

复合材料断裂 复变方法

杨维阳 李俊林 张雪霞 著



科学出版社
www.sciencep.com

复合材料断裂复变方法

杨维阳 李俊林 张雪霞 著

内 容 简 介

本书重点介绍复合材料断裂理论中的复变函数方法. 将复合材料平面断裂问题化为偏微分方程边值问题, 采用复变函数方法推出了复合材料板 I 型、II 型、III 型、混合型、受纯弯、受纯扭、受弯扭裂纹尖端应力、应变、位移、弯矩、扭矩的解析解. 将应变能释放率看作实变函数平均值的极限, 得到了复合材料板各型裂纹尖端应变能释放率的计算公式. 将 J 积分化为复形式——复变函数积分的实部或虚部, 证明了复合材料板各型裂纹尖端 J 积分的路径无关性. 本书大部分内容是作者多年来的科研成果.

本书可以作为应用数学专业和工程力学专业高年级本科生和研究生的选修课教材, 也可供相关领域工作的教师、工程师和研究人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

复合材料断裂复变方法/杨维阳, 李俊林, 张雪霞 著. —北京: 科学出版社, 2005

ISBN 7-03-014599-2

I. 复… II. ①杨…②李…③张… III. 复合材料-断裂-复变函数
IV. TB330.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 133157 号

责任编辑: 陈玉琢 贾瑞娜 / 责任校对: 张怡君

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2005 年 3 月第 一 版 开本· B5(720×1000)

2005 年 3 月第一次印刷 印张· 8 1/4

印数· 1—2 000 字数 152 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换(环伟))

前 言

在断裂问题的理论研究中经常用到近代数学的理论、知识和方法^[1,2]. 复变函数方法是用于求解复合材料平面断裂问题的非常有效、十分成功的数学方法之一. 本书介绍作者 20 世纪 80 年代至今在这方面的研究成果, 希望引起在应用数学和工程力学领域学习、工作、研究的专家、同行们的兴趣和注意, 进一步了解复变函数方法及其在复合材料断裂中的应用, 以期这两个领域的研究工作能够交叉渗透、互相促进, 都得到提高和发展.

本书第一章介绍复合材料弹性力学基本知识. 第二章探讨复合材料断裂中的力学模型, 将复合材料平面断裂问题化为一类偏微分方程的边值问题. 第三、四章论述复合材料断裂力学知识. 将有关的偏微分方程化为广义重调和方程或广义调和方程, 借助复变函数方法和待定系数法推出了复合材料板 I 型、II 型、III 型、混合型裂纹尖端以及正交异性复合材料板受纯弯、受纯扭、受弯扭裂纹尖端的应力、应变、位移、弯矩、扭矩的解析解. 第五章介绍复合材料裂纹板的应变能释放率. 将应变能释放率看作实变函数平均值的极限, 求出了复合材料板 I 型、II 型、III 型、混合型裂纹尖端应变能释放率的计算公式. 第六章阐述复合材料裂纹板的 J 积分. 将 J 积分化为复形式——复变函数积分的实部或虚部, 利用柯西-古萨基本定理证明了复合材料板 I 型、II 型、混合型裂纹尖端以及非弹性主方向裂纹尖端 J 积分的路径无关性, 借助柯西积分公式推出了它们的计算公式.

本书可以作为应用数学专业和工程力学专业高年级本科生和研究生的选修课教材, 也可供相关领域工作的教师、工程师和研究人员参考使用.

借此机会, 十分感谢山西省自然科学基金(20031012)、山西省青年科学基金(20041005)和太原科技大学对本书出版的大力支持. 同时感谢赵文彬同志在本书成稿过程中给予的热心帮助.

限于作者的水平, 书中若有错误和不妥之处, 欢迎读者不吝指正.

作 者

2004 年 4 月 10 日

目 录

前言

第一章 复合材料弹性力学	1
1.1 各向异性体的应力-应变关系	1
1.2 正交异性体的应力-应变关系	2
1.3 正交异性体的弹性常数	3
1.4 单层板弹性主方向的弹性特征	5
1.5 单层板非弹性主方向的弹性特征	8
第二章 偏微分方程边值问题	12
2.1 复合材料断裂平面问题	12
2.2 复合材料断裂反平面问题	16
2.3 正交异性复合材料断裂弯曲问题	18
第三章 复合材料板断裂分析	22
3.1 复变函数	22
3.2 I型裂纹板应力分析	26
3.3 II型裂纹板应力分析	38
3.4 混合型裂纹板应力分析	47
3.5 III型裂纹板应力分析	53
第四章 正交异性复合材料弯曲板裂纹尖端场	57
4.1 纯弯裂纹板应力分析	57
4.2 纯扭裂纹板应力分析	69
4.3 弯扭裂纹板应力分析	83
第五章 复合材料裂纹板的应变能释放率	93
5.1 应变能释放率的一般概念	93
5.2 I型裂纹板的应变能释放率	95
5.3 II型裂纹板的应变能释放率	97
5.4 III型裂纹板的应变能释放率	99
5.5 混合型裂纹板的应变能释放率	101
第六章 复合材料裂纹板的J积分	104
6.1 J积分的一般概念	104
6.2 I型裂纹板的J积分	105

6.3 II型裂纹板的J积分	112
6.4 混合型裂纹板的J积分	114
6.5 非弹性主方向裂纹板的J积分	118
参考文献	124

第一章 复合材料弹性力学

1.1 各向异性体的应力-应变关系

纤维增强复合材料是由高强度、低密度的纤维材料与基体所组成. 从传统的力学观点来看, 纤维增强复合材料可以认为是具有线弹性各向异性力学性能的材料. 线弹性各向异性材料是指每一点的各个方向上的弹性性质不尽相同的材料. 对于线弹性各向异性材料, 应力与应变之间满足广义胡克定律: 应力是应变的齐次线性函数, 反之应变也是应力的齐次线性函数^[3,4], 即

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ Q_{51} & Q_{52} & Q_{53} & Q_{54} & Q_{55} & Q_{56} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & Q_{64} & Q_{65} & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\sigma_x\} = [Q]\{\epsilon_x\} \quad (1.1)$$

其中 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 是正应力; $\tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ 是剪应力, 如图 1.1 所示; $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 是线应变; $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ 是剪应变; $\{\sigma_x\}$ 是应力列阵; $\{\epsilon_x\}$ 是应变列阵; $[Q]$ 是刚度矩阵, Q_{ij} 是表征弹性特性的材料常数, 称为刚度系数.

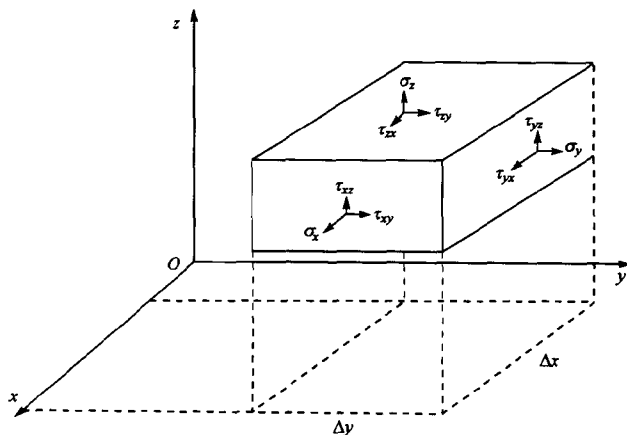


图 1.1 微元体与应力记号

可以证明刚度矩阵 $[Q]$ 是一个对称矩阵,即

$$Q_{ij} = Q_{ji} \quad (1.2)$$

因此对于各向异性材料而言, $[Q]$ 只有 21 个独立分量.

表示式(1.1)可改写为

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

即

$$\{\epsilon_x\} = [S]\{\sigma_x\} \quad (1.3)$$

其中 $[S]$ 是柔度矩阵, S_{ij} 是另一类表征弹性特性的材料常数,称为柔度系数.显然,刚度矩阵和柔度矩阵是互逆的,即

$$[S] = [Q]^{-1}, \quad [Q] = [S]^{-1} \quad (1.4)$$

并且柔度矩阵 $[S]$ 也是一个对称矩阵,只有 21 个独立分量.

1.2 正交异性体的应力-应变关系

线弹性正交异性材料是指通过每一点都具有三个相互垂直的弹性对称平面的材料.因此,由弹性对称可以证明

$$Q_{14} = Q_{15} = Q_{16} = Q_{24} = Q_{25} = Q_{26} = Q_{34} = Q_{35} = Q_{36} = Q_{45} = Q_{46} = Q_{56} = 0 \quad (1.5)$$

从而,应力-应变关系式(1.1)简化为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\sigma_x\} = [Q]\{\epsilon_x\} \quad (1.6)$$

这时,刚度矩阵 $[Q]$ 中独立的刚度系数只有 9 个.类似地,应变-应力关系式(1.3)简化为

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\epsilon_x\} = [S]\{\sigma_x\} \quad (1.7)$$

独立的柔度系数也只有 9 个。对于正交异性体,由式(1.7)可知,正应力不引起剪应变,剪应力不引起线应变;反之亦然。

1.3 正交异性体的弹性常数

若用弹性常数:杨氏模量、泊松比和剪切模量代替应变-应力关系式(1.7)中的柔度矩阵[S],有

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

其中 E_1, E_2, E_3 是正交异性材料沿弹性主方向 x, y, z 的杨氏模量; ν_{12} 是 x 方向伸、缩时决定 y 方向缩、伸的泊松比, ν_{13} 是 x 方向伸、缩时决定 z 方向缩、伸的泊松比, 余类推; G_{23}, G_{31}, G_{12} 是决定 y 方向和 z 方向、 z 方向和 x 方向、 x 方向和 y 方向之间夹角变化的剪切模量。通常弹性主方向的弹性常数,称为主弹性常数,以区别任意坐标系中的弹性常数。

将式(1.7)和式(1.8)对照,得到柔度系数与弹性常数关系

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}$$

$$\begin{aligned} S_{22} &= \frac{1}{E_2}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}}, & S_{55} &= \frac{1}{G_{31}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (1.9)$$

由式(1.9), 得到

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}, \quad E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}, \quad E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31} \quad (1.10)$$

由式(1.4), 通过求逆矩阵, 推出刚度系数可用柔度系数表示为

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22} S_{33} - S_{23}^2}{S}, & Q_{12} &= \frac{S_{13} S_{23} - S_{12} S_{33}}{S}, & Q_{13} &= \frac{S_{12} S_{23} - S_{13} S_{22}}{S} \\ Q_{22} &= \frac{S_{33} S_{11} - S_{13}^2}{S}, & Q_{23} &= \frac{S_{12} S_{13} - S_{23} S_{11}}{S}, & Q_{33} &= \frac{S_{11} S_{22} - S_{12}^2}{S} \\ Q_{44} &= \frac{1}{S_{44}}, & Q_{55} &= \frac{1}{S_{55}}, & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

其中

$$S = S_{11} S_{22} S_{33} + 2 S_{12} S_{23} S_{13} - S_{11} S_{23}^2 - S_{22} S_{13}^2 - S_{33} S_{12}^2 \quad (1.12)$$

将式(1.9)代入式(1.11), 式(1.12), 得到刚度系数与弹性常数关系

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & Q_{22} &= \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, & Q_{33} &= \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{32}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{21} + \nu_{23} \nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} = Q_{21} \\ Q_{13} &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} = \frac{\nu_{31} + \nu_{32} \nu_{21}}{E_2 E_3 \Delta} = Q_{31} \\ Q_{23} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} = \frac{\nu_{32} + \nu_{31} \nu_{12}}{E_1 E_3 \Delta} = Q_{32} \\ Q_{44} &= G_{23}, & Q_{55} &= G_{31}, & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (1.13)$$

其中 Δ 是用弹性常数表示的式(1.12)中的 S 值

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} \end{vmatrix} = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{12} \nu_{23} \nu_{31}}{E_1 E_2 E_3} \quad (1.14)$$

我们知道, 应变能密度函数

$$W = \frac{1}{2} \{\sigma_x\}^T \{\epsilon_x\} = \frac{1}{2} \{\epsilon_x\}^T \{\sigma_x\} \quad (1.15)$$

恒取正值. 将式(1.6), 式(1.7)代入式(1.15), 有

$$W = \frac{1}{2} \{\epsilon_x\}^T [Q] \{\epsilon_x\} = \frac{1}{2} \{\sigma_x\}^T [S] \{\sigma_x\} \quad (1.16)$$

因此刚度矩阵和柔度矩阵都是正定的,从而我们有^[4,5,6]

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}}{E_1 E_2 E_3} > 0 \quad (1.17)$$

$$E_1 > 0, \quad E_2 > 0, \quad E_3 > 0 \quad (1.18)$$

$$G_{12} > 0, \quad G_{23} > 0, \quad G_{31} > 0 \quad (1.19)$$

$$1 - \nu_{23}\nu_{32} > 0, \quad 1 - \nu_{13}\nu_{31} > 0, \quad 1 - \nu_{12}\nu_{21} > 0 \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} |\nu_{12}| &< \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{1}{2}}, & |\nu_{21}| &< \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ |\nu_{23}| &< \left(\frac{E_2}{E_3}\right)^{\frac{1}{2}}, & |\nu_{32}| &< \left(\frac{E_3}{E_2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ |\nu_{31}| &< \left(\frac{E_3}{E_1}\right)^{\frac{1}{2}}, & |\nu_{13}| &< \left(\frac{E_1}{E_3}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.21)$$

利用表示式(1.17),式(1.10)和式(1.18),可推出表示式

$$\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} < \frac{1}{2} \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3} - \nu_{21}^2 \frac{E_1}{E_2}\right) < \frac{1}{2} \quad (1.22)$$

这告诉我们三个泊松比的乘积小于 0.5.

1.4 单层板弹性主方向的弹性特征

单层板是指单向纤维或编织纤维在基体中成扁平形式的层片. 对于纤维增强复合材料单层板,在面内有两个弹性主方向:纤维方向(纵向)和垂直纤维方向(横向),垂直单层板的方向为法线方向(垂向). 如图 1.2 所示,选取坐标轴平行于单层板的弹性主方向,纵向 x 轴,横向 y 轴,垂向 z 轴,这样的坐标系 $Oxyz$ 称为弹性主

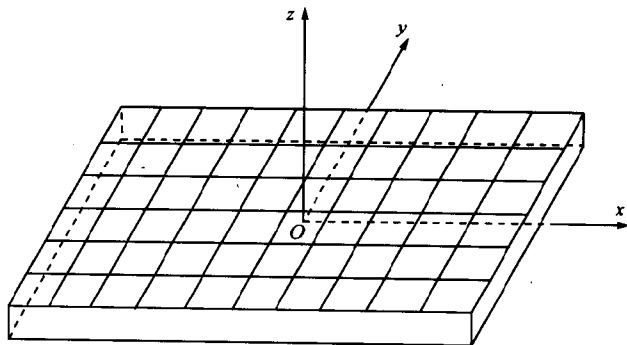


图 1.2 弹性主方向坐标系

方向坐标系.

客观上,单层板在弹性主方向坐标系中研究时属于正交异性体.进行力学分析时,假设单层板法线方向(z 轴)有关的应力分量与面内(xOy 面)的应力分量相比可以忽略不计,即

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (1.23)$$

于是,对单层板的力学分析简化为广义平面应力问题,即式(1.7)和式(1.8)简化为

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

和

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

将面内部分分离出来,得到^[3,7]

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\epsilon_x\} = [S]\{\sigma_x\} \quad (1.26)$$

和

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

其中 $[S]$ 是柔度矩阵. 由式(1.26), 式(1.27), 式(1.10)可知, 单层板在弹性主方向坐标系中只有 4 个独立的柔度系数 $S_{11}, S_{12}, S_{22}, S_{66}$ 和弹性常数 E_1, E_2, ν_{12} 或 ν_{21}, G_{12} . 同时, 有

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_y \quad (1.28)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (1.29)$$

由式(1.26), 通过求逆矩阵, 可以推出在平面应力状态下, 单层板在弹性主方向的应力-应变关系如下

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\sigma_x\} = [Q]\{\epsilon_x\} \quad (1.30)$$

其中 $[Q]$ 是刚度矩阵. 显然也只有 4 个独立的刚度系数 $Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, Q_{66}$. 刚度系数 $Q_{ij} (i, j=1, 2, 6)$ 与柔度系数 $S_{ij} (i, j=1, 2, 6)$ 之间有关系

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{12} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (1.31)$$

和

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{Q_{12}}{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2}, & S_{12} &= -\frac{Q_{12}}{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2} \\ S_{22} &= \frac{Q_{11}}{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2}, & S_{66} &= \frac{1}{Q_{66}} \end{aligned} \quad (1.32)$$

比较式(1.26), 式(1.27), 柔度系数可用弹性常数表示如下

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (1.33)$$

将式(1.33)代入式(1.31), 刚度系数可用弹性常数表示如下

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{56} = G_{12} \quad (1.34)$$

1.5 单层板非弹性主方向的弹性特征

如图 1.3 所示,若坐标轴不平行于纤维增强复合材料单层板的弹性主方向, x 轴与纤维方向 1 轴之间的夹角为 φ ,则这样的坐标系 $Oxyz$ 称为非弹性主方向坐标系。

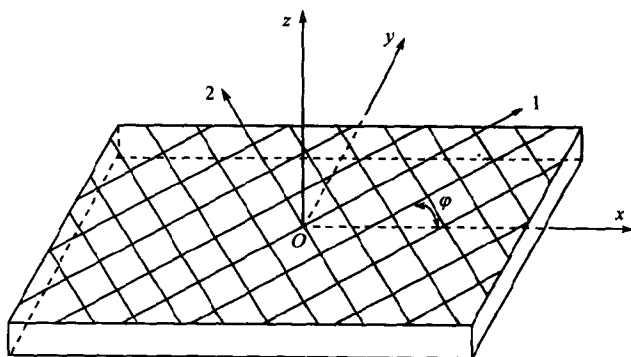


图 1.3 非弹性主方向坐标系

面内非弹性主方向坐标系 Oxy 和弹性主方向坐标系 $O12$ 的应力变换公式和应变变换公式依次为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\sigma_x\} = [T]_\sigma \{\sigma_1\} \quad (1.35)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\epsilon_x\} = [T]_\epsilon \{\epsilon_1\} \quad (1.36)$$

其中 $[T]_\sigma$ 称为应力变换矩阵, $[T]_\epsilon$ 称为应变变换矩阵。由式(1.35), 式(1.36), 通过求逆矩阵, 得到

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\sigma_1\} = [T]_e^T \{\sigma_x\} \quad (1.37)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ -2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\varepsilon_1\} = [T]_e^T \{\varepsilon_x\} \quad (1.38)$$

其中 $[T]_e^T$ 是 $[T]_e$ 的转置矩阵; $[T]_s^T$ 是 $[T]_s$ 的转置矩阵。

将式(1.30),式(1.38)代入式(1.35),得到单层板非弹性主方向的应力-应变关系

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\sigma_x\} = [\bar{Q}] \{\varepsilon_x\} \quad (1.39)$$

其中非弹性主方向的刚度矩阵 $[\bar{Q}]$ 与弹性主方向的刚度矩阵 $[Q]$ 有下列关系

$$[\bar{Q}] = [T]_e [Q] [T]_e^T \quad (1.40)$$

由此得到刚度系数 $\bar{Q}_{ij}$ ($i, j=1, 2, \dots, 6$)为

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \varphi + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + Q_{22} \sin^4 \varphi \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + Q_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \varphi + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + Q_{22} \cos^4 \varphi \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin\varphi \cos^3 \varphi + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \varphi \cos\varphi \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \varphi \cos\varphi + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin\varphi \cos^3 \varphi \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + Q_{66} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \end{aligned} \quad (1.41)$$

将式(1.26),式(1.37)代入式(1.36),得到单层板非弹性主方向的应变-应力关系

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

或

$$\{\epsilon_x\} = [\bar{S}]\{\sigma_x\} \quad (1.42)$$

其中非弹性主方向的柔度矩阵 $[\bar{S}]$ 与弹性主方向的柔度矩阵 $[S]$ 的转轴变换公式为

$$[\bar{S}] = [T]_e [S] [T]_e^T \quad (1.43)$$

由此得到用柔度系数 S_{ij} 表示柔度系数 $\bar{S}_{ij}$ ($i, j=1, 2, \dots, 6$)如下

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= S_{11} \cos^4 \varphi + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + S_{22} \sin^4 \varphi \\ \bar{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + S_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \\ \bar{S}_{22} &= S_{11} \sin^4 \varphi + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + S_{22} \cos^4 \varphi \\ \bar{S}_{16} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \varphi \cos^3 \varphi - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \varphi \cos \varphi \\ \bar{S}_{26} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \varphi \cos \varphi - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \varphi \cos^3 \varphi \\ \bar{S}_{66} &= 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + S_{66} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \end{aligned} \quad (1.44)$$

纤维增强复合材料单层板非弹性主方向的应力-应变关系式(1.39)和应变-应力关系式(1.42)说明,正应力会引起剪应变,剪应力会引起线应变;反之亦然。这种现象称为交叉效应,反映交叉效应的刚度系数是 $\bar{Q}_{16}, \bar{Q}_{26}$;柔度系数是 $\bar{S}_{16}, \bar{S}_{26}$ 。由式(1.41),式(1.44)可知,上述交叉系数都是角 φ 的奇函数,其他系数都是角 φ 的偶函数。因为单层板非弹性主方向存在交叉效应,所以进行力学分析时属于各向异性体。

若用非弹性主方向的弹性常数表示柔度系数 $\bar{S}_{ij}$ ($i, j=1, 2, 6$),则应变-应力关系式(1.42)化为

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{m_x}{E_x} \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{m_y}{E_y} \\ -\frac{m_x}{E_x} & -\frac{m_y}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

其中 E_x, E_y 为非弹性主方向 x, y 的杨氏模量; G_{xy} 为 $x-y$ 平面的剪切模量; ν_{xy}, ν_{yx} 为相应方向的泊松比; m_x, m_y 是在非弹性主方向 x, y 出现的无因次系数,称为交叉系数。比较式(1.42)和式(1.45),有

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= \frac{1}{E_x}, & \bar{S}_{12} &= -\frac{\nu_{xy}}{E_y} = -\frac{\nu_{yx}}{E_x}, & \bar{S}_{22} &= \frac{1}{E_y} \\ \bar{S}_{66} &= \frac{1}{G_{xy}}, & \bar{S}_{16} &= -\frac{m_x}{E_x}, & \bar{S}_{26} &= -\frac{m_y}{E_y} \end{aligned} \quad (1.46)$$

将式(1.44)代入式(1.46),继而代入式(1.33),得到用主弹性常数 E_1, E_2, ν_{12}

或 ν_{21}, G_{12} 表示弹性常数 $E_x, E_y, G_{xy}, \frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y}$ 和 $\frac{m_x}{E_x}, \frac{m_y}{E_y}$ 的转轴变换公式如下

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E_x} &= \frac{1}{E_1} \cos^4 \varphi + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \frac{1}{E_2} \sin^4 \varphi \\
\frac{\nu_{yx}}{E_x} &= \frac{\nu_{xy}}{E_y} = \frac{\nu_{12}}{E_1} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\
\frac{1}{E_y} &= \frac{1}{E_1} \sin^4 \varphi + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{1}{E_2} \cos^4 \varphi \\
\frac{1}{G_{xy}} &= \frac{1}{G_{12}} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) + \left(\frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2} + \frac{4\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cdot 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \quad (1.47)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\frac{m_x}{E_x} &= \left(\frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cos^3 \varphi \sin \varphi - \left(\frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cos \varphi \sin^3 \varphi \\
\frac{m_y}{E_y} &= \left(\frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^3 \varphi \cos \varphi - \left(\frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin \varphi \cos^3 \varphi \quad (1.48)
\end{aligned}$$