或特征加以反映,这种反映不同感觉和知觉。感觉和知觉都是当前事物作用于人的感觉器官所产生的反映(两者不同的是,感觉是对事物个别属性的反映,而知觉是感觉的综合,是对事物各种属性的整体反映),是就个别的、当前的事物而言的;而思维却不同,它概括反映的不是个别事物的个别特征,而是一类事物的本质特征。如不管形状、大小、位置、颜色、质地的不同,人们将一组对边平行、一组对边不平行的四边形都概括成一类,称为梯形。可以设想,假如人们不是采用词来标志一般梯形,而采用颜色、大小、形态、位置各不相同的具体梯形来作为研究问题的出发点,那思维的展开将是怎样的艰难。

思维的概括性不只表现在反映客观事物的本质特征上,也表现在它反映事物之间本质的联系和规律上。例如,梯形中的两腰的延长线交于一点,且该点与对角线交点、两底的中点成四点共线;梯形两对角线与两腰组成的两三角形面积相等,且它与两底组成的两三角形的面积比等于两底的平方比等性质,都是揭示事物内部联系的性质,这些性质通过感觉是不能获得的,它只有通过思维,亦即在实践活动的基础上,借助概括、判断、推理后才

能获得。

(2) 间接性。

思维是间接的认识过程。所谓间接,是指认识现在,推测过去,预见未来,都必须以已有的知识、经验或其他事物为中介。思维的间接性也是它与感觉、知觉过程的另一基本区别,即感觉和知觉过程是人对客观事物的直接认识,而思维则是凭借知识、经验对事物进行的间接认识。

例如,早上起身后看到马路潮湿,推测昨天晚上可能下雨,但又见屋顶处干燥,于是断定马路上的潮湿是洒水车洒水的结果。这里,对洒水车在马路上洒过水的认识是通过马路潮湿而屋顶干燥的中介推断出来的,因而是间接的认识。

又如,水分子由2个氢原子和1个氧原子构成,这凭感觉和知觉是不能获得的。然而,人们凭借已有的知识通过思维把它揭示出来了,这也是间接的认识。

思维的认识的间接性,其原因在于思维是第二信号系统的反映过程。根据巴甫洛夫学说,人的高级神经活动有两种信号系统:一种是以具体刺激物作为信号刺激而建立的暂时神经联系系统,称之为第一信号系统;一种是以词作为信号刺激而建立的暂时神经联系系统,称之为第二信号系统。感觉和知觉是第一信号系统对现实的反映过程,而思维则是借助于以第一信号系统活动为基础,第二信号系统活动为主导的两种信号系统的协同活动。亦即它是以“对前一个系统的无数信号系统的抽象化与概括化的词作为条件刺激物的”。这种词已“超脱了现实”,对它的概括性认识,就是已有的知识和经验,而以一种知识、经验为中介,进行判断、推理,无疑是一种间接的

认识。

思维的间接性与概括性是密切联系的。没有对现实的概括的认识,就无以进行间接的认识。反之,没有对现实的间接的认识,就不能对现实进行更高层次的新的概括。例如,每个词代表着一个概念,每一个概念都概括着一类事物的一般特性,而任何一类事物的数目可以多到无穷无尽,要对这无穷无尽的一类事物进行新的概括,揭示其规律和内部联系,就必须借助于判断、推理等间接的认识过程,故概括性不能离开间接性。但间接认识的基础是作为概括认识的词,故间接性也不能离开概括性。

思维除具有概括性、间接性两个基本特征外,还有自觉性、社会性等特点。

(3) 自觉性。所谓思维的自觉性是指在思维活动中,生理人脑是作为意识的物质承担者而出现的。因为思维的本质是具有意识的人脑对于客观事物的反映。考察纯粹自然状态的人脑,不同人之间差别不大,但思维的效能却有很大的差异,原因就在于大脑中的意识状态的不同。故思维反映客观事物都是程度不同地带着某种自觉性。而感觉不同,许多时候,它对客观事物的反映是自发地进行的。

(4) 社会性。所谓思维的社会性是指思维是社会实践与历史发展的产物。因思维超越了感性认识的范围,深入到事物的内部,从而可以揭示规律,预言未来,故思维对于存在具有相对独立性。同时,由于思维常以理论形式出现,其形成的结论是否正确,必须加以检验。这种检验,不管采用什么方式,最终的标准仍是实践。思维的社会性还指思维必须以已有的知识为前提,而这些知识正是社会历史发展的产物。

1.2 数 学 思 维

1. 数学思维的特性

应该怎样认识数学思维?曾有一位数学家作过如下的论断:“数学是一种思维形式,它牢固地扎根于人类智慧之中……数学表现了人类思维的本质和特征,并在任何国家与民族的文明中都会有所体现,因而在当今的意义下,任何一种完善的形式化思维,都不能忽视这种数学思维形式。”^[4]这段话的意思无非是指数学是思维的一种形式,因而它包含一般思维所具有的本质,即数学思维是理性的认识活动,同时它还表现出数学学科本身的特殊性。综合两个方面,数学思维的特性一般地表现为:

(1) 数学思维较之其他思维具有更强的间接性和概括性。由于数学高度抽象的特点,使得数学思维较之其他思维更为间接,亦即是间接的间接。例如,数学概念是对数学本质的抽象,这种抽象只保留了事物量的关系和空间形式,而舍弃了其他自然性质,这种抽象程度是其他学科所不及的,故任何思维都没有数学思维来得间接。与此相联系的是,数学思维的概括是概括的概括。因为不仅数学概念是抽象概括的产物,而且数学推理、方法等也是各种具体经验、方法的升华,数学思维是在这些基础上进行的概括,故它是概括的概括。

(2) 数学思维具有独特的形式化的符号语言。数学思维的这一特性,正如 M. 克莱因(M. Klein)所指出的:“数学的另一个重要特征是它的符号语言。如同音乐利用符号来代表和传播声音一样,数学也用符号表示数量关系和空间形式。”他又说:“数学语言则是慎重地、有意识

地而且经常是精心设计的,凭借数学语言的严密性和简洁性,数学家们就可以表达和研究数学思想,这些思想如果用普通语言表达出来,就会显得冗长不堪。这种简洁性有助于思维的效率。”^[5] 这表明,数学思维的符号化特性是与这种思维高度的间接性、概括性相适应的。因为只有运用摒弃了具体内容的形式化符号,才能保证思维实现更高层次的抽象和概括。

(3) 数学思维具有显著的美学特性。美学特征被概括为统一性、简洁性和奇异性三个方面。数学思维由于其高度的间接性和概括性,保证了数学思维的统一性和奇异性。因为只有高度抽象、高度概括才能达到高度统一,而高度间接性的思维反作用于现实,就隐含了思维的奇异性。同时,数学思维的符号性特征又保证了思维的简洁性,因此数学思维往往具有显著的美学特征。数学思维的这种美学特征,正如庞加莱(H. Poincaré)所指出的:“我敢冒昧地说,数学的探索还有深刻的美学原则。”^[4] 又如 A. 波莱尔(A. Borel)所说的:“我们的活动与艺术家的活动有许多共同之处:画家进行色彩与形态的组合,音乐家把乐音组合起来,诗人组词,而我们则是把一定类型的概念组合起来。”^[5] 可见,数学思维的美学特征是十分明显的。

(4) 数学思维具有独特的辩证性。数学中充满着各种形式的辩证关系:形与数、量与质、常与变、曲与直、有限与无限、近似与精确、离散与连续、抽象与具体、特殊与一般、正运算与逆运算等的相互对立、相互制约、相互联结、相互转化的关系,在数学中表现得最为充分。辩证法的三大规律在数学中也得到了很好的体现。据此,可以这样说,数学思维在一定意义上有时是指这样的一种形式,