

LIANGZILIXUE ZHONGDE

JIAODONGLIANG

量子力学

中的

角动量

林辛未 殷传宗 著

3.1



西南师范大学出版社

XINAN SHIFAN DAXUE CHUBANSHE

90109131

LIANGZILIXUE ZHONGDE

JIAODONGLIANG

量子力学

中的

角动量

林辛未 殷传宗 著

西南师范大学出版社

XINAN SHIFAN DAXUE CHUBANSHE

责任编辑 李 红

封面设计 王 煤

图书在版编目(CIP)数据

量子力学中的角动量/林辛未,殷传宗著. —重庆:

西南师范大学出版社, 2004. 4

ISBN 7-5621-3103-1

I. 量... II. ①林... ②殷... III. 量子力学-角动量 IV. 0313.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 025469 号

量子力学中的角动量

林辛未 殷传宗 著

西南师范大学出版社出版、发行

(重庆 北碚)

重庆诚凤印务有限公司 印刷

开本: 850mm×1168mm 1/32 印张: 6.875 字数: 175 千字

2004 年 4 月第 1 版 2004 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 7-5621-3103-1/O · 73

定价: 10.00 元

序

量子力学这门学科自从 1925 年诞生以来,至今已有 70 多年了.在这 70 多年中,它已从“原子的理论”发展成为微观现象的普遍理论,成为近代物理学的理论基础.目前,量子力学是大学物理系的一门重要的基础课,是所有学物理的人都要学习的必修课.不仅如此,理科的化学、生物学等专业和工科的材料、激光等专业也都需要学习这门课程.

然而,由于量子力学所反映的微观世界中的许多概念和规律不能像经典概念那样根据人们的生活经验去体会,使得量子力学这门课程显得有些抽象难懂.加上量子力学所用的数学方法又与人们所熟悉的经典物理有较大的差别,使得这门课程变得既不容易教又不容易学.

为此,高等院校量子力学研究会组织专家编写了一套《量子力学教学丛书》,希望能帮助年轻教师备课,能帮

助学生理解概念,更好地教好、学好这门课程.本书的前身就是这套丛书的一种,于1989年出版的.由于当时的种种原因,这套丛书只出了7种就夭折了,已经出的7种也未能传播开来.

现在,林辛未、殷传宗两位教授所写的《量子力学中的角动量》一书有机会能修订重新出版,这是一件很有意义的事情.我对此表示祝贺,希望本书能在21世纪的量子力学教学中发挥它应有的作用!

高等院校量子力学研究会名誉理事长 喀兴林

2003年5月29日

修订版前言

本书第1版出版后,曾得到一些同行的鼓励与支持,谨在此表示衷心的感谢!

该书原是全国高等院校量子力学研究会组织编写的《量子力学教学丛书》之一,是由福建科技出版社于1989年2月出版的.

正如时任全国高等院校量子力学研究会理事长喀兴林教授所指出的:编写这一套丛书的目的是针对量子力学中有关部分所涉及到的概念和规律、重点、难点以及用到的数学技巧,作较详细、全面和深入的分析和讲解,有些地方还对有关的知识加以拓宽和加深.

但受制于当时的条件,这本书未能在较大的范围内销售,因而很多读者不一定见到过.现在时隔近15年,量子力学又有了较大的进展,因而决定将原书修改后重新出版.

在此修订版中,作者对全书进行了认真的校对并适当补充了一些新内容,如在第八章应用举例中新增了两

小节:用非相对论理论解释反常塞曼效应;非相对论氢原子的另一守恒量——Runge-Lenz 矢量;对有关自旋是否是相对论效应也从理论上作了探讨;对有关角动量投影问题的 EPR 佯谬一节,则根据有关这一问题的新进展作了修改和补充,为了便于更多的读者阅读,还在书末增加了有关 Dirac 符号的附录.

希望这次的修订版能对有关从事原子物理和量子力学工作的教师和读者的教与学有所帮助,也希望对需要使用量子力学中的角动量的科研工作者有所帮助.

本书的修订版的出版得到喀兴林教授和西南师范大学出版社的大力支持,谨在此表示衷心的感谢!

限于作者的学识,真诚地希望得到同行的批评与指正!

作者

2003 年 11 月于重庆

引 言

不论在经典物理学还是在量子力学中,大到天体、星系的运动,小到原子结构,甚至中微子,在所有这些领域中,角动量都扮演着十分重要的角色.对于微观粒子来说,角动量的重要性更显得突出.例如,能谱的分类,自旋特性,磁矩,碰撞截面服从什么样的统计分布等,都与角动量有关.

本书主要研究量子力学中角动量的一般特性,但为了把问题说明白,有必要对经典力学中有关角动量的特性作一些分析.第一章,从经典角动量入手,明确角动量定义,找出角动量守恒条件,运用有效势能曲线分析角动量与能量、角动量与可能的运动及可能的运行轨道之间的联系,进而阐明玻尔理论中角动量的有关性质,然后说明为什么要从经典走向量子化.第二章,在上述分析的基础上,利用阶梯算符法求角动量算符的本征值、本征函数及其递推关系,讨论角动量量子化的物理意义,它与经典力学或玻尔理论中角动量的联系与区别,分析球谐函数所反映的几率分布的含义及其基本特性.第三章,主要讨论在有心力场情况下径向运动的规律,利用阶梯算符法求满足角动量定义的所有角动量算符的本征值.第四章,讨论自旋角动量.这里引入自旋角动量的方法是:先定义磁矩方向(也就是自旋角动量方向)的单位矢量 $\hat{\sigma}$,然后根据实验

结果写出 $\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}$, 再求出 $\hat{\sigma}$ 的对易关系, 从而证明 S 满足角动量的普遍定义. 此外, 还以自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子为例, 分析它在各种条件下的运动规律, 如拉摩进动、磁共振等. 最后分析史特恩 - 盖拉赫实验, 说明当坐标系按 θ 旋转变换时, 自旋为 $\frac{\hbar}{2}$ 的粒子的态矢按 $\frac{\theta}{2}$ 旋转变换. 第五章, 讨论角动量的耦合和 C-G 系数的应用等. 第六章, 分析坐标系、态矢、基矢及标量波函数、旋量波函数和矢量波函数在旋转变换下的变换性质, 推导出球谐函数的加法定理和三个球谐函数的积分公式、球壳上的 D 函数积分等. 第七章, 主要介绍不可约张量等算符与维格勒 - 埃伽定理, 并由一秩张量投影定理推导出磁矩的普遍公式. 第八章, 举例介绍上述各章角动量理论的应用.

我们阐明物理概念, 主要希望对教与学有所帮助, 但也不排斥对有关角动量运算方法的介绍, 同时还注意引入新的观点与方法. 例如, 有关含参变量量子数的一类算符本征值方程的阶梯算符解法, 在这里以定理的形式引入, 对于应用是很方便的. 自旋与磁矩的新讲法, 使其物理意义更明确. 此外, 采用的阶梯算符法, 只要具有微积分和矢量代数学基础的读者都可以顺利阅读.

本书以微观粒子的干涉现象、EPR 佯谬、塞曼效应的强度和偏振情况分析、对称陀螺、非相对论氢原子的另一守恒量和用非相对论理论解释反常塞曼效应等为例, 说明上述角动量理论的实际应用. 其中特别着重联系角动量理论, 分析了玻尔与爱因斯坦两位科学大师长达半个世纪的有关“EPR 佯谬”的争论的实质和之所以产生争论的问题所在.

目 录

第一章 有趣的旋转对称性	(1)
§ 1.1 有心力场	(2)
§ 1.2 经典力学中的角动量	(4)
§ 1.3 角动量守恒定律	(7)
§ 1.4 有效势能曲线的应用	(11)
§ 1.5 角向运动的分析	(17)
§ 1.6 平方反比力作用下的运动	(20)
§ 1.7 从经典走向量子化	(25)
第二章 量子力学中的角动量	(31)
§ 2.1 量子力学中的角动量	(31)
§ 2.2 旋转对称性和角动量守恒	(35)
§ 2.3 轨道角动量算符的本征值和本征函数	(38)
§ 2.4 角动量量子化的物理意义	(44)

§ 2.5	轨道角动量算符的球坐标形式和轨道角动量算符的本征函数·····	(49)
§ 2.6	球谐函数与几率分布·····	(55)
§ 2.7	球谐函数的基本特性·····	(58)
第三章	若干有心力场问题与阶梯算符法 ·····	(62)
§ 3.1	平方反比力作用下运动的分析·····	(62)
§ 3.2	另外两种有心力场情况及 $\hat{J}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 的本征值 ·····	(71)
第四章	自旋角动量 ·····	(75)
§ 4.1	电子自旋·····	(75)
§ 4.2	自旋算符·····	(83)
§ 4.3	磁场中自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子·····	(87)
§ 4.4	双史特恩-盖拉赫(Stern-Gerlach)实验和旋转 ···	(96)
第五章	角动量的耦合 ·····	(99)
§ 5.1	两个角动量的耦合·····	(99)
§ 5.2	计算 C-G 系数的一般原则、C-G 系数的拉卡表式及 C-G 系数的对称性 ·····	(104)
§ 5.3	C-G 系数应用举例 ·····	(114)
§ 5.4	三个角动量的耦合 ·····	(119)

第六章 角动量与转动	(125)
§ 6.1 角动量与转动	(125)
§ 6.2 矢量波函数和旋量波函数的旋转变换算符	(133)
§ 6.3 转动矩阵	(135)
§ 6.4 D 函数和球谐函数	(144)
§ 6.5 力学量算符的旋转变换	(150)
 第七章 不可约张量算符	(153)
§ 7.1 不可约张量算符	(153)
§ 7.2 维格纳-埃伽定理	(158)
§ 7.3 一秩张量投影定理与磁矩的计算	(162)
 第八章 应用举例	(164)
§ 8.1 干涉现象	(164)
§ 8.2 关于 EPR 佯谬——爱因斯坦与玻尔之间长达半个 多世纪的争论	(168)
§ 8.3 塞曼效应的强度和偏振情况分析	(173)
§ 8.4 对称陀螺	(184)
§ 8.5 用非相对论理论解释反常塞曼效应	(186)
§ 8.6 非相对论氢原子的另一守恒量——Runge-Lenz 矢量	(188)

附录 I	希尔伯空间与 Dirac 符号 简介	(192)
附录 II	利用对易关系求解本征值方程因式分解 阶梯算符法	(197)
参考文献		(204)

第一章

有趣的旋转对称性

我们在实验室里做实验时,不管桌子或仪器的朝向如何,实验的结果都相同(不考虑地磁的影响时),这是由于空间各向同性,所以具备了旋转对称性.在原子中,由于原子核带有 $+ze$ 电荷,所以距原子核 r 处的场强为 $\frac{ze}{r^2}$.该场强只与 r 的大小(即绝对值)有关,与 r 的方位无关.我们称这种只与 r 的大小有关而与 r 的方位(或方向)无关的场为有心力场.由于有心力场的场强只是 r 的绝对值的函数,所以有心力场具有旋转对称性.

对于不存在外场或外场是有心力场的情况,空间都具有旋转对称性.一定的对称性总是和一定的守恒量联系在一起的.具有旋转对称性的空间,它的守恒量是什么呢?下面将证明在具有旋转对称性的空间中运动的粒子的角动量守恒.

为了研究具有旋转对称性的空间的特性,我们先分析有心力场的情况.只要把有心力场的情况弄清楚,不存在外场的情况就自然了解了.

§ 1.1 有心力场

一、有心力与有心力场

如果运动质点所受的力的作用线在全部时间内都通过某一定点,而它的大小仅是距这一定点的距离的函数,这样的力称为有心力.只依赖于到某一定点的距离而与方向无关的场,称为有心力场.

二、质心与折合质量

现在证明两个相互作用着的粒子的运动,可以化为两个粒子的质心运动和一个假想的粒子在以质心为中心的有心力场中的运动.由于两个相互作用着的粒子,它们的位能只与距离有关,也就是说,位能只与它们的向径之差的绝对值有关,设两个粒子的质量分别为 μ_1 和 μ_2 ,向径为 r_1 和 r_2 ,这样的体系的哈密顿函数是

$$H = \frac{\mu_1}{2} \frac{dr_1^2}{dt} + \frac{\mu_2}{2} \frac{dr_2^2}{dt} + U(|r_1 - r_2|). \quad (1.1)$$

令

$$r = r_1 - r_2, \quad (1.2)$$

r 表示两粒子间的距离.根据质心定义,设质心的向径以 r_c 表示,那么

$$r_c = \frac{\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (1.3)$$

如果把坐标原点移到质心上,即 $r_c = 0$,那么就有

$$\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2 = 0. \quad (1.4)$$

从(1.2), (1.4) 两式可求得

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{-\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{r}. \quad (1.5)$$

利用上式,得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mu_1 \left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \left(\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu_1 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2 \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2 \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

令

$$\mu = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (1.7)$$

称 μ 为折合质量. 将(1.2), (1.6) 和(1.7) 式代入(1.1) 式中,得

$$H = \frac{\mu d\mathbf{r}_1^2}{2dt} + U(|\mathbf{r}|). \quad (1.8)$$

(1.8) 式说明如果把坐标原点移到质心上,那么两粒子间由于相互作用而产生的运动,可以用一个假想的粒子的运动来代替. 这个假想的粒子离质心的距离等于这两个粒子之间的距离,如(1.2) 式所示. 这个假想的粒子的质量是折合质量 $\mu = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$. 它们间的相互作用势能仅是相对位置矢量 $\mathbf{r}$ 的绝对值的函数,而与 $\mathbf{r}$ 的方向无关.

如果坐标原点不在质心上,而在任一点 O 上,两粒子相对于 O 点的向径是 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$, 由于孤立体系的动量守恒,因而有

$$\mu_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \mu_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \text{常量}.$$

根据(1.3) 式,得

$$\frac{dr_c}{dt} = \text{常量}. \quad (1.9)$$

即质心不动(体系原来处于静止状态)或质心作匀速运动. 除此之外, 上述的其余结论均不变. 有心力场中运动的例子很多, 例如: 行星绕太阳的运动、地球卫星绕地球的运动以及电子绕原子核的运动等.

§ 1.2 经典力学中的角动量

前面谈到不存在外场或外场是有心力场时空间具有旋转对称性, 在具有旋转对称性的空间中运动粒子的角动量守恒. 那么什么是角动量? 对于单粒子、 N 个粒子体系和具有一定对称性的刚性相联整体以角速度 ω 转动着的体系, 角动量与哪些量有关? 角动量与质心的运动, 角动量与固定参考点的选择又有什么样的关系? 这些就是本节要介绍的问题.

一、角动量的定义

如果粒子 A 绕固定点 O 转动, 为了表示转动“强度”的大小, 我们定义相对于 O 点的角动量(又称动量矩)

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mu \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (1.10)$$

式中 $\mathbf{r}$ 是粒子相对于固定点 O 的向径, $\mathbf{p} = \mu \mathbf{v}$ 是粒子 A 的动量. 按矢量叉乘积的定义, $\mathbf{L}$ 垂直于 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{p}$ 所在的平面, 其指向遵守右手螺旋法则.

如果考虑的是 N 个粒子组成的体系, 设各粒子的质量分别为 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_i, \dots, \mu_N$, 各粒子的速度分别为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_N$, 各粒子相对于固定点 O 的向径分别为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N$, 而整体的角动量以 $\mathbf{L}_0$ 表示, 那么