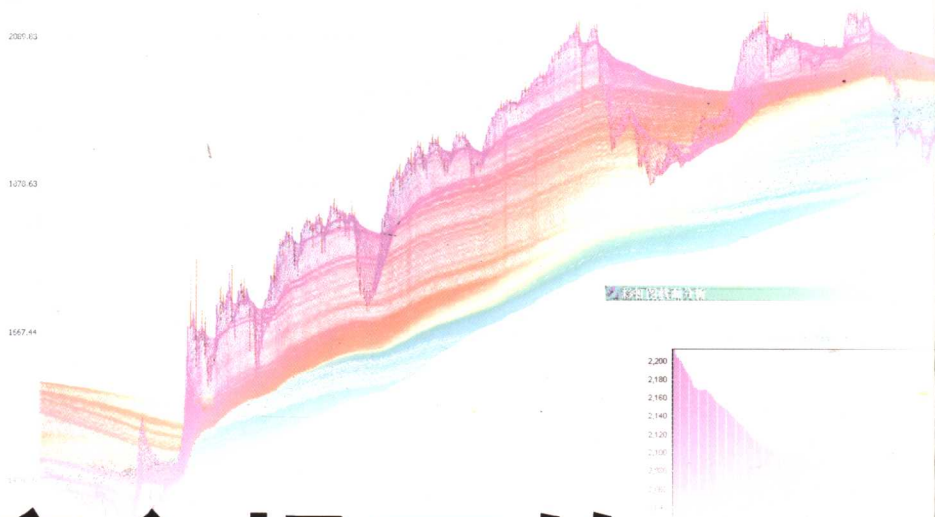




管理、决策与信息系统丛书



摩擦市场下的 投资组合与 无套利分析

余 湄 董洪斌 汪寿阳 著

 科学出版社
www.sciencep.com

管理、决策与信息系统丛书

摩擦市场下的投资组合与无套利分析

余 湄 董洪斌 汪寿阳 著

RB111/04

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书应用凸分析、线性与非线性规划、动态规划、非光滑分析等数学工具,对无套利分析和投资组合理论两个方面展开了系统深入的研究.本书的主要特色有:一是在更一般的摩擦条件下对投资组合理论进行了研究,并且把无套利分析与投资组合理论有机地结合起来,所得结论更适用于实际金融市场的情形;二是提出了一些新的投资模型,并给出了一个无套利理论分析框架及相应的求解方法,丰富了现有的投资组合理论.

本书可供从事金融数学、金融工程和金融管理的研究人员以及实际从事投资决策分析的专业人员阅读,也可作为相关专业的高年级大学生或研究生的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

摩擦市场下的投资组合与无套利分析/余涓,董洪斌,汪寿阳 著. —北京:科学出版社,2005

管理、决策与信息系统丛书

ISBN 7-03-013982-8

I. 摩… II. ①余…②董…③汪… III. 金融市场-投资-研究
IV. F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 075136 号

责任编辑:陈 亮/责任校对:李奕莹

责任印制:安春生/封面设计:北新华文

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年1月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2005年1月第一次印刷 印张:10 1/2

印数:1—2 500 字数:197 000

定价:28.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序

金融学是一门相对来讲较为年轻的学科，它从经济学中分离出来而作为一门独立的学科，其诞生才半个世纪。金融学的过去、现在和将来都会源源不断地从经济学的发展中汲取营养，但是金融学从研究内容、方法到工具，都已经形成了自己独有的学科特色。

一般认为，现代金融理论起源于 20 世纪 50 年代初 H. Markowitz 提出的投资组合理论。这一理论最先把数理工具引入到金融问题的研究中，从此金融学摆脱了纯粹描述性的定性研究和单凭经验操作的状态。H. Markowitz 的奠基性工作所开创的定量分析与 F. Modigliani 和 M. Miller 的 MM 理论所蕴含的无套利分析均衡思想相结合，酝酿了后续一系列金融学理论的重大突破。50 年来，投资组合选择和无套利分析一直是金融学研究受到极大关注的两个研究领域。

2001 年，本书的作者之一汪寿阳与李仲飞合作出版了一部无套利分析与投资组合优化方面的专著。那本书对他们在投资组合理论领域所取得的一部分研究成果作了较为系统的介绍。最近几年来，本书作者一直关注国外投资组合领域的最新动态，始终把这一前沿学科作为努力方向。到目前为止，本书作者在投资决策分析领域的研究中又取得了一系列可喜的进展。为了推动中国在投资决策分析领域的深入研究，作者决定将研究成果的一部分出版成书。

我们先对本书作几点说明：

1. 本书主要讨论摩擦市场情形下的投资组合选择问题。现实的金融市场总是存在着这样或那样的摩擦。完全忽略市场摩擦的存在，固然能使我们得到一些数学上更为漂亮的结果，分析起来也相对简单，但却缺乏较大的实际应用价值。因此，本书主要着眼于摩擦市场下的投资组合与无套利分析研究。虽然难度加大了，但是所得的结果能更接近实际金融市场的情形。

2. 本书主要集中在相关理论与方法的探讨上，对投资组合理论和无套利分析方法的实际应用未作任何讨论。但作者并不认为这是本书的一个缺陷。目前在书店里关于投资分析的书籍可谓琳琅满目，但是绝大多数是介绍实际操作和基本技术的，鲜有对理论和方法进行系统深入的研究专著。虽然那样的书籍对于大众了解投资决策的一些基本技巧和技术是相当有帮助的，但是对于从事投资决策分析的专业人员和开展投资分析理论研究的研究人员来说，其参考价值非常有限。所以，出版一批投资决策分析领域的、能反映国际研究动态与进展的中文专著，对于推动中国在这一领域开展高水平的研究无疑是具有重要意义的。值得一提的

是,在本书的参考文献中,我们较全面地给出了国外在这一领域的重要论著目录.这些论著基本上可以反映出国际上无套利分析和投资组合优化理论的研究现状,这对于准备从事投资决策分析研究的读者来说,定会有所帮助.

3. 作者在本书中应用了一些数学理论与工具,如线性与非线性规划、动态规划、凸分析以及非光滑分析等.这些理论的运用对于我们的讨论非常有帮助.但是,在本书中我们对这些数学理论与工具没有作特别的介绍,也不设附录来介绍相关的基础知识.因为本书作为金融学领域的一部研究专著,并没有涉及艰深的数学理论与方法,相信绝大多数读者可以理解和掌握那些概念和分析方法.而对于那些从未接触过凸分析和数学规划的读者,我们建议他们先看一些相关的参考书,然后再来阅读本书.

在本书的写作和出版过程中,作者得到了许多同行和朋友的支持与帮助.作者首先要特别感谢那些对本书的研究成果做出贡献的合作者.感谢美国北卡州立大学的赵修利教授,他参与了本书部分章节的研究,并且对部分结果的最终取得起到了至关重要的作用.感谢香港城市大学的黎建强教授,他是作者在这一领域的长期合作伙伴,参与了本书一些专题的研究与讨论.感谢中山大学的李仲飞教授,他是本书两章内容的主要完成人.感谢日本筑波大学的 Y. Yamamoto 教授,他是本书部分内容的研究合作者.香港中文大学的李端教授、中国科学院数学与系统研究院的陈光亚教授、程兵教授、卢祖帝博士、徐山鹰博士、杨晓光博士和房勇博士、中国科学院研究生院管理学院的董纪昌博士以及复旦大学的朱书尚博士对于本书的完成提出了许多有价值的建议,作者对他们表示衷心的感谢.此外,作者还感谢以下学者,他们多年来一直支持和关心作者在这一领域的研究工作:国家自然科学基金委员会管理科学部的成思危教授和黄海军教授、中国科学院数学与系统科学研究院的许国志院士、严加安院士、马志明院士和刘源张院士、湖南大学的陈收教授、中国科学院政策与管理科学研究所的徐伟宣教授、北京航空航天大学邱菀华教授和刘善存博士、天津大学的张维教授、香港城市大学的邓小铁教授、香港中文大学的张树中教授、日本先端科技大学的 Y. Nakamori 教授、日本京都大学的 M. Fukushima 教授和西班牙 Santiago de Compostela 大学的 L. Coladas 教授等.

本书的研究工作得到了国家自然科学基金委员会、中国科学院“百人计划”和创新研究基金、湖南省“芙蓉学者计划”以及湖南大学、香港研究资助局、香港城市大学、日本文部省和日本学术振兴会的资助与支持.作者对此表示衷心的感谢!

由于时间仓促,本书中难免存在不足之处,欢迎广大读者批评指正.

余涓、董洪斌、汪寿阳

2004 年于北京

目 录

序

第 1 章 绪论	1
1.1 金融学的发展简史	2
1.2 文献综述	6
1.3 国内的研究现状	13
1.4 投资组合理论与无套利分析发展的一些展望	13
1.5 本书结构	16
第 2 章 有摩擦金融市场中强无套利的刻画	19
2.1 引言	19
2.2 概念与引理	20
2.3 强无套利的刻画	22
2.4 小结	26
第 3 章 摩擦市场的消费决策与无套利分析	27
3.1 引言	27
3.2 模型与记号	28
3.3 无套利与最优消费	32
3.4 小结	38
第 4 章 摩擦市场下无套利机会的刻画	39
4.1 引言	39
4.2 模型与记号	40
4.3 无套利机会的凸规划刻画	43
4.4 无套利机会与状态价格的关系	45
4.5 无套利机会与对偶规划	50
4.6 小结	51
第 5 章 凸价格算子与交易约束	52
5.1 引言	52
5.2 一般模型: 凸价格算子	53
5.3 凸价格算子的表示定理	56
5.4 凸价格算子的运用	59
5.5 小结	64

第 6 章 摩擦市场的利率期限结构的无套利分析	65
6.1 引言	65
6.2 模型与概念	66
6.3 弱无套利的刻画与判别	69
6.4 期限结构的存在性与计算	73
6.5 小结	75
第 7 章 绝对偏差风险函数与投资组合模型	76
7.1 风险函数	76
7.2 模型的建立	79
7.3 两种风险函数的比较	87
7.4 小结	103
第 8 章 摩擦市场的投资组合模型	104
8.1 V 型交易费下的投资组合模型	104
8.2 可调整策略的凹交易费下的投资组合模型	112
8.3 与方差的比较	121
8.4 小结	122
第 9 章 极大极小原则与动态投资组合模型	123
9.1 引言	123
9.2 模型	124
9.3 模型求解	128
9.4 最终财富和风险	138
9.5 两阶段的风险控制模型	140
9.6 小结	151
参考文献	152

第 1 章 绪 论

金融学的核心问题之一是研究如何在不确定环境下对资产进行有效地配置。金融学的发展经历了三个阶段：定性描述阶段，定量分析阶段和工程化阶段。一般认为，现代金融理论起始于 20 世纪 50 年代初 H. Markowitz 提出的投资组合理论，由此引发了大量的现代证券组合分析的理论研究。这一理论开创了现代金融学定量研究的先河，被称为 20 世纪发生在华尔街的第一次金融革命。这一理论的问世，使得金融学开始摆脱纯粹描述性的研究和单凭经验操作的状态，标志着数量化分析方法进入金融研究领域。

金融学在研究方法上完全从经济学中独立出来，是以 20 世纪 50 年代后期 F. Modigliani 和 M. Miller 在研究企业资本结构和企业价值的关系 (M-M 理论) 时提出的“无套利 (no-arbitrage)”分析方法为标志。它蕴涵着一个极为深刻的思想，那就是无套利均衡思想。Adam Smith 曾在 1776 年把经济活动中的套利功能生动地描述为：它就像一只看不见的手，将经济状态推向均衡。从此，无套利假设成为经济研究中的一个最基本的假设。无套利分析方法被人们认为是现代金融学在方法论方面的一次革命。金融理论研究中取得的一系列突破性成就，如套利定价理论和期权定价理论，都是无套利分析方法的杰出应用。

投资组合理论与无套利分析方法分别被称为金融学发展的两个里程碑。这两个奠基性的工作对于金融学的发展所产生的影响是十分巨大和深远的，并且一直是金融学研究两个主要领域。因此，对投资组合选择问题和无套利分析开展深入的研究具有非常重要的理论意义。

近年来，随着信息技术的快速发展及其在金融领域的广泛应用，金融市场的效率得到了极大的提高，同时，金融市场转移风险的能力以及市场本身抵御和防范金融风险的能力也得到了增强。各种大规模的计算和分析软件包为开发和实施各种新型金融产品、解决金融问题提供了有效手段。必须注意到，金融衍生产品的设计需要求解，所以，数学方法 (如数学规划方法、控制理论等) 已经被大量地应用于金融领域。而模式识别、神经网络和遗传算法等已经处理了一些常规方法难以解决的复杂金融管理问题。

虽然金融学的发展令人振奋，但金融市场的风险也在日益增加。近年来，国际金融界发生了一系列的重大事件，如东南亚金融危机、美国橙县金融衍生产品失败导致的破产、英国巴林银行的倒闭、法国里昂信贷银行危机等。这使得社会对金融风险问题更加关注，同时也为从事金融研究的工作者提供了很好

的素材。因此，有必要以金融市场作为研究对象，继续深入地开展投资组合、套利定价等金融学基本问题的研究，为金融市场的发展提供科学的理论指导。我们要从市场出发，面向实际问题，建立科学的模型来揭示金融数据中隐含的规律，为投资者提供有效的决策支持。这也是本书写作的另一个推动力。

1.1 金融学的发展简史

金融学的发展史是一部抽象理论与实际运用之间相互作用、共同发展的历史。在金融学的理论中，许多理论最初的贡献是作为似乎只有有限的或根本没有实际应用价值的抽象理论。但是，随着学者们对这些理论附加一定的假定和限制，这些理论已经成为金融市场上的重要常识，并以此作为分析金融决策和市场运作方面参考的判断框架。另外，曾经被认为是一系列相关的理论，现今能够统一在一般的体系里。所有这些发展发生在相对短的时间里，最初的思想产生于 20 世纪 50 年代，到 20 世纪 80 年代一般理论构建的形成和出现就达到了顶峰。

1.1.1 20 世纪 50 年代的主要贡献

为了对金融学目前的发展状况有一个比较清楚的认识，我们有必要回顾对金融学发展起非常重要作用的一个奠基性工作——Arrow^[1] 和 Debreu^[2] 做出的贡献。他们给出了如何将确定性的经济模型适用于带有不确定性的模型的方法。其基本思想非常简单，即把商品空间拓展为包含未来所有可能状态的空间。如果对所有商品而言都存在着或有市场，则该市场被认为是完备的。这使得关于竞争均衡的存在性和 Pareto 最优性的经典理论重新得到了诠释，以致于在不确定性环境下人们能够有效地配置资源。尽管当时的人们并未意识到这一抽象的思想会带来什么，但是现代金融学的许多发展都源于此。

在 20 世纪 50 年代，还有另外两个重要的理论。1958 年，Modigliani 和 Miller 发表了一篇有争议的文章，他们认为一个企业的资产价值与资本结构无关。这一理论的出发点在于可以构造一个无风险的套利来抵消企业资本结构的变动。尽管这一理论最初表述是依照公司对债务和权益的选择而言的，但是这种方法是一般的，而且它能够应用在股息政策、债务结构或者其他金融决策的变动分析上。在 Modigliani 和 Miller 发表的文章中，最重要的结果是第一次提出了套利的思想。在随后的几十年里，套利理论在整个资产定价问题中扮演了一个非常重要的角色。

另一个重要的突破是 1952 年 Markowitz 发表的均值方差投资组合理论。他的基本思想非常明确：投资者可以用均值和协方差来度量投资组合的收益与风

险, 两者的权衡可以通过求解一个二次规划问题来实现. 这一贡献是投资组合理论和资产定价均值方差分析的一个基石.

1.1.2 20 世纪 60 年代: 金融理论和应用的开始

在 20 世纪 60 年代有两个重要成果. 第一个重要成果是将 Arrow-Debreu 理论以更具体的形式扩展到对金融市场的探索研究中来. Hirshleifer^[3,4] 给出了如何将 Arrow-Debreu 理论应用于解决一些基本的金融问题, 特别地, 他证明了在 Arrow-Debreu 框架下 Modigliani-Miller 的金融上的不相关结果. 这是第一次将 Arrow-Debreu 理论与套利理论结合起来.

随后不久, 这些文章的研究成果被 Diamond^[5] 应用在不完备资产市场下. Diamond 发现: 在两个时期具有外在设置资产市场的不确定性模型的情况下, 竞争均衡是一种约束最优的. 进一步地, 他发现只要债券没有违约风险, M-M 定理一定成立.

第二个重要成果是把 Markowitz 的均值方差理论推广到竞争经济中. Sharp^[6]、Lintner^[7] 和 Mossin^[8] 发现: 如果市场出清, 所有的投资者都会选择由无风险资产和市场组合线性组合后构成的投资组合. 换句话说, 任何资产的期望收益可写为无风险资产利率加上这个资产和市场组合的协方差除以这个资产的方差再乘以这个资产的期望收益率与无风险利率之差. 这一结论也是现在人们所熟知的资产定价模型 (CAPM). 这是金融学上第一次用一个简单的模型来刻画资产收益率.

1.1.3 20 世纪 70 年代: 金融理论和实证金融的成熟

在 20 世纪 70 年代, 金融理论上涌现了大量的重要成果. 第一个重要成果是对 CAPM 的进一步研究, 将 CAPM 延拓到多阶段的情况 (见 Merton^[9]), 考虑借空限制 (见 Black^[10]), 引入交易费 (见 Milne 和 Smith^[11]) 等, 并且将 CAPM 应用于大量金融实际问题中. 同时, CAPM 作为一个实证模型, 被投资者和共同基金经理们广泛应用于投资选择和资产评估 (见 Bernstein^[12]).

第二个重要进展源于对 CAPM 模型实证结果的不满意 (见 Roll^[13]). 尽管起初 CAPM 好像证实了其理论对数据资料表现出好的拟合. 但是后来 Roll^[13] 证明了 CAPM 的预测能力是被检验方法夸大而促成的.

Ross^[14] 提出套利定价理论 (APT) 作为对 CAPM 模型的一个有力竞争者, 利用纯套利与多样分散化的混合假说讨论, 说明了资产价格可以表示为少数几个基本要素的线性组合. 这个模型潜在地表现出比 CAPM 模型更灵活和更稳健,

而且可能免疫于与 CAPM 相关联的检验问题。此后的 10 年里, APT 在资产定价理论中扮演了一个比 CAPM 模型更加重要的角色。

第三个金融理论上的重要成果是在资本市场中既对金融理论又对实际金融决策产生戏剧性影响的成果。Black、Scholes^[15] 和 Merton^[16] 提出可以利用套利理论来给出相对简单的买进股票期权的定价公式。随后, 许多学者对此模型做出多种扩展。Cox、Ross 和 Rubinstein^[17] 证明了 Black-Scholes 的定价推导可以大大简化。假设股票价格运动遵循基本的二项式随机过程, 则利用套利理论可以非常容易地导出二项式期权定价公式。此外, 他们发现, 只要取适当的极限, 就能够导出 Black-Scholes 公式。

另一个有趣的进展是 Rubinstein^[18] 在离散情况下的不完备市场均衡模型下推导出 Black-Scholes 公式。通过假定消费者聚集, 经济达到平凡 Pareto 最优分配而 Arrow-Debreu 价格支持着消费者最优。虽然在约束的形式下, 但这是第一个获得鞅定价结果的典型的消费者模型。在接下来的 10 年间, 这种研究问题的一般洞察力在金融研究中得以进一步发展, 尤其是在宏观经济中典型的消费者模型, 例如 Lucas^[19] 的文章。随后鞅定价的思想由 Harrison 和 Kreps^[20] 做了详细的探讨研究。他们证明, 鞅二项式中所具有的逻辑能够对更抽象的具有连续或离散的资产价格过程的设置进行推广。

此种抽象的方法对 20 世纪 80 年代在金融理论上澄清在效率市场假设 (EMH) 上引起的混淆方面产生了相当大的影响。EMH 的想法是 Fama^[21] 第一次提出的。他在 Samuelson^[22] 和其他研究人员的早期研究工作基础上, 讨论在可以自由进入的金融市场上没有一个投资者能够借助于开发研究公开可获得的信息来获取超正常收益。这一简单的思想对金融经验和考察金融市场上投资者的作用和业绩的方法有着意义深远的影响。与其理论相关的早期问题之一是缺乏把一些资产定价模型联系起来的连贯性。这种缺乏联系的糊涂认识, 直到人们在 20 世纪 80 年代运用鞅定价的理论思想才得以澄清。

下面介绍两个更具有深远意义的重要成果。第一个是对具有多商品以及有限和无限时期水平下完备和不完备市场的资产市场的细致研究和分析。Radner^[23] 和 Hart^[24,25] 对描述不完备市场的性质做出了重要的贡献。然而不幸的是, 这一研究工作以及相关在资产交易中交易费方面的研究, 把货币引入到模型中, 还有在不完备市场下公司的目标函数以及其他方面的推广都被金融理论家们忽视了将近 20 年。

另外一个重要的创新是最近发展起来的把非对称信息方面的思想引进到金融理论中的思想。Grossman^[26] 分析了投资者具有非对称信息情况的股票市场, 并且研究了股票价格能够完全地或部分地再现私人信息的思想。后来, 这些思想被许多学者详细地探讨和研究, 例如 Huang 和 Litzenberger^[27] 的专著《金融

经济学基础》. 当在股东和管理者之间存在着信息差异时, 非对称信息的思想被引入到对公司金融理论的研究中来. 当金融结构能起着信号作用或者起着激励机制时, 这些理论检验了莫迪利安尼 - 米勒定理的稳健性.

1.1.4 20 世纪 80 年代以来: 理论上的巩固和统一

在 20 世纪 80 年代, 金融理论上的进展大部分是统一和扩展了现存的理论. 在一般 Arrow-Debreu 框架下, 不同的思想观点得到了统一, 并且在实际应用中表现的非常灵活. 这种灵活性被证明在理解认识快速发展的衍生资产市场中非常重要. 特别是, 一大批各种证券的定价和套期保值形成了一个重要的行业. 衍生证券最引人注意的例子可能是投资组合保险的发展. 这是期权套期保值思想对投资组合管理的一个运用. 尽管在原则上这个思想非常简单, 但它被美国伯克利两个金融理论学家 Hayne Leland 和 Mark Rubinstein 所提出, 并发展成为一个非常重要的金融产品.

在理论的前沿上, 鞅方法成了一个在套利或 Arrow-Debreu 经济中刻画资产定价的核心工具. 利用随机积分的一般方法, Black-Scholes 模型和 Merton 模型被 Harrison 和 Pliska^[28], Duffie 和 Huang^[29] 以及 Duffie^[30] 进行了意义重大的推广.

Cox, Ingersoll 和 Ross^[31,32] 提出了这些模型一个更特殊化的形式来探索资产定价在随机利率上的应用. 这个模型引发了一系列文章, 把衍生证券套期保值思想扩展到债券或者相联的债券 (见 Heath, Jarrow 和 Morton^[33] 或 Jarrow^[34]).

注意到 Rubinstein^[18] 对 Black-Scholes 定价公式所用的均衡方法, Turnbull 和 Milne^[35] 构造出一个均衡市场模型 (可能是不完全市场), 这个模型平行于 Heath, Jarrow 和 Morton 的结果和应用.

这提供了鞅资产定价能够经由均衡或者套利假设推广到更一般思想的引人注意的实例说明 (见 Milne 和 Turnbull^[36]). 对于实践上的资产定价而言, 设计出一种假设讨论 (套利或者均衡) 是重要的, 其假设能把一般的鞅测度简化为能够写成一小部分可观察的变量的较为简单的密度, 当然要在格子 (lattice) 上进行数值模拟 (请参看综述 Jarrow^[34]) 或由多项式方法进行近似处理 (见 Madan 和 Milne^[37]).

另一个进展是 Ross 对 APT 理论所进行的澄清. 两种可供选择的方法被研究和采用: 一种是逼近的方法 (见 Chamberlain^[38], Chamberlain 和 Rothschild^[39], Huberman^[40]), 另一种则是采用广义均衡方法来给出一个精确或近似的 APT (见 Connor^[41] 和 Milne^[42]).

APT 理论中的定价因素思想逐渐渗透到许多资产定价模型中, 所以, 很多

模型能够看成是静态的或动态的因素定价理论. 特别地, 基于扩散过程的动态资产定价模型可以被看作是一类更一般意义的动态因素模型的特殊情形. 而且, 通过一些适当的假定, 简单的离散模型可以模拟比它们更复杂的连续时间模型. 这一离散模型对于资产定价理论的统一提供了一个易于理解和极其灵活的理论思维框架. 另外, 这一模型适合于把不兑换纸币和票面资产收益、多种货币和汇率、交易费用、税收以及许多其他特征引入其中. 近年来这些方面的理论研究发展得很快, 而且仍在继续发展和完善中.

金融理论的统一使我们发现现代宏观经济学中的共性, 代表因素经济学被应用于实际定价变量的分析中. 显而易见, 宏观经济学和金融理论都是基于 Arrow-Debreu 模型. 这也就不难理解为何在政府金融和开放市场运作的讨论中, 会出现同样形式的 Modigliani-Miller 形式解 (参见 Ricardian 等价定理). 由此, 两个理论体系的逐渐融合使得二者法则的界限也变得难以区分.

金融理论已得到了迅速的发展. 不但提供了高度灵活的理论模型, 而且在金融市场上有着广泛的应用. 这些进展对金融市场的发展尤其是新的金融产品的创新来说意义非常深远.

1.2 文献综述

1.2.1 无套利分析方法

经济学研究的一个基本方法是考虑供给与需求的均衡分析, 着眼点往往在均衡的存在性和均衡的变化规律的研究上. 而金融研究的核心内容之一就是金融市场中某项头寸 (某种金融资产的持有或短缺) 进行估值和定价, 分析的基本方法是把这个头寸与市场中其他金融资产的头寸组合起来, 构筑成在市场均衡时不随风险波动的利润的头寸组合, 由此测算出该项头寸在市场均衡时的价值即均衡价格. 当市场处于非均衡状态时, 价格偏离了由供需关系所确定的价值, 此时就出现了套利机会, 投资者对套利的追求将推动市场重新建立新的均衡. 市场一旦处于均衡状态, 套利机会就不再存在. 市场处于均衡状态时不存在套利机会, 这是无套利均衡分析的理论依据. 虽然市场上投资者的偏好会差异很大, 但是一旦套利机会出现, 所有投资者都会无一例外地进行套利, 所以, 正是套利的力量推动市场重建均衡. 套利机会消除后, 市场所建立的均衡价格与投资者的风险偏好无关. 无套利分析方法抓住了金融市场均衡最本质的特性.

因为无套利分析方法抓住了金融市场均衡最本质的特性, 所以它也一直是金融学研究的一个重要领域, 并涌现了大量相关的文献, 如 Allingham^[43], Carassus^[44], Duffie^[45], Dybying 和 Ross^[46], Black 和 Sholes^[15], Harrison 和 Kreps^[20], Harrison 和 Piska^[28], Kreps^[47], Merton^[9], Ross^[14,48] 和 Wilhelm^[49] 等.

下面我们简单地介绍一下套利的定义。

假设市场上有 N 种资产, 每种资产有 S 种可能的状态, 其支付矩阵记为 D , 是一个 $N \times S$ 矩阵. D_{ij} 表示资产 i 在第 j 种状态下的支付. 资产价格 $q \in \mathbf{R}^N$. 一个投资策略 $\theta \in \mathbf{R}^N$, 其市场价值为 $q \cdot \theta$, 其支付为 $D^T \theta$.

定义 1.2.1^[45] 市场上存在套利机会是指存在这样一个投资策略 $\theta \in \mathbf{R}^N$, 满足 $q \cdot \theta \leq 0$ 且 $D^T \theta > 0$, 或者满足 $q \cdot \theta < 0$ 且 $D^T \theta \geq 0$.

有关无套利分析方面的论著很多, 但大都集中于对无摩擦市场的讨论. 在无摩擦的假设下, 无套利条件基本上等价于风险中性测度的存在性, 这就是资产定价的基本定理. 这方面的工作主要有 [46]、[20]、[28]、[40]、[50]、[45]. 在离散时间的情况下, 刻画无套利的另一种方法是利用正的状态价格的存在性. 这方面的文献主要有 [51]、[52]、[53]、[14]、[54] 等.

我们简要回顾一下状态价格的定义.

定义 1.2.2^[45] 一个状态价格是指这样一个向量 $\phi \in \mathbf{R}_{++}^S$, 满足 $q = D\phi$.

定理 1.2.1^[45] 对于无摩擦的市场, 无套利等价于状态价格的存在性.

近年来, 人们重点关注摩擦市场的套利分析研究. 因为在实际的金融市场中存在税收、交易费等费用, 使得套利存在的条件变得更加复杂, 研究难度更大. 在这一方面的研究也取得了一些成果, 例如 Prisman^[55] 利用最优化方法刻画了有税收时的无套利条件. Garman 和 Ohlson^[56] 将这一结论延拓到了比例交易费下的市场中, 利用状态价格刻画了有交易费时的无套利条件, Dermody et al.^[57] 进一步将他们的结论推广到了更加符合实际的交易费用情况下, 将大的投资机构与小投资者的交易费用区别讨论, 即交易费包括投资者的市场影响和借空费用, 大投资机构的费用和小投资者额外附加的小笔费用.

Donald 和 Werner^[58] 将有限维空间上的套利延拓到了无限维的空间中, 给出了无限维空间下套利的定义, 并得出了在无限维情况下均衡性的存在, 即存在一个价格系统, 使得市场上任何一个投资者都没有套利机会. Fulvio^[59] 在有限维空间下讨论了买卖差价存在情况下的套利, 他用线性规划和鞅方法来刻画套利条件, 证明了不存在套利机会等价于一个线性规划问题存在最优解. 通过对偶理论, 证明了不存在套利也等价于 UF (underlying frictionless) 状态价格, 并给出如何将 UF 状态价格转换为状态价格, 他推广了 Naik^[60], Jouini 和 Kallal^[61] 在所有资产中都存在正的买卖差价且红利可在投资过程中支付的结论.

人们在关注无套利与状态价格等价性的同时, 也讨论了无套利与最优消费之间的关系. 最优消费选择是金融学的另一个重要研究领域. 许多学者对这一方向进行研究, 如 Campbell 和 Viceira^[62], Cox 和 Huang^[63], Detemple 和 Zapatero^[64], Hakansson^[65], He 和 Pearson^[66], Merton^[67], Shirakawa^[68], Shreve, Soner 和 Xu^[69] 等.

下面我们简要地介绍消费选择问题.

假定投资者在 0 时刻进入市场开始交易, 在 1 时刻获得回报. 假设投资者在 0 时刻与 1 时刻都要消费. 他在 0 时刻的消费用常数 c_0 表示, 在 1 时刻的消费用 S 维向量 $c_1 = (c_{11}, \dots, c_{1S})$ 表示, 其中, c_{1S} 表示在状态 S 投资者的消费. 一般来说, 投资者的消费为正数, 即 $c_0, c_1 \geq 0$. 假定投资者的效用函数 $u: \mathbf{R}_+^{S+1} \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续的, 投资者在 0 时刻的馈赠用 w_0 表示, 在 1 时刻的馈赠用 w_1 表示.

效用函数 u 称为在 0 时刻 (严格) 递增的, 如果对任意 c_1 , 成立

$$c'_0 \geq (>) c_0 \Rightarrow u(c'_0, c_1) \geq (>) u(c_0, c_1)$$

u 称为在 1 时刻 (严格) 递增的, 如果对任意 c_0 , 成立

$$c'_1 \geq (>) c_1 \Rightarrow u(c_0, c'_1) \geq (>) u(c_0, c_1)$$

消费选择问题定义为

$$\begin{aligned} \max_{\theta} \quad & u(c_0, c_1) \\ \text{s. t.} \quad & c_0 \leq w_0 - q\theta \\ & c_1 \leq w_1 + D^T \theta \\ & c_0 \geq 0, c_1 \geq 0 \end{aligned}$$

下面两个定理给出了最优消费与套利之间的关系.

定理 1.2.2^[70] 对于无摩擦的市场, 如果最优消费存在, 且效用函数严格递增, 则市场无套利.

这个定理说明如果投资者的效用函数严格递增, 则无套利是最优消费存在的必要条件. 但是, 如果效用函数是递增而不是严格递增, 则定理 1.2.2 的结论不正确.

定理 1.2.3^[70] 对于无摩擦的市场, 如果市场无套利, 并且投资者的消费严格大于 0, 则存在最优消费.

在连续时间下分析最优消费最经典的方法是随机动态规划方法. 这方面的先行者是 Merton^[71]. 近年来, 很多学者在这一领域进行了深入的探讨, 如: Jin 等^[72] 讨论了无卖空限制的连续时间下最优消费的存在性和唯一性, Lehoczky 等^[73] 用鞅方法讨论了最优消费问题, Björk 等^[74] 用随机方法讨论了连续时间下的最优消费问题, He^[75] 讨论了由离散到连续时间下最优消费问题等. 一般认为, 证明动态规划意义下最优消费-投资组合选择问题的解存在性主要有三种方法: 一是运用随机控制理论中的存在性定理; 二是构造一个控制, 然后利用动态规划的核验定理验证这个控制就是一个解; 三是近年来普遍采用的鞅表示方法.

1.2.2 风险控制模型

经典的均值方差 (MV) 模型是用均值来度量一个投资组合的收益, 用方差来度量风险, 前提是假设资产的收益呈正态分布. 然而, 在实际中这一条件往往不能完全满足. 此外, 投资者对风险的定义也有不同的理解, 有些人认为未来收益的不确定性即是风险, 也有人认为只有当未来收益低于预期收益时才存在风险. 根据这些不同的看法, 人们所要求的对风险的度量依据也就不同. 所以新的风险模型不断地被提出, 如下半方差模型, 下半标准偏差模型 (Markowitz^[76]), 均值 - 绝对偏差模型 (Konno 和 Yamazaki^[77,78]), 均值 - 下半绝对偏差^[78,79], 低于目标风险 (below target risk) 模型^[80], 以及极大极小模型 (Young^[81], Teo et al.^[82], Deng et al.^[83]) 等.

假设市场上有 n 种资产, R_j 是第 j 种资产的随机收益率, x_j 是投资在资产 j 的比例, 投资策略 x 的收益率 $R(x)$ 表示为 $\sum_{j=1}^n R_j x_j$, r_j 为资产 j 的期望收益率, $r(x)$ 是 $R(x)$ 的期望值, 则方差表示为

$$V(x) = E[(R(x) - r(x))^2]$$

标准偏差表示为

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{E[(R(x) - r(x))^2]}$$

定义 1.2.3 下半方差 (lower semi-variance) 定义为

$$V_-(x) = E[(R(x) - r(x))_-^2]$$

其中, $(a)_- = \max\{0, -a\}$.

我们将这一风险函数简记为 LSV.

定义 1.2.4 下半标准偏差 (lower semi-standard deviation) 定义为

$$\sigma_-(x) = \sqrt{E[(R(x) - r(x))_-^2]}$$

我们将这一风险函数简记为 LSSD.

Markowitz^[84] 认为当收益率的分布呈偏态时, 即 $\sigma_-(x) \neq \frac{1}{2}\sigma(x)$ 时, 用 LSV 或 LSSD 来度量风险要比用方差或是标准偏差来度量风险更加合适. 对于愿意采用 LSV 和 LSSD 来度量风险的投资者来说, 他们认为风险存在于未来收益低于预期收益的情况, 这是绝大多数厌恶风险的投资者普遍持有的一种观点. 但是这两个风险函数往往被人们忽视, 因为当 $R(x)$ 呈正态分布时, 它们与方差本质上一样.

我们将 LSV 和 LSSD 相应的投资模型分别简记为 Mean-LSV(M-LSV) 和 Mean-LSSD(M-LSSD). 众所周知, 当资产收益 $R(x)$ 呈正态分布时, M-LSV 模型和 MV 模型符合 von Neumann 最大期望效用原则 (maximization of expected utility Principle). 最近, Ogryczak et al.^[19,85] 发现在一定的假设下, 无论 $R(x)$ 的分布如何, M-LSSD 模型符合 MEU 原则, 但是 M-LSV 和 MV 模型则不符合.

定义 1.2.5 假设 ρ 是投资者希望达到的收益率, 则 k 阶低于目标风险 (below target risk) 定义为

$$BT_k(\rho, x) = E[(\rho - R(x))_-^k]^{\frac{1}{k}}$$

这样一个风险度量方法也是符合 MEU 原则^[80], 且对任意 k , $BT_k(\rho, x)$ 是 x 的凸函数. 当 $k=1$ 和 $k=2$ 时, 问题可以分别转换成线性规划和二次规划问题, 在实际的计算中具有重要的意义.

定义 1.2.6 绝对偏差函数 (absolute deviation) 定义为

$$w(x) = E \left\| \sum_{j=1}^n R_j x_j - E \left[\sum_{j=1}^n R_j x_j \right] \right\|$$

均值 - 绝对偏差 (mean-absolute deviation, MAD) 模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & w[R(x)] \\ \text{s.t.} \quad & E[R(x)] \geq \rho M_0 \\ & x \in X \end{aligned}$$

其中, ρ 是投资者要求的最低回报率, M_0 是投资者的初始财富, 且

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j = M_0, 0 \leq x_j \leq \alpha_j, j = 1, \dots, n \right\}$$

均值 - 绝对偏差 (MAD) 模型与经典的均值方差 (MV) 模型的最大区别在于用资产收益的绝对偏差来替代方差度量风险. 这一模型提出后, 受到人们的普遍关注, 因为它能解决大型的标量优化问题. 到目前为止, 人们已经发现了 MAD 模型所具有的很多显著优点.

从数学的观点来看, MAD 模型与 MV 模型没有本质区别. 下面这个结论容易证明^[78].

定理 1.2.4 当收益率 R 满足正态分布时,

$$w(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sigma(x)$$