结构振动理论及其应用

胡少伟 苗同臣 编著

中国建筑工业出版社

结构振动理论及其应用

胡少伟　苗同臣　编著

中国建筑工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

结构振动理论及其应用/胡少伟，苗同臣编著．—北京：
中国建筑工业出版社，2005
ISBN 7-112-07241-7

Ⅰ．结…　Ⅱ．①胡…②苗…　Ⅲ．建筑结构-结构
振动　Ⅳ．TU311.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 014245 号

结构振动理论及其应用

胡少伟　苗同臣　编著

*

中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）
新 华 书 店 经 销
北京市彩桥印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米　1/16　印张：20½　字数：510 千字
2005 年 5 月第一版　　2005 年 5 月第一次印刷
印数：1—2 500 册　　定价：39.00 元
ISBN 7-112-07241-7
TU·6469（13195）

本社网址：http://www.china-abp.com.cn
网上书店：http://www.china-building.com.cn

前　言

本书是作者在郑州大学、美国西北大学、南京水利科学研究院等地完成的国家自然科学基金项目、河南省重大攻关项目、南京水利科学研究院科研基金项目和诸多横向课题项目等科研成果的基础上，结合作者多年来为土木、水利、力学、机械等专业高年级本科生和硕士、博士研究生讲授《振动理论》、《结构动力学》和《高等结构动力学》等专业基础课讲义编著而成。

本书在内容编排上，除对振动理论的经典内容进行简明而透彻的阐述外，尽可能反映结构动力学领域中近期发展起来、并在工程实际中得到广泛应用的一些新方法，还包含了作者近期科研方面的部分应用性成果。内容讲述风格上，力求做到逻辑严谨、简明扼要、叙述清晰，同时尽可能自成体系，便于自学，各章之间既各自独立，又有一定的联系。

全书共分为前言、绪论和 12 章内容以及有关附录。在绪论部分，引入一些结构振动的基本概念；单自由度线性系统振动是最简单的振动系统，同时，单自由度振动系统的一些概念、特征和研究方法，是研究更复杂振动系统的基础，所以第 1 章和第 2 章介绍了单自由度系统的自由振动和受迫振动；工程中研究质量连续分布振动系统的方法，一是将系统简化为离散质量的有限自由度系统，用离散特性代替系统的连续特性，一是用精确的数学方法和近似的数值解法直接研究原连续质量系统，因此，第 3 章和第 4 章介绍离散参数系统方法，包括两自由度系统的振动和多自由度系统的振动；第 5、6、7 章则分别讲述连续系统的精确解法、近似解法和有限元法；第 8 章简单介绍了非线性振动的分析方法，以单自由度体系为研究对象，阐明非线性振动的概念与特性，介绍几种常用的求解非线性振动的定量方法；作为工程应用的实例分析内容，第 9 章介绍了回转结构的振动；第 10 章介绍了结构振动理论在土木工程中的应用——工程结构的抗震计算；第 11 章讲述了模态分析及其应用技术，通过应用例子说明了模态分析应用的一些基本原理与方法，尤其是通过对灵敏度分析、模态修改及修正有限元模型以及作者科研成果的介绍，使读者能对当今模态分析应用的最新领域和应用的基本方法有所了解；第 12 章为上述各章知识的综合与应用，以作者完成的一系列科研成果为背景，以实际汽车车架为工程对象，利用振动理论从汽车车架的数学、力学模型的建立开始，详细介绍了解决工程实际问题的方法步骤，包括模型建立、有限元计算、计算结果分析、动力灵敏度分析、动力模型修改、优化设计和故障诊断等。

本书绪论、第 1、2、3、4 和 12 章由苗同臣主笔撰写，其余各章由胡少伟主笔撰写，最后由胡少伟、苗同臣共同审校和定稿。

本书可作为高等院校有关专业硕士、博士研究生的结构动力学和振动理论等课程的相关教材或高年级本科生的教学参考书，也可作为从事振动、冲击等与振动和结构动力分析教学和研究有关的教师和工程技术人员的参考书。

本书的出版自始至终得到郑州大学王伟教授的指导和把关，南京水利科学研究院王承

强博士以及硕士生涂启华、李勇等对书稿的编排和校对给予了很多的帮助和支持。中国建筑工业出版社的咸大庆编辑、王梅编辑为本书的顺利出版付出了辛苦的劳动；本书的写作过程中，参考了众多振动理论与结构动力学有关的教材与资料，在此不一一列举，作者表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，疏误之处在所难免，恳请广大读者及有关领域专家提出宝贵意见，以便再版时修改。最后，感谢南京水利科学研究院专著出版基金的资助！

胡少伟、苗同臣

2005 年 1 月

目　录

绪　论

一、振动研究的基本问题和内容

工程结构的动态分析在许多行业中已显得愈来愈重要。本书着重研究结构振动分析的理论基础及其应用问题。

所谓**振动**（vibration），就是物体在静平衡位置附近所作的微小往复弹性运动。振动产生的原因有的是物体本身固有的原因引起的，有的是外界干扰引起的。工程中，结构的振动问题既有有用的一面也有不利的一面，但是，对多数机器或结构，振动会带来不良的影响。由于振动，降低了机器的动态精度和其他使用性能，如机床振动会降低工件的加工精度，军械振动会影响瞄准；由于振动，机器在使用中往往产生巨大的反复变动的荷载，这将导致机器使用寿命的降低，甚至酿成灾难性事故，如大桥因共振而倒塌，烟囱因风振而倾倒，飞机因颤振而坠落等等，这类事故虽然罕见，但灾害严重。因此，振动问题的研究和分析对机器的使用和设计都具有极其重要的实际意义。

振动研究的总目标是研究振动产生的原因和它的运动规律，振动对机器及人体的影响，寻求控制和消除振动的方法。具体的说，大致包括以下几方面的问题：

确定系统的固有频率，预防共振的发生；

计算系统的动力响应，以确定结构受到的动荷载或振动的能量水平；

研究平衡、隔振和消振方法，以消除振动的影响；

研究自激振动及其不稳定振动产生的原因，以便有效的控制；

振动检测，分析事故原因及控制环境噪声；

振动技术的应用；

……

在振动研究中，通常把所研究的对象（如机器或结构物）都称为**振动系统**（vibration system）；把外界对系统的作用或引起机器运动的力称为**激励**（excitation）或**输入**（input），激励或输入是随时间变化的，将引起振动的发生。可用时间的确定函数来描述的激励称为**确定性激励**，不能用时间的确定函数表示的激励称为**随机激励**，随机激励具有一定的统计规律性，可以用随机函数和随机过程描述；把机器或结构在激励作用下产生的动态行为称为**响应**（response）或**输出**（output）。随机激励下的响应也是随机的。**振动分析**就是研究系统、激励（输入）和响应（输出）之间的关系，理论上讲，只要知道两者就可以确定第三者。

这样，工程振动分析所要解决的问题又可以归纳为以下几类：

1. 响应分析

已知系统和输入参数，求系统响应，包括位移、速度、加速度和力的响应。这为计算和分析结构的强度、刚度、允许的振动能量水平等提供了依据。

2. 系统设计

已知振动系统激励（输入）和所要满足的动态响应（输出）的要求，设计合理的系统参数。对机器和结构的设计而言，这个问题更为重要。通常系统设计要依赖于响应分析，所以在实际工作中，这两个问题是交替进行的。

3. 系统识别

已知振动系统的激励（输入）和响应（输出）求系统参数，以便了解系统的特性。

系统识别包括物理参数识别（确定系统的物理参数：质量、刚度、阻尼等）和模态参数识别（确定或估计系统的固有特性：固有频率、振型等）。

4. 环境预测

这是在已知系统响应（输出）和系统参数的情况下确定系统的输入，以判别系统的环境特征。

二、振动分析的力学模型

对结构进行振动分析，和进行其他分析一样，即使结构很简单，也不可能直接对其进行数学意义上的理论分析和求解。因此振动分析的第一步，也是很关键很难的一步，就是把所研究的对象以及外界对它的作用和影响简化为理想的力学模型。这个力学模型不但要简单，而且在动态特性方面应尽可能地与原来的研究对象等效。实际工程结构力学模型的具体建立方法比较复杂，不属于本书的内容，这里只作简单的概念性叙述。

任何结构之所以能产生振动，是因为它本身具有**质量**和**弹性**，同时任何振动在没有外界干扰（激励）时都会逐渐消失，也就是说，有阻碍振动持续进行的一种阻力，这种阻力称为**阻尼**（damping）。从能量关系看，质量可以储存动能，弹性可以储存势能，而阻尼则消耗能量。但外界对系统作功时，系统质量就吸收动能，因而就具有运动速度；弹性储存变形能，因而就具有使质量恢复原来状态的能力。这样，能量不断地变换就导致系统质量的反复运动（振动）。如果没有外界源源不断地输入能量，那么由于阻尼的能量消耗，振动现象将逐渐停息。由此可见，质量、弹性和阻尼是振动系统力学模型的三个要素。下面对这三个要素的特性作出具体说明。

1. 弹簧

弹簧是弹性元件的最特殊最简单模型，是表示力和位移关系的元件。在力学模型中它被理想化为无质量并具有线性弹性的元件，也就是说，弹簧弹性力的大小与弹簧两端点的相对位移成正比。

2. 阻尼

表示力与速度关系的元件。在力学模型中它被理想化为无质量的元件，根据不同结构的实际阻尼情况，阻尼力与速度的关系也不一样，阻尼力比弹簧力的分析要复杂的多。

3. 质量

表示力与加速度关系的元件。在力学模型中它被简化为刚体。质量是表示物体惯性的一种度量。

三、振动系统的分类

1. 按振动系统的自由度数目分类

单自由度系统的振动：确定系统在振动过程中任何瞬时的几何位置，只需要一个独立坐标的振动；

多自由度系统的振动：确定系统在振动过程中任何瞬时的几何位置，需要多个独立坐

标的振动；

弹性体的振动：弹性体具有无限多个自由度，因此需要用无限多个独立坐标确定系统在振动过程中任何瞬时的几何位置。

2. 按振动微分方程或振动系统结构参数的特性分类

线性振动：振动系统的惯性力、阻尼力、弹性恢复力分别与加速度、速度、位移成线性关系，能够用常系数线性微分方程表述的振动；

非线性振动：振动系统的阻尼力或弹性恢复力具有非线性性质，故只能用非线性微分方程表述的振动。

两种方程（系统）在解法上和解的性质上存在本质的差异：大部分非线性方程不存在解析解，只能得到近似解或作定性分析；非线性系统解不再具有迭加性；非线性振动（非线性动力学）是目前数学、力学、物理学、生物学、社会科学等多种领域研究的热点和前沿。

3. 按振动的周期性分类

周期振动：振动系统的某些物理量（如位移、速度、加速度等）在相等的时间间隔内作往复运动，往复一次所需的时间间隔称为“周期”。每经过一个周期以后，运动又重复前一周期的全过程；

非周期振动：即瞬态振动，振动系统的物理量的变化没有固定的时间间隔，即没有一定的周期。

4. 按产生振动的输入特性（激励）分类

自由振动：系统受到初始激励作用后，仅靠其本身的弹性恢复力“自由地”振动，其振动的特性仅决定于系统本身的物理特性（质量和刚度）；

受迫振动或称强迫振动：系统受到外界持续的激励作用而“被迫地”进行振动，其振动特性除决定于系统本身的特性外，还决定于激振的特性；

自激振动：系统在受系统振动本身控制的激励作用下发生的振动。在适当的反馈作用下，系统会自动地激起定幅振动，一旦振动被激起，激励也随之消失。

5. 按振动的输出特性分类

简谐振动：可以用简单正弦函数或余弦函数表述其运动规律的振动，显然简谐振动属于周期性振动；

非简谐振动：不可以直接用简单正弦函数或余弦函数表述其运动规律的振动，非简谐振动也可能是周期性振动；

随机振动：不能用简单函数或简单函数的组合来表述其运动规律，而只能用统计的方法来研究其规律的非周期性振动。

四、振动问题的研究方法

解决振动问题的方法不外乎通过理论分析和实验研究，二者是相辅相成的。在振动的理论分析中大量应用数学工具，特别是计算机和数值计算方法的发展和完善，为解决复杂振动问题提供了强有力的手段。

本书着重阐述振动的基本理论与分析方法，并结合实际说明其应用前景，通过本书的学习，可以初步具备解决实际振动问题的能力，为进一步开展研究工作打下良好的基础。

第 1 章　单自由度系统的自由振动

单自由度线性系统（以后简称单自由度系统）的振动是最简单的振动系统，尽管如此，许多实际问题可以足够精确地简化为这样的振动系统，同时，单自由度振动系统的一些概念、特征和研究方法，是研究更复杂振动系统的基础。

1.1　无阻尼系统的自由振动

1.1.1　振动微分方程的建立

对于单自由度无阻尼系统，建立振动微分方程很简单，可以使用牛顿定律、动力学普遍定理、达郎贝尔原理、拉格郎日方程等。下面给出几种振动系统的微分方程（不作详细推导）。

（1）弹簧－质量系统（简称 $m-k$ 系统）

设悬挂在弹簧上的重物作铅垂方向的直线振动（它是许多实际结构振动问题的力学模型），质量为 m，弹簧的刚度系数为 k，如图 1.1.1 所示。选取重物的静平衡位置为坐标原点，当重物偏离 x 时，弹簧恢复力为 $-kx$，利用牛顿定律可得到运动微分方程

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{1.1.1}$$

（2）复摆系统

图 1.1.2 所示的复摆系统在其静平衡位置摆动，设物体对悬挂点 O 的转动惯量为 J_O，利用动量矩定理或定轴转动微分方程可得到用转角 ϕ 表示的转动微分方程

$$J_O\ddot{\phi}+mga\phi=0 \tag{1.1.2}$$

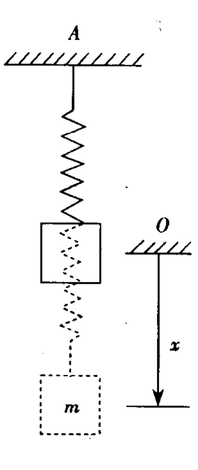

图 1.1.1　质量－弹簧系统

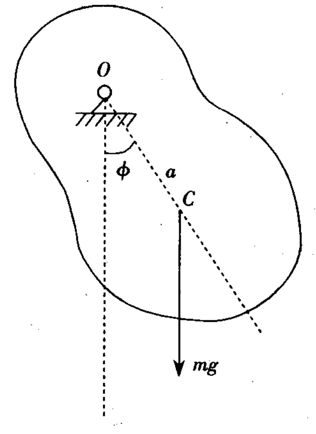

图 1.1.2　复摆

(3) 纯滚动圆盘系统

质量为 m，半径为 r 的均质圆盘在半径为 R 的圆形表面内纯滚动，如图 1.1.3 所示。利用动能定理或拉格郎日方程可得到用角度 ϕ 表示的运动微分方程

$$\frac{2}{3}m(R-r)^2\ddot{\phi}+mg(R-r)\phi=0 \tag{1.1.3}$$

(4) 扭转振动

图 1.1.4 所示的轴受扭转后，圆盘在轴的弹性恢复力矩作用下在平衡位置附近作扭转振动。若忽略轴的质量，则系统的运动微分方程为

$$J\ddot{\theta}+k_r\theta=0 \tag{1.1.4}$$

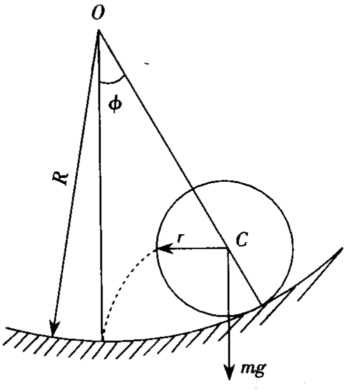

图 1.1.3　纯滚动圆

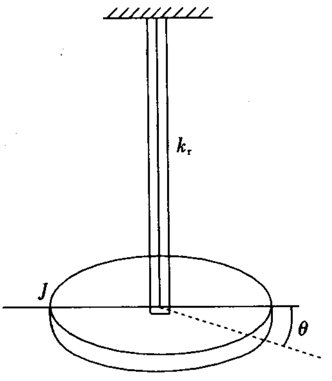

图 1.1.4　轴的扭转振动

其中 θ 为圆盘相对静平衡位置转过的角度，J 为圆盘对轴的转动惯量，k_r 为使轴产生单位转角所需施加的扭矩（即轴的扭转刚度）。

(5) 梁的横向振动

如图 1.1.5 所示，质量为 m 的重物放在简支梁的中心处，不计梁的质量，由于梁的挠度 λ 与作用力成正比，其比例系数为 k（即产生单位挠度所需要的力），设梁长为 l，材料的弹性模量为 E，截面惯性矩为 I，由材料力学可知 $k=\dfrac{48EI}{l^3}$，以梁中点（m 作用位置）的静挠度 λ_{st}处为坐标原点建立坐标系，则可得到梁的横向振动微分方程

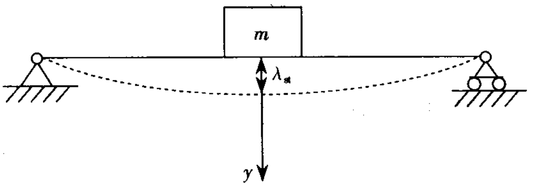

图 1.1.5　梁的横向振动

$$m\ddot{y}+\frac{48EI}{l^3}y=0 \tag{1.1.5}$$

式 (1.1.1) ~ 式 (1.1.5) 可以写成统一的数学形式

$$m_{eq}\ddot{x}+k_{eq}x=0 \tag{1.1.6}$$

这里：m_{eq}和 k_{eq}分别称为**等效质量**和**等效刚度**，x 为广义坐标。为方便起见，以后将

等效质量和等效刚度直接写为 m 和 k，这样式（1.1.6）就变成了式（1.1.1）的形式。

1.1.2 振动方程的解

令

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \tag{1.1.7}$$

则式（1.1.1）变为

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{1.1.8}$$

式（1.1.8）的通解为

$$x = C_1 \cos\omega_n t + C_2 \sin\omega_n t \tag{1.1.9}$$

或

$$x = X\sin(\omega_n t + \alpha) \tag{1.1.10}$$

式（1.1.9）和式（1.1.10）是时间 t 的简谐函数，因此称这种振动为**简谐振动**（simple harmonic vibration）。

设系统的初始条件为：$t=0$ 时 $x = x_0$，$\dot{x} = \dot{x}_0$，则可确定式（1.1.9）和式（1.1.10）中的常数为

$$C_1 = x_0,\quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \tag{1.1.11}$$

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2},\quad \alpha = \arctan\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} \tag{1.1.12}$$

式（1.1.10）中 ω_n 称为**圆频率**（circular frequency）或**角频率**（angular frequency），其物理意义是在 2π 时间内振动的次数，单位为弧度/秒（rad/s）；X 称为**振幅**，是质量偏离静平衡位置的最大距离；α 称为**初相位**。圆频率、振幅和初相位是简谐振动的三个重要特征量。

由式（1.1.7）知，圆频率 ω_n 只决定于系统本身的参数 m 和 k，而与系统的初始条件无关，是系统本身所固有的特性，所以称为**固有频率**（natural frequency）。固有频率 ω_n 是振动分析中极其重要的参数。

由式（1.1.9）或式（1.1.10）可以看出，系统属于周期振动，振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{1.1.13}$$

周期的倒数称为频率，记作 f

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{1.1.14}$$

周期（period）是系统振动一次所需要的时间，单位为秒（s）；**频率**（frequency）是系统每秒钟振动的次数，单位为 1/秒（1/s）或赫兹（Hz）。

1.1.3 固有频率的计算

（1）直接法

即利用式（1.1.7）直接计算，这时式（1.1.7）中的 k 和 m 为等效刚度和等效质量。如式（1.1.2）和式（1.1.3）表示的振动的固有频率分别为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mga}{J_O}} \text{ 和 } \omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

(2) 静位移法

设图 1.1.1 所示的系统，重物在静平衡位置时弹簧的位移为

$$\lambda_{st}=\frac{mg}{k}$$

将上式代入式 (1.1.7) 得

$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{\lambda_{st}}} \tag{1.1.15}$$

式 (1.1.15) 具有一般的意义，很多振动系统用此计算固有频率比式 (1.1.7) 要方便。如图 1.1.5 所示的梁，设梁长为 l，材料的弹性模量为 E，截面惯性矩为 I，由材料力学可知，梁中点的静位移为 $\lambda_{st}=\dfrac{mgl^3}{48EI}$，由式 (1.1.15) 计算的固有频率为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}$$

和利用式 (1.1.7) 计算的固有频率相同。

计算固有频率除上面的两种方法以外，还可以使用下一节中的能量方法。

【**例 1.1**】如图 1.1.6 所示，升降机的箱笼质量为 m，以等速度 v_0 向下运动。若吊索上端突然被卡住，使箱笼停止下降，求箱笼振动的固有频率和吊索的最大伸长量。设卡住时吊索长为 l，吊索的弹性模量为 E，横截面积为 A，不计吊索质量。

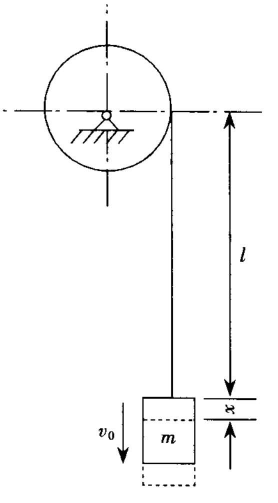

图 1.1.6　升降机吊索振动

【**解**】由材料力学知，吊索刚度 k（即产生单位伸长需要的力）为$\dfrac{EA}{l}$，以静平衡位置为坐标原点建立坐标系，箱笼振动的微分方程为

$$m\ddot{x}+\frac{EA}{l}x=0$$

则固有频率

$$\omega_n=\sqrt{\frac{EA}{ml}}$$

系统的初始条件为 $t=0$ 时 $x=0$，$\dot{x}=v_0$，则由式 (1.1.12) 可求得吊索的振幅

$$X=\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}=v_0\sqrt{\frac{ml}{EA}}$$

由材料力学可知，静变形为 $\lambda_{st}=\dfrac{mgl}{EA}$，所以，吊索的最大伸长量为

$$\lambda_{max}=\lambda_{st}+X=\frac{mgl}{EA}+v_0\sqrt{\frac{ml}{EA}}$$

也可以将 $\lambda_{st}=\dfrac{mgl}{EA}$代入式 (1.1.15) 计算固有频率，结果相同。

1.2 能量法 等效质量和等效刚度

1.2.1 能量法计算固有频率

对无阻尼自由振动系统，能量（机械能）是守恒的。设系统的动能和势能分别用 T 和 V 表示，则能量方程为

$$T+V=\text{常数}，\text{或}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V)=0 \tag{1.2.1}$$

系统在静平衡位置的速度最大，动能也最大，而势能取为 0 位置；在重物偏离静平衡位置达最大时，速度为 0，动能也为 0，而势能达到最大。利用式（1.2.1）得到

$$T_{\max}=V_{\max} \tag{1.2.2}$$

式（1.2.1）一般用于建立振动方程，再利用振动方程求固有频率；式（1.2.2）可以直接求固有频率，但经常和关系 $\dot{x}_{\max}=\omega_n x_{\max}$［此式可由式（1.1.10）得到］一起使用。

【例 1.2】 用能量法求图 1.1.3 所示系统作微幅振动的固有频率。

【解法 1】 利用式（1.2.1）解。

取图 1.1.3 中的角度 ϕ 为广义坐标，$\phi=0$ 时为 0 势能点。任意位置时圆盘的角速度 $\omega_C=\frac{R-r}{r}\dot{\phi}$，圆盘对质心 C 的转动惯量 $J_C=\frac{1}{2}mr^2$，则系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}J_C\omega_C^2=\frac{3m}{4}(R-r)^2\dot{\phi}^2$$

系统的势能

$$V=mg(R-r)(1-\cos\phi)$$

将 T 和 V 代入式（1.2.1），并利用 $\sin\phi\approx\phi$（微幅振动），可得到系统的振动微分方程

$$\ddot{\phi}+\frac{2g}{3(R-r)}\phi=0$$

所以系统的固有频率为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

【解法 2】 利用式（1.2.2）解。

和解法 1 类似，取 $\phi=0$ 时为 0 势能点。$\phi=0$ 时 $\dot{\phi}$ 最大，记为 $\dot{\phi}_{\max}$，此时系统动能最大

$$T_{\max}=\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\phi}_{\max}^2+\frac{1}{2}J_C\omega_{C\max}^2=\frac{3m}{4}(R-r)^2\dot{\phi}_{\max}^2$$

当 $\phi=\phi_{\max}$ 时系统的势能最大

$$V_{\max}=mg(R-r)(1-\cos\phi_{\max})\approx mg(R-r)\frac{\phi_{\max}^2}{2}$$

利用式（1.2.2）和关系 $\dot{\phi}_{\max}=\omega_n\phi_{\max}$ 即可求得系统的固有频率。和方法 1 的结果相同。

1.2.2 等效质量

式（1.1.6）已经给出了等效质量和等效刚度的概念，并且从式（1.1.1）~式（1.1.5）

可以得出几种简单系统的等效质量，这些系统有一个共同的特点，就是不考虑弹性元件的质量。但在一些系统中，弹性元件的质量在系统质量中所占的比例比较大，这时就必须考虑这些弹性元件质量的影响。

等效质量就是将这些弹性元件所具有的多个集中质量或分布质量简化到系统的集中质量上去，从而变成典型的单自由度振动系统。简化所依据的原则是：简化后系统的动能与原系统的动能相等，但并不考虑重力势能的影响。这种简化虽是一种近似方法，但误差很小。

下面通过例子说明等效质量的近似计算。

【例 1.3】 质量－弹簧系统，物块质量为 m，弹簧长度为 l，刚度为 k，单位长度质量为 ρ，求考虑弹簧质量影响时的固有频率。

【解】 如图 1.2.1，假设物块的位移和速度用 x 和 $\dot{x}$ 表示，弹簧的变形是均匀的，则距固定端为 s 的微段 $\mathrm{d}s$ 的位移为 $\frac{sx}{l}$，速度为 $\frac{s\dot{x}}{l}$，动能为

$$\mathrm{d}T' = \frac{1}{2}\rho\mathrm{d}s\left(s\,\frac{\dot{x}}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\,\frac{s^2\dot{x}^2}{l^2}\mathrm{d}s$$

整个弹簧的动能

$$T' = \int_0^l \frac{l}{2}\rho\,\frac{s^2\dot{x}^2}{l^2}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_s\right)\dot{x}^2$$

其中 $m_s = \rho l$ 为弹簧的总质量。于是弹簧的等效质量为 $\frac{1}{3}m_s$，把这个质量加到集中质量 m 上，就得到系统的固有频率

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3}m_s}}$$

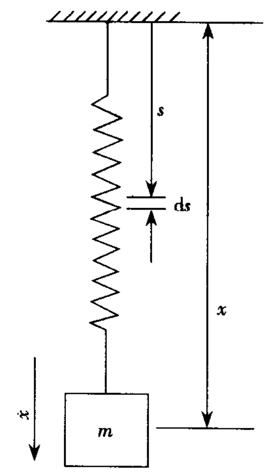

图 1.2.1　质量－弹簧系统

【例 1.4】 图 1.2.2 所示，在均质等截面梁中央放置一集中质量 m_1，设梁的质量为 m_2，长为 l，抗弯刚度为 EI，求考虑梁质量影响时系统的固有频率。

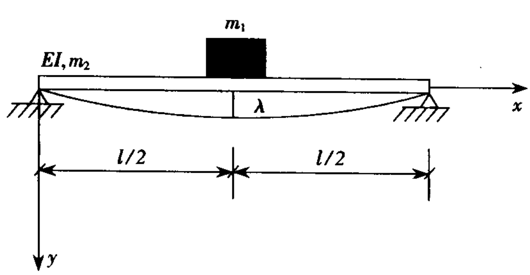

图 1.2.2　梁的横向振动

【解】 由材料力学知，在图示坐标系下由静荷载 $m_1 g$ 引起梁的挠度曲线为

$$y = \frac{m_1 g}{48EI}(3l^2x - 4x^3),\ \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right)$$

梁中点（m_1 作用位置）的挠度为 $y_m = \frac{m_1 g l^3}{48EI}$，用 y_m 表示 y（即用集中质量处的挠度表示整个梁的挠度）有

$$y = y_m\frac{1}{l^3}(3l^2x - 4x^3),\ \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right)$$

假设梁运动时的挠度曲线和静挠度曲线相同，把 y_m 和 y 看作变量，上式就可以代表