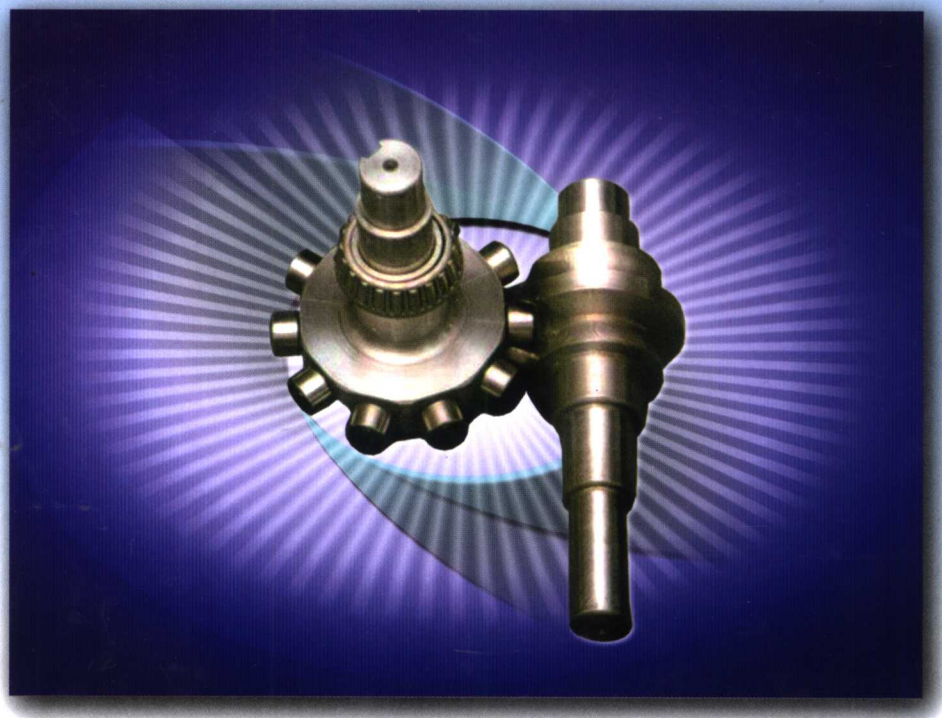


凸轮机构设计

(中)刘昌祺 (日)牧野 洋 (中)曹西京 编著



凸轮机构设计

(中) 刘昌祺 (日) 牧野洋 (中) 曹西京 编著



机械工业出版社

本书通过大量的图形、曲线、表格和实用的优化数据，系统深入地论述了凸轮机构的设计方法。

本书理论结合实际，图文并茂，循序渐进，由浅入深，便于自学。系统性、完整性、先进性、科学性和实用性的特点使本书在凸轮设计和制造领域中具有重要的指导意义。

本书可供科研院所、企业的工程设计技术人员使用，也可作为大专院校相关专业师生的学习参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

凸轮机构设计/刘昌祺等编著. —北京: 机械工业出版社, 2005.8
ISBN 7-111-17349-X

I. 凸... II. 刘... III. 凸轮机构—设计 IV. TH112.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 103122 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 曾红 版式设计: 张世琴 责任校对: 张媛

封面设计: 陈沛 责任印制: 杨曦

北京机工印刷厂印刷

2005 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

1000mm × 1400mm B5·10.75 印张·3 插页·417 千字

0 001—4 000 册

定价: 38.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

本社购书热线电话 (010) 68326294

封面无防伪标均为盗版

前 言

凸轮机构广泛用于各种自动机中。例如，自动包装机、自动成形机、自动装配机、自动机床、纺织机械、农业机械、印刷机械、自动办公设备、自动售货机、陶瓷机械、加工中心换刀机构、高速压力机械、自动送料机械、食品机械、物流机械、电子机械、自动化仪表、服装加工机械、制革机械、玻璃机械、弹簧机械和汽车等。

凸轮机构之所以能够得到如此广泛的应用，是因为它具有传动、导向和控制等功能。当它作为传动机构时，可以产生复杂的运动规律；当它作为导向机构时，可使工作机械的动作端产生复杂的运动轨迹；当它作为控制机构时，可控制执行机构的工作循环。凸轮机构还具有以下优点：高速时平稳性好，重复精度高，运动特性良好，机构的构件少，体积小，刚性大，周期控制简单，可靠性好，寿命长。

随着社会发展和科技进步，各种自动机正朝着高效率、高精度、自动化程度高、优良的性能价格比、寿命长、操作简单和维修方便等方向发展。为适应这种发展形势，满足自动机的要求，作为自动机核心部件的分度凸轮机构必须具有特性优良的凸轮曲线和高速、高精度性能。

由于计算机软件和数控技术的日益普及，凸轮 CAD/CAM 软件问世，为高速高精度凸轮机构的设计、制造和检测提供了有利条件。

凸轮曲线特性优良与否直接影响凸轮机构的精度、效率和寿命。多年来，世界上许多凸轮专家创造了数十种特性优异的凸轮曲线。这些凸轮曲线完全能够满足各种自动机的要求。其中，最常用的有修正正弦曲线、修正梯形曲线和修正等速曲线等。日本山梨大学牧野洋教授研发的三角函数通用凸轮曲线几乎包括全部凸轮曲线。西冈雅夫博士开发了代数式通用凸轮曲线。利用这些通用凸轮曲线，输入一定参数，就能得到满足工作特性要求的凸轮曲线，从而制造出满意的凸轮机构。

牧野洋教授于 1976 年出版的《自动机械机构学》一书在我国凸

轮学术界影响深远，对我国自动机械的发展具有重要的指导意义。

我国在凸轮机构研究方面历史悠久，理论较深，但在设计、制造和检测等应用技术方面，与美日德等工业发达国家比较，差距较大。

随着改革开放的深入发展，我国在凸轮机构的理论研究和实用技术方面取得了长足发展。在 20 世纪 90 年代初期，西北轻工业学院（现更名为陕西科技大学）彭国勋、刘昌祺、肖正扬和曹巨江等教授，承担了国务院生产办特批的国家重点企业技术开发项目“高速高精度凸轮间隙分度机构 CAD/CAM”的研究任务，成功地研制了平行分度、圆柱分度和弧面分度等凸轮机构的 CAD/CAM 软件。在刘昌祺教授指导下，与南通机床厂合作，设计成功了我国第一台弧面凸轮数控铣床，使我国弧面凸轮的设计与制造迈出了历史性的一步。在此基础上，在刘昌祺和曹西京教授指导下，对弧面凸轮机床传动方案和结构进行了深入研究，并与大河机床厂合作，设计制造出新一代大功率高效高精度的弧面凸轮铣磨床，加工性能良好。

为了促进我国自动机械的发展，满足自动机械工作者和广大读者的需求，作者收集了大量的图书、文献和国内外凸轮企业先进实用的技术资料，并结合多年设计制造凸轮机构的实际经验编写了此书。

编写本书的原则在于理论与实际，教学与科研生产相结合，力求图文并茂，循序渐进，由浅入深，便于自学。特别注重知识的系统性、完整性、先进性、科学性和实用性。书中所载大量公式、图形、表格和数据对我国凸轮业工作者具有重要的指导意义和实用价值。

本书第 9~11 章由曹西京教授编写，其余各章及附录由刘昌祺教授和牧野洋教授编写。

本书在编写过程中，得到胡志刚、乔麦玲等许多志士同仁和朋友的帮助，在此深表谢意。

由于时间仓促，水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

作 者

目 录

前言

| | |
|---------------------|---|
| 第1章 凸轮机构 | 1 |
| 1.1 凸轮种类 | 1 |
| 1.2 动作形态 | 1 |
| 1.3 凸轮形状 | 1 |
| 1.4 凸轮滚子形状 | 1 |
| 1.5 约束形态 | 3 |
| 1.6 凸轮机构的简单说明 | 4 |

第2章 矢量几何学

| | |
|----------------------|----|
| 2.1 平面矢量 | 6 |
| 2.1.1 平面矢量的性质 | 6 |
| 2.1.2 复数矢量 | 6 |
| 2.1.3 矢量方程式 | 7 |
| 2.1.4 平面矢量的分类 | 8 |
| 2.2 平面三角的解法 | 9 |
| 2.2.1 三角解的分类 | 9 |
| 2.2.2 分类1的解 | 10 |
| 2.2.3 分类2的解 | 11 |
| 2.2.4 分类3的解 | 12 |
| 2.2.5 分类4的解 | 13 |
| 2.2.6 连杆机构的位移解 | 14 |
| 2.2.7 三角解的程序 | 15 |
| 2.3 矢量微分 | 15 |
| 2.4 运动轨迹 | 17 |
| 2.4.1 切线和法线 | 17 |
| 2.4.2 曲率半径 | 18 |
| 2.5 空间矢量 | 19 |

| | |
|---------------------|----|
| 2.5.1 矢量和坐标系 | 19 |
| 2.5.2 旋转变换 | 23 |
| 2.5.3 空间四面体的解 | 32 |

第3章 凸轮曲线

| | |
|---------------------|----|
| 3.1 一般凸轮曲线 | 35 |
| 3.2 凸轮曲线的无量纲化 | 35 |
| 3.3 凸轮曲线的特性值 | 37 |
| 3.4 通用凸轮曲线 | 39 |
| 3.5 各种凸轮曲线 | 41 |

第4章 平面凸轮机构设计

| | |
|-----------------------------|----|
| 4.1 用作图法设计凸轮轮廓曲线 | 51 |
| 4.1.1 对心直动尖端从动件盘状凸轮机构 | 51 |
| 4.1.2 对心直动滚子从动件盘状凸轮 | 52 |
| 4.1.3 偏置直动尖端从动件盘状凸轮机构 | 52 |
| 4.1.4 摆动从动件盘状凸轮机构 | 53 |
| 4.2 平面凸轮的轮廓设计 | 54 |
| 4.2.1 压力角和曲率半径 | 54 |
| 4.2.2 直动凸轮 | 55 |
| 4.3 直动从动件平面凸轮 | 61 |
| 4.3.1 圆端直动从动件平面凸轮 | 61 |
| 4.3.2 偏置圆端直动从动件平面 | |

| | | | |
|-------------------------|-----|-------------------------|-----|
| 凸轮 | 64 | 设计 | 105 |
| 4.4 摆动从动件平面凸轮 | 65 | 6.1 强度设计 | 105 |
| 4.4.1 从动件机构 | 65 | 6.1.1 直动驱动从动件的阻力 | 105 |
| 4.4.2 圆端摆动从动件平面 | | 6.1.2 旋转驱动从动端的受力 | 107 |
| 凸轮 | 68 | 6.1.3 凸轮强度设计 | 108 |
| 4.5 平面凸轮设计 | 71 | 6.1.4 凸轮滚子强度计算 | 110 |
| 4.5.1 凸轮设计顺序 | 71 | 6.2 抗振设计 | 112 |
| 4.5.2 凸轮元素的确定 | 72 | 6.2.1 防止浮起的弹簧设计 | 112 |
| 4.5.3 中心距 e | 73 | 6.2.2 凸轮曲线残留振动特性的 | |
| 4.5.4 摆杆长度的确定 | 73 | 分析 | 118 |
| 4.5.5 曲率半径的限制 | 74 | 第7章 凸轮分度机构 | 139 |
| 4.5.6 凸轮形状的检查 | 74 | 7.1 平行分度凸轮机构 | 139 |
| 第5章 空间凸轮机构 | 78 | 7.1.1 平行分度凸轮机构的基本 | |
| 5.1 直动从动件圆柱沟槽 | | 参数 | 139 |
| 凸轮 | 78 | 7.1.2 平行分度凸轮机构的凸轮 | |
| 5.2 圆柱分度凸轮的平面 | | 廓线形成与廓线方程 | 141 |
| 近似解 | 79 | 7.1.3 压力角条件与轮廓曲率分 | |
| 5.3 圆柱分度凸轮的加工 | | 析 | 147 |
| 坐标 | 82 | 7.1.4 平行分度凸轮机构的运动 | |
| 5.4 圆柱分度凸轮的精确解 | 83 | 连续性条件 | 150 |
| 5.5 弧面凸轮 | 87 | 7.1.5 不根切条件分析 | 156 |
| 5.6 弧面凸轮压力角的近似 | | 7.1.6 平行分度凸轮机构的设计 | |
| 解 | 89 | 步骤 | 157 |
| 5.7 弧面凸轮的精确解 | 90 | 7.1.7 平行分度凸轮机构优化 | |
| 5.8 圆柱凸轮的作图法设计 | 93 | 设计 | 160 |
| 5.9 复杂弧面凸轮的可视化 | | 7.1.8 平行分度凸轮机构图谱 | 163 |
| 设计 | 95 | 7.2 圆柱分度凸轮机构 | 170 |
| 5.10 直动-摆动从动件圆柱 | | 7.2.1 圆柱分度凸轮机构的基本 | |
| 凸轮组合机构的凸轮 | | 参数及特点 | 170 |
| 廓线设计 | 100 | 7.2.2 圆柱分度凸轮机构的凸轮 | |
| 5.11 空间凸轮的图形表达 | 103 | 轮廓(工作面)、压力角 | |
| 5.11.1 弧面凸轮的图形表达 | 103 | 和曲率的计算 | 172 |
| 5.11.2 圆柱凸轮的图形表达 | 104 | 7.2.3 圆柱分度凸轮机构设计 | 181 |
| 第6章 凸轮机构的强度和抗震 | | 7.3 弧面凸轮分度机构 | 183 |
| | | 7.3.1 弧面分度凸轮机构的基本 | |
| | | 参数及其特点 | 183 |
| | | 7.3.2 弧面分度凸轮机构方程、 | |

| | | | |
|-----------------------------|-----|---|-----|
| 压力角及工作曲面曲率 分析 | 184 | 10.1 凸轮加工机械和凸轮 加工方法 | 260 |
| 7.3.3 弧面分度凸轮的设计步 骤 | 188 | 10.2 凸轮的磨削加工 | 266 |
| 7.4 弧面分度凸轮机构参数 选择 | 188 | 10.3 凸轮加工的尺寸管理 | 267 |
| 7.5 弧面凸轮分度机构选择 计算 | 190 | 10.4 凸轮制造技术 | 268 |
| 7.6 机种选择例 | 196 | 第 11 章 凸轮机构综合测量 | 273 |
| 7.7 平行分度凸轮机构的选 择计算 | 204 | 11.1 凸轮轨迹尺寸精度 | 273 |
| 第 8 章 凸轮机构设计 | 214 | 11.2 装配后的尺寸精度 | 274 |
| 8.1 机构的基本形式 | 214 | 11.2.1 静分度精度 | 274 |
| 8.2 设计步骤 | 217 | 11.2.2 动分度精度 | 275 |
| 8.3 位移曲线图 | 219 | 11.3 动特性的检测 | 275 |
| 8.4 压力角的极限值和近似 值 | 220 | 11.4 分度机构的分度精度 | 277 |
| 8.5 凸轮图的画法 | 224 | 11.4.1 静分度精度 | 277 |
| 8.6 常见的问题 | 230 | 11.4.2 动分度精度 | 282 |
| 第 9 章 凸轮材料和热处理 | 242 | 11.4.3 综合分度精度 | 287 |
| 9.1 凸轮的耐磨性 | 242 | 第 12 章 凸轮机构应用例 | 289 |
| 9.2 凸轮材料 | 245 | 12.1 连杆系列 | 289 |
| 9.3 凸轮表面硬化热处理 | 248 | 12.1.1 正切型输入机构 | 289 |
| 9.4 热处理缺陷及其对策 | 253 | 12.1.2 冗长的连杆凸轮机构 | 289 |
| 9.5 凸轮种类和热处理 | 254 | 12.1.3 连杆圆柱凸轮机构 | 289 |
| 9.6 凸轮表面处理 | 255 | 12.1.4 凸轮滑块直进机构 | 291 |
| 9.6.1 目的 | 255 | 12.1.5 滑块机构 | 291 |
| 9.6.2 种类 | 256 | 12.1.6 摇臂式 OHC 机构 | 291 |
| 9.7 润滑 | 258 | 12.1.7 共轭凸轮直线往复运动 机构 | 292 |
| 9.7.1 润滑效果 | 258 | 12.2 冲压机构 | 293 |
| 9.7.2 油脂润滑 | 258 | 12.2.1 利用平面凸轮的水平冲 压凸轮驱动机构 | 293 |
| 9.7.3 润滑油 | 259 | 12.2.2 由两枚平面凸轮组成的 双直进冲压机构 | 293 |
| 第 10 章 凸轮加工 | 260 | 12.2.3 由圆柱凸轮和平面凸轮 组成的旋转/直动冲压 机构 | 294 |
| | | 12.2.4 由两个弧面凸轮组成的 双直动冲压机构 | 294 |

| | | | |
|---|-----|--|-----|
| 12.2.5 由两个弧面凸轮组成的旋 转/直动机构 | 294 | 12.4.1 共轭凸轮推杆直线移送 机构 | 301 |
| 12.2.6 由弧面凸轮和平面凸轮组 成的旋转/直动机构 | 294 | 12.4.2 圆柱凸轮推杆直线移送 机构 | 301 |
| 12.3 ATC(automatic tool changer, 自动换刀装置) | 296 | 12.4.3 平面凸轮托盘定位装置 .. | 301 |
| 12.3.1 由弧面凸轮和平面沟槽凸 轮组成的 ATC | 296 | 12.4.4 平面凸轮和三维空间连 杆机构组成的搬运装置 .. | 302 |
| 12.3.2 由弧面凸轮和圆柱凸轮组 成的 ATC 装置 | 296 | 12.4.5 平行分度凸轮输送装置 .. | 303 |
| 12.3.3 由平行分度凸轮组成的 ATC 装置 | 298 | 12.4.6 由沟槽凸轮和平行分度 凸轮组成的冲压件供排 料装置 | 303 |
| 12.3.4 由弧面凸轮和平面沟槽凸 轮组成的 ATC 装置 | 298 | 12.4.7 弧面凸轮间隙输送机 | 303 |
| 12.3.5 由平面凸轮组成的 ATC 装 置的液压阀切换机构 | 299 | 12.4.8 由两枚平面凸轮组成的 斗式输送机的升降器 | 304 |
| 12.3.6 由平面凸轮驱动 ATC 的液 压活塞 | 300 | 附录 | 306 |
| 12.3.7 ATC 装置中的夹紧放松 凸轮 | 300 | 附录 A 凸轮曲线 100 等分数 值表 | 306 |
| 12.4 凸轮输送机构 | 301 | 附录 B 压力角和曲率半径 | 310 |
| | | 参考文献 | 334 |

第1章 凸轮机构

1.1 凸轮种类

图 1-1 所示为各种凸轮机构简图。通常凸轮是驱动侧的机械要素，即是主动件。图 1-2 所示为凸轮机构分类。

1.2 动作形态

凸轮和从动杆的动作可分为移动式 and 旋转式（包括摆动式）两大类。在特殊条件下，凸轮可作为从动杆使用，如图 1-1b 所示。

旋转型凸轮应用很广。为了使多个凸轮保持同步性，通常使用同一根凸轮轴。移动凸轮必须往复运动。因为有停止运动，难以实现高速化。旋转型凸轮作连续等速转动，易于实现高速运动。

此外，旋转型凸轮机构容易实现小型化。

1.3 凸轮形状

由图 1-1 所示的平面凸轮形状一目了然。分度凸轮机构有平行分度凸轮机构，圆柱凸轮分度机构和弧面凸轮分度机构。图 1-1m 所示为应用最广泛的外啮合凸轮形式，此外还有内啮合形式的平行分度凸轮机构，在此从略。平行分度凸轮是共轭凸轮机构之一，一般由两个平面凸轮和多个滚子组成。图 1-1p 所示为直动从动杆圆柱凸轮。在圆柱沟槽凸轮中，由于存在间隙，不宜用于高速运动。当改用圆锥滚子时，可以消除间隙，但是增加了加工制造的难度。图 1-1s 所示为弧面凸轮机构。因为弧面凸轮的凸筋具有锥度，可以调整中心距，进行预压，从而消除滚子与凸轮轮廓面之间的间隙。使弧面凸轮机构能满足高速运动的要求。

1.4 凸轮滚子形状

图 1-3 所示为凸轮接触端的代表形状。在一般情况下，多使用圆端滚子。但是，因受分度角的约束，当上升一下降或行程较小的情况较多时，容易发生凸轮根切现象，不得不使用尖端从动杆。

各种凸轮接触端的特征如下：

1) 圆端。凸轮滚子是滚动接触，磨损小。当凸轮曲率半径较小时，容易发

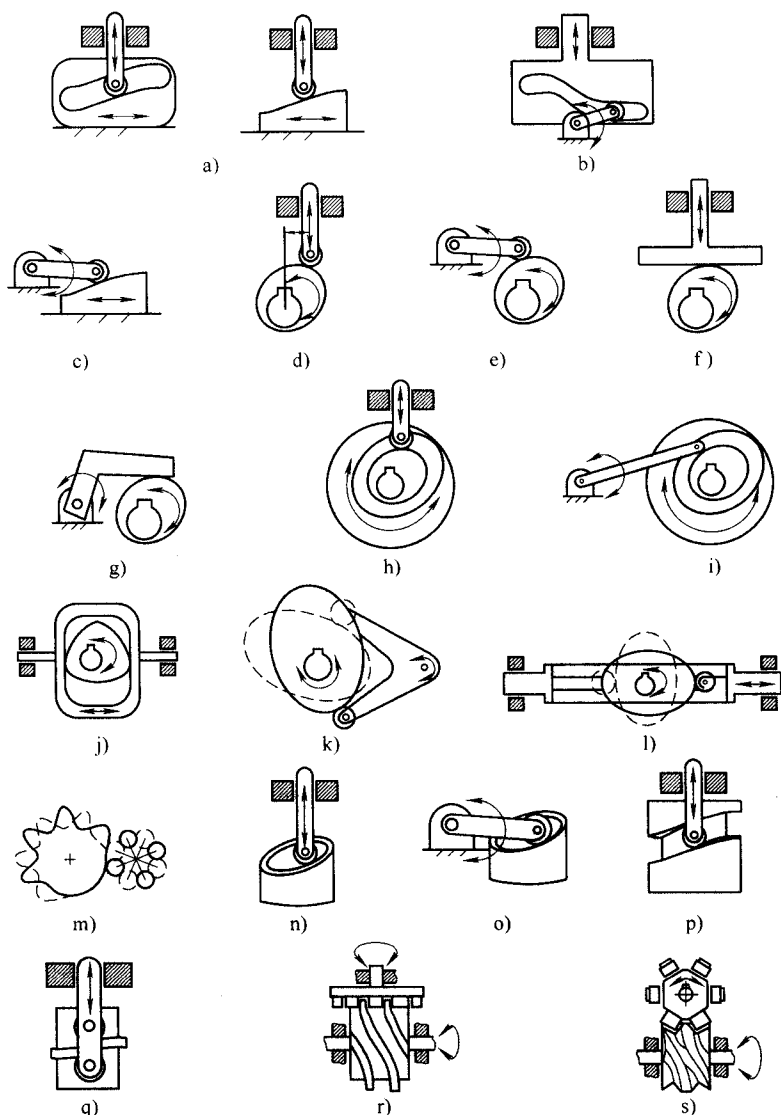


图 1-1 凸轮机构简图

- a) 圆端直动从动杆移动凸轮 b) 圆端直动从动杆移动凸轮 (从动型) c) 圆端摆动从动杆移动凸轮 d) 圆端直动从动杆平面凸轮 e) 圆端摆动从动杆平面凸轮 f) 平端直动从动杆平面凸轮 g) 平端摆动从动杆平面凸轮 h) 圆端直动从动杆沟槽凸轮 i) 圆端摆动从动杆沟槽凸轮 j) 等幅凸轮 (定幅机构) k) 共轭凸轮 (摆动从动杆) l) 共轭凸轮 (直动从动件) m) 平行分度凸轮 n) 圆端直动从动杆端面凸轮 o) 圆端摆动从动杆端面凸轮 p) 圆端直动从动杆圆柱凸轮 q) 圆端直动从动杆圆柱凸缘凸轮 r) 筒形凸轮 s) 弧面凸轮

生根切。

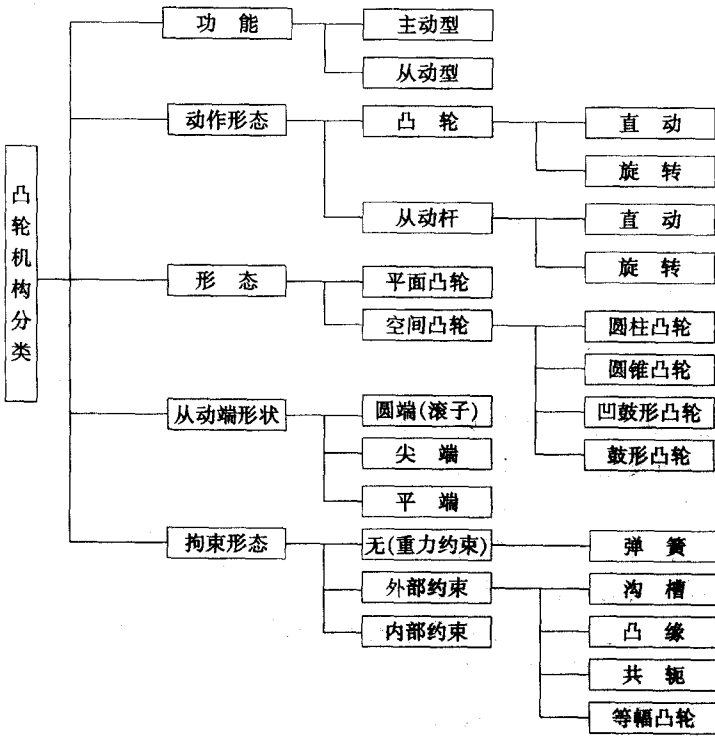


图 1-2 凸轮机构分类

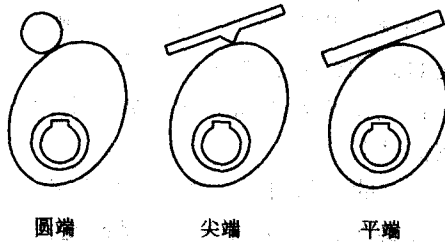


图 1-3 凸轮接触端的代表形状

- 2) 尖端。不产生根切，但磨损大。
- 3) 平端。摩擦较大，凸轮必须是全凸出的外轮廓。

1.5 约束形态

为使从动杆端部与凸轮轨道面保持接触，必须的约束方法如下：

- 1) 重力约束。这种约束方法的缺点在于当凸轮转速高时，从动杆滚子将离开凸轮轨道面，从而产生冲击振动现象。因此，这种约束方法不能用于高速旋

转的凸轮机构。

2) 弹簧约束。弹簧约束的特点是造价低,但是受弹簧影响,在摩擦力作用下,增加了负荷大小。

图 1-4 所示为常用的凸轮约束方法。由于凸轮滚子受到凸轮轨道面很大的推力,所以在选择弹簧时,必须能承受足够大的来自凸轮轨道面的作用力。定义弹簧额定负荷的条件是弹簧伸缩 100 万次。根据实际情况考虑弹簧寿命时,一般要求在 1/2 额定负荷条件下正常工作。

3) 轨道约束。①沟槽约束:凸轮滚子自转方向发生变化,凸轮滚子与轨道面有冲击现象;②凸缘约束:因为滚子的自转方向不发生变化,凸轮滚子与凸缘不会有冲击现象,这是最好的约束方法;③共轭约束:凸轮滚子的自转方向不发生变化,因为这种约束方向必须要两个凸轮,所以造价较高;④凸轮宽度约束:这种约束方法的特点是机构简单,但是设计自由度少。

沟槽凸轮的滚子与凸轮沟槽面必须具有 0.02mm 的间隙。在凸轮升程时凸轮滚子与凸轮沟槽内槽面接触;在凸轮回程时凸轮滚子交替冲击沟槽内外槽面。

凸缘凸轮在凸缘的两侧分别与两个凸轮滚子接触。这和沟槽凸轮不一样,两凸轮滚子同时与凸轮轨道面接触,两滚子的旋转方向是不变的。只要严格控制尺寸公差,则这是一种优良凸轮驱动方式。如果把沟槽凸轮设计成凸缘凸轮机构,其速度可提高数倍以上。

在此必须注意尺寸公差的控制问题。对于沟槽凸轮,槽宽一般都是正公差。对于凸缘滚子一般都有几微米的径向偏差。凸缘凸轮滚子距离是一般公差。凸缘凸轮的滚子与凸轮之间的公差包括凸缘厚度公差、滚子径向偏差和滚子间距离公差。特别注意的是,与沟槽凸轮比较,凸缘凸轮机构的误差因素要多一些,最好控制其总误差在 0.02mm 以内。

1.6 凸轮机构的简单说明

图 1-5 所示为平面凸轮机构的构成要素。以凸轮最小半径画出的圆为基圆。滚子中心轨迹叫做凸轮的理论轮廓曲线。在图 1-6 所示位移曲线的分度角中,凸轮滚子与凸轮轨道面接触运动时,从动杆转动。若凸轮滚子按位移曲线图中

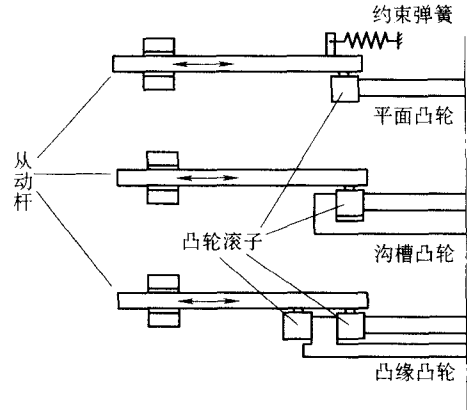


图 1-4 常用的凸轮约束方法
(弹簧、沟槽、凸缘)

停留角与凸轮轨道面接触运动时，则从动杆处于停止状态。

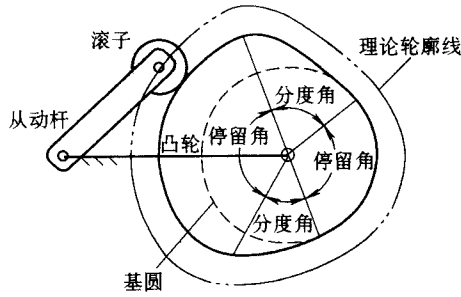


图 1-5 凸轮机构构成要素

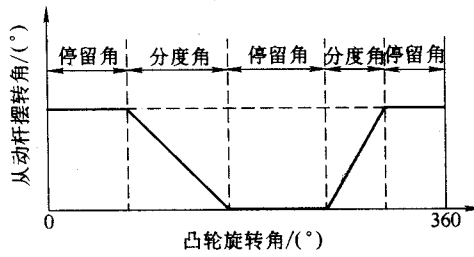


图 1-6 凸轮机构位移曲线图

第 2 章 矢量几何学

2.1 平面矢量

2.1.1 平面矢量的性质

矢量是具有大小和方向的量，只有大小而无方向的量称为标量。数是标量。

图 2-1 所示 OP 为平面矢量。矢量性质是可平行移动，其值不变。

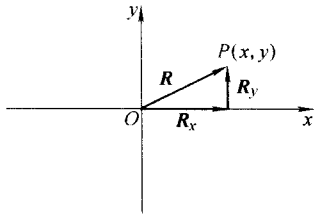


图 2-1 平面矢量

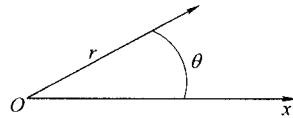


图 2-2 矢量的极坐标表示

把矢量 $R = OP$ 分解成 x 方向的矢量 R_x 和 y 方向的矢量 R_y 时，称 R_x 和 R_y 为分矢量。

长度为 1 的矢量叫做单位矢量。设图 2-1 x 轴和 y 轴方向的单位矢量分别为 u_x 和 u_y ，则

$$R = R_x + R_y = xu_x + yu_y \quad (2-1)$$

矢量 R 可用极坐标 (r, θ) 的形式来表示， r 为绝对值， θ 为偏角，如图 2-2 所示。图中偏角的基本方向 Ox 称为原线。

2.1.2 复数矢量

至今所述的平面是实平面，即 x 坐标和 y 坐标是实平面的轴。现在，只取 x 坐标方向为实数坐标，而取 y 坐标方向为虚数坐标。由此构成的平面即是复数平面。复数平面内的矢量称为复数矢量，如图 2-3 所示。

式 (2-1) 中，取

$$\left. \begin{aligned} u_x &= 1 \\ u_y &= j = \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

则

$$R = x + jy \quad (2-3)$$

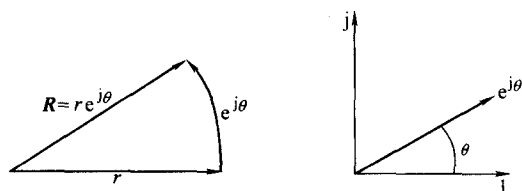


图 2-3 复数矢量

如图 2-2 那样, 用极坐标 (r, θ) 表示矢量时, 则

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

把式 (2-4) 代入式 (2-3), 得

$$\mathbf{R} = r \cos \theta + jr \sin \theta = r e^{j\theta} \quad (2-5)$$

上式中采用了欧拉 (Euler) 定理, 即

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (2-6)$$

按上述顺序, 把矢量写成下面极坐标复数矢量的形式, 即

$$\mathbf{R} = r e^{j\theta} \quad (2-7)$$

由于这种形式是把矢量的长度 r 和方向 θ 置于同项中, 使用起来较为方便。

在此就 $e^{j\theta}$ 的意义说明如下: 如果用长度 r 除矢量 $\mathbf{R} = r e^{j\theta}$, 则成为 \mathbf{R} 方向的单位矢量 \mathbf{u} , 即

$$e^{j\theta} = \mathbf{u} \quad (2-8)$$

是 \mathbf{R} 方向的单位矢量。这样可把 $e^{j\theta}$ 称为方向 $e^{j\theta}$ 。

其次, 与实轴方向一致的长度 r 的矢量为

$$\mathbf{R}_0 = r \mathbf{u}_x = r \quad (2-9)$$

把它逆时针方向旋转 θ 角可得 \mathbf{R} , 即

$$\mathbf{R} = e^{j\theta} \mathbf{R}_0 = r e^{j\theta} \quad (2-10)$$

再乘以 $e^{j\theta}$ 意味着矢量逆时针方向只旋转了 θ 角, 把这样考虑的 $e^{j\theta}$ 称为旋转 $e^{j\theta}$ 。

设 $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, 则

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j \quad (2-11)$$

把虚数单位 j 乘以复数矢量, 表示此矢量逆时针旋转了 90° 。如果每 90° 旋转两次, 则由此得到与原来矢量大小相同而方向相反的矢量, 即

$$\left. \begin{aligned} j \cdot j \cdot \mathbf{R} &= j^2 \mathbf{R} = -\mathbf{R} \\ j^2 &= -1, j = \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

2.1.3 矢量方程式

设两个矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 之和为 \mathbf{R} , 如图 2-4 所示。

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (2-13)$$

各矢量分别用极坐标表示, 则

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= r e^{j\theta} \\ \mathbf{A} &= a e^{j\alpha} \\ \mathbf{B} &= b e^{j\beta} \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$

$$r e^{j\theta} = a e^{j\alpha} + b e^{j\beta} \quad (2-15)$$

在此, 用欧拉定理直接写成

$$r(\cos\theta + j\sin\theta) = a(\cos\alpha + j\sin\alpha) + b(\cos\beta + j\sin\beta)$$

取两边实部相等, 得

$$r\cos\theta = a\cos\alpha + b\cos\beta \quad (2-16)$$

它表明 \mathbf{R} 在实轴方向的分量等于 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 在实轴方向的分量之和。三角形 \mathbf{RAB} 的一边 \mathbf{R} 在实轴方向上的投影长度等于考虑了符号之后的其他两边的投影长度之和。

同理, 欧拉定理两边虚数部分相等, 即

$$r\sin\theta = a\sin\alpha + b\sin\beta \quad (2-17)$$

这是关于虚数坐标方向分量的公式。

平面矢量方程式 (2-13) 和式 (2-15) 中包含了两个标量方程式 (2-16) 和式 (2-17)。平面矢量方程可在两轴方向上取其分量 (在两轴方向上的投影), 就是说一个矢量方程可以分解成两个标量方程。同理, 一个空间矢量方程可以分解成三个标量方程。

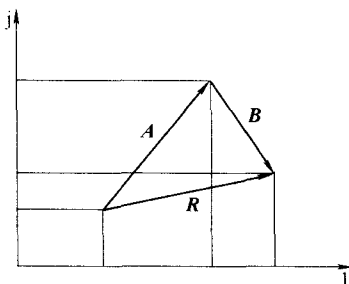


图 2-4 矢量和

2.1.4 平面矢量的分类

根据平面矢量的长度和方向的各个量是否已知, 对平面矢量进行分类, 表 2-1 所示为平面矢量分类。以下分别用符号 \mathbf{K} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{L} 和 \mathbf{P} 表示它们的性质, 如果不考虑这些性质, 一般矢量就用符号 \mathbf{R} 表示。

表 2-1 平面矢量分类

| 未知数 | | | 符号 | 极坐标式 | 说明 | 终点所在范围 |
|-----|----|----|------------------------------|------------------------------------|--------------|-----------|
| 长度 | 方向 | 合计 | | | | |
| 0 | 0 | 0 | \mathbf{K} \mathbf{C} | $k e^{j\theta}$ $c e^{j\theta}$ | 已知矢量 常数矢量 | 动点 固定点 |
| 0 | 1 | 1 | \mathbf{B} | $b e^{j\theta}$ | 长度已知而方向未知的矢量 | 圆周上 |
| 1 | 0 | 1 | \mathbf{L} | $l e^{j\theta}$ | 方向已知而长度未知的矢量 | 直线上 |
| 1 | 1 | 2 | \mathbf{P} | $p e^{j\theta}$ | 长度和方向都未知的矢量 | 平面上 |

表中, 极坐标式变数上的数字表示未知数是哪一个以及有几个未知数。