考研数学真题与典型题详解系列

线性代数

（理工类）

考研真题与典型题详解

金圣才 主编

汇总众多高校考研专业课真题，并进行详细解答！

精选名校题库、讲义和笔记，汇集专业典型试题！

题量充足，来源广泛，突出热点，参考答案详尽！

中国石化出版社

考研数学真题与典型题详解系列

线性代数(理工类)

考研真题与典型题详解

金圣才　主编

中国石化出版社

内 容 提 要

本书是一本考研数学（理工类）真题与典型题详解的复习资料，是根据最新硕士研究生入学考试理工类数学大纲，参考并整理了众多线性代数题库和相关资料精编而成。全书共分6章，每章包括4个部分，第1部分是考试内容及要求，第2部分是重要公式、性质及结论，第3部分是历年考研真题详解，第4部分是典型题详解。

本书特别适用于在硕士研究生入学考试中参加数学（一）和数学（二）科目的考生，也适用于各大院校学习线性代数的师生参考，对于参加职称考试、自考及其他相关专业人员来说，也是学习线性代数的一本不可多得的复习资料。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(理工类)考研真题与典型题详解/金圣才主编.
—北京：中国石化出版社，2005
（考研数学真题与典型题详解系列）
ISBN 7-80164-809-9

Ⅰ.线...Ⅱ.金...Ⅲ.线性代数-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 042652 号

中国石化出版社出版发行
地址：北京市东城区安定门外大街58号
邮编：100011 电话：(010)84271850
读者服务部电话：(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail：press@sinopec.com.cn
北京精美实华图文制作中心排版
北京大地印刷厂印刷
新华书店北京发行所经销

*

787×1092 毫米 16 开本 28 印张 712 千字
2005年5月第1版 2005年5月第1次印刷
定价：46.80元
（购买时请认明封面防伪标识）

前　言

本书根据最新硕士研究生入学考试数学大纲，参考并整理了众多数学资料精编而成。全书共分为6章，每章包括4部分，第1部分是考试内容及要求，第2部分是重要公式、性质及结论，第3部分是历年考研真题详解，第4部分是典型题详解。

本书具有如下特点：

(1) 题量较大，来源广泛。主要选自200多本数学复习资料（含10年来考研真题）、名校题库以及众多教材和相关资料，经编著而成。可以说本书的试题都经过了精心挑选，博选众书，取长补短。

(2) 解答详细，突出重难点。对每一道题，包括选择题和填空题，都进行了详细的解答。有些试题提供了多种解题方法，便于读者进一步理解。

(3) 难点归纳，理论知识和考试要点归纳有特色。有些试题的结论在一般教材上并没有作为定理或结论，但在考研中却可以直接使用，这些内容本书都进行了总结和分析。

需要特别说明的是：

本书的每道题都是一道典型的例题，读者如果把本书的每一道题认真地看懂、研读，相信在考研中一定能够取得很好的成绩！

本书特别适用于硕士研究生入学考试中数学科目的考生，也适用于各大院校学习数学的师生参考，对于参加职称考试、自考及其他相关专业人员来说，也是学习数学的一本不可多得的复习资料。

由于题量较大，解答详细，错误、遗漏不可避免，诚请读者指正，不妥之处和建议可与编者联系，不甚感激。

为了帮助读者更好地学习数学等各门课程，圣才考研网开设了数学等公共课和专业课的论坛及专栏，还提供各个高校最新考研专业真题、各专业试题库、笔记、讲义及大量专业课复习资料。

限于篇幅，有些试题和资料未能在本书收录，如有建议或需试卷，请登录网站：

圣才考研网 www.100exam.com

金圣才

目　　录

第1章 行　列　式

1.1 考试内容及要求

考试内容

行列式的概念和基本性质　行列式按行(列)展开定理

考试要求

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质。

2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式。

1.2 重要公式、性质及结论

1. 方阵 A 的行列式的值 $|A|$ 与 A 的转置行列式的值 $|A^T|$ 相等。

2. 交换行列式的两行(列),行列式的值改变符号。

3. 行列式中某行(列)元素的非零公因子可以提到行列式的外面,如:$|\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=2|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|$,其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为三维列向量。

4. 行列式某两行(列)的对应元素成比例,或行列式中有一行(列)的元素全为0,则此行列式的值为0。如:$|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\alpha}|=0$;$|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},0|=0$,其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为三维列向量。

5. 行列式某行(列)元素是两数之和,则此行列式等于下述两个行列式之和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

用向量形式表示为:

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\alpha}'_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}'_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维列向量。

6. 将行列式的某行(列)的各元素乘以常数 k 加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变。

用向量形式表示为:

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j+k\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|$$

7. 行列式 D 按某一行(列)展开

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, i=j, \\ 0, i\neq j; \end{cases} (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, i=j, \\ 0, i\neq j; \end{cases} (i=1,2,\cdots,n)$$

其中,A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式。

8. $$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & ⋰ & \\ & \lambda_{n-1} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

9. $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_n \\ \boldsymbol{A}_m & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}_m|\cdot|\boldsymbol{B}_n|$。

10. 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1}(x_i - x_j)$$

其中，记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积。

11. $n \geqslant 2$ 时，n 个数的所有排列中，奇排列和偶排列各占一半，即各有$\frac{n!}{2}$个。

12. 如果将行列式中的某一行(列)的每一个元素都写成两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素，其他位置的元素与原行列式相同。即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D_1+D_2$。

13. n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n)$$

14. 行列式中两行对应元素全相等，其值为零，即当 $a_{il}=a_{jl}(l=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

15. 克拉默法则　如果线性方程组(11)的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

那么，方程组(11)有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.3 历年考研真题详解

1.3.1 选择题

1.(1996 年数一)四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于(　　)。

(A)$a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　(B)$a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C)$(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　(D)$(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

解:按第一行展开,

$$\text{原式}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}=a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}-b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$$

故正确选项为(D)。

2.(1999 年数二)记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为(　　)。

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

解:因为

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 \\ 4x & -3 & x-7 \end{vmatrix}=-x(x-7)$$

可见 $f(x)=0$ 的根的个数为 2,故正确选项为(B)。

1.4 典型题详解

1.4.1 填空题

1. 已知 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$,则 $A_{11}-2A_{12}+3A_{13}-4A_{14}=$______。

【分析】 注意到 $a_{31}=2,a_{32}=-4,a_{33}=6,a_{34}=-8$,那么由行列式的性质,$a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}+a_{34}A_{14}=0$ 即 $2A_{11}-4A_{12}+6A_{13}-8A_{14}=2(A_{11}-2A_{12}+3A_{13}-4A_{14})=0$。

注:不要直接去计算代数余子式,那样太麻烦,要掌握代数余子式的性质。

2. 一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数比 n^2-n 多,则此行列式等于______。

解:应填 0,因为 n 阶行列式共有 n^2 个元素,如果 D 是 n 阶行列式,而且其中等于零的元素的个数比 n^2-n 多,则不等于零的元素的个数比 $n^2-(n^2-n)=n$ 少。这样,D 的展开式中每项至少有一个因子 0,从而 $D=0$。

3. 已知 $abcd=1$,则 $\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}=$______。

解:0。因为原行列式可以写成 $D=D_1+D_2$,

$$D_1=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix},$$

$$D_1=abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}\xlongequal[\text{交换列三次}]{abcd=1}-D_2$$

所以 $D=D_1+D_2=0$。

4. 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 是关于 x 的一次多项式,该式中 x 的系数为__________。

解:因为行列式中只有一个元素为 x,所以多项式中含有 x 的项为

$$(-1)^{2+3}x\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-x(-1)=x$$

所以 x 的系数为 1。

5. 已知 $f(x),g(x),h(x)$ 为二阶导函数,则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta x)^3}\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(x+\Delta x) & g(x+\Delta x) & h(x+\Delta x) \\ f(x+2\Delta x) & g(x+2\Delta x) & h(x+2\Delta x) \end{vmatrix}=\text{________}。$$

解:由 $f(x),g(x),h(x)$ 为二阶导函数,根据行列式的性质原式可化为

$$原式=\lim_{\Delta x\to 0}\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} & \dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} & \dfrac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} \\ \dfrac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2} & \dfrac{g(x+2\Delta x)-2g(x+\Delta x)+g(x)}{(\Delta x)^2} & \dfrac{h(x+2\Delta x)-2h(x+\Delta x)+h(x)}{(\Delta x)^2} \end{vmatrix}$$

再由罗比达法则，

$$原式=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2f'(x+2\Delta x)-2f'(x+\Delta x)}{2\Delta x} & \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2g'(x+2\Delta x)-2g'(x+\Delta x)}{2\Delta x} & \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2h'(x+2\Delta x)-2h'(x+\Delta x)}{2\Delta x} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix}$$

6. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第 4 行元素代数余子式之和的值为______。

解：把行列式 D 的第 4 行元素换成第 2 行的元素，得另一行列式 D'，则易知

$$D'=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

根据行列式的定义按第 4 行展开，得

$$2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+2A_{44}=0$$

即

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0$$

7. 计算五阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=$______。

【分析】 利用行列式按行(列)展开定理可得递推公式从而获得结果。

解：

按第 1 行展开，得

$$D_5=(1-a)\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a\begin{vmatrix} -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$=(1-a)D_4+(-1)^3(-1)^{1+1}(-1)D_3$$

$$=(1-a)D_4+aD_3$$

$$=(1-a)[(1-a)D_3+aD_2]+aD_3$$

$$=[(1-a)^2+a]D_3+a(1-a)D_2$$

$$=(1-a+a^2)[(1-a)D_2+a(1-a)]+a(1-a)D_2$$

$$=(1-a+a^2)[(1-a)(1-a+a^2)+a(1-a)]+a(1-a)(1-a+a^2)$$
$$=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$$

8. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________。

解:按第 1 列展开,得

$$原式=a\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+(-1)^{1+n}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$
$$=a^n+(-1)^{1+n}b^n$$

9. 设 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+bx+q=0$ 的三个根,则行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=$ ________。

解:利用方程的根与系数的关系,由 x_1,x_2,x_3 是方程 $x^3+0x^2+px+q=0$ 的三个根可得 $x_1+x_2+x_3=0$

于是 $$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ x_1+x_2+x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1+x_2+x_3 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$$
$$=(x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=0$$

10. 设 n 阶行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$$

则 $|\boldsymbol{A}|$ 中所有元素的代数余子式之和为________。

解:$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot\frac{n(n+1)}{2\cdot n!}$。因为 $|\boldsymbol{A}|$ 中所有元素的代数余子式是 $\boldsymbol{A}^*$ 中的对应元素,而

$$A^* = A^{-1}|A| = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

所以$|A|$中所有元素的代数余子式之和为

$$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot \frac{1}{n!}(1+2+\cdots+n) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2 \cdot n!}$$

11. 行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} =$__________。

其中 $x_i \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$

解:为将其化成上三角形行列式,将第二列的 $-\frac{1}{x_2}$ 倍,第三列的 $-\frac{1}{x_3}$ 倍…第 n 列的 $-\frac{1}{x_n}$ 倍加到第一列上得:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{x_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = x_2 \cdots x_n \left(x_1 - \sum_{i=2}^{n} x_i\right)$$

【评注】 本题中的 D_n 称为爪形行列式,是典型的一类 n 阶行列式,有些行列式可以转化为爪型行列式。例如:

$$D = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$$

将第一行的(-1)倍加到各行上得:

$$D = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & \cdots & a \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

这是爪形行列式,用类似的方法可将 D 化为上三角形行列式,进而求出

$$D = x_1 \cdots x_n \left(1 + a\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)$$

行列式 D 还可以用加边方法来做,这也是一种典型方法。在 D 的基础上加一行一列可得:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a+x_1 & a & \cdots & a\\ 0 & a & a+x_2 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a & a & \cdots & x+a_n\end{vmatrix}$$

将第一行的$(-a)$倍加到各行上，就转化为爪形行列式。

12. 设 $f(x)=\begin{vmatrix}x & 2 & 3 & 4\\ x & 2x & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3x & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4x\end{vmatrix}$

则 $f(x)$中 x^4 的系数为______；x^3 的系数为________。

解：由行列式的定义，含 x^4 的项为 4 个取自不同行不同列的 x 的一次多项式的乘积，这样的项只有一项，即主对角线上元素的乘积为 $4!\ x^4$。含有 x^3 的项为 3 个取自不同行不同列的 x 的一次项乘积，再乘上一个常数(由于要求不同行不同列，这个常数惟一确定)，这样的项也只有一项，即为(1,2)，(2,1)，(3,3)，(4,4)位置元素的乘积，所以为 $-4!\ x^3$(注意符号为负)。

13. 行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2\\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4\end{vmatrix}=$________。

解：构造 5 阶范德蒙行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & y^2\\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & y^3\\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & y^4\end{vmatrix}$$

将 D_5 按最后一列展开得：

$$D_5=1\cdot A_{15}+yA_{25}+y^2A_{35}+y^3(-D)+y^4A_{55}$$

又 $D_5=(y-x_1)(y-x_2)(y-x_3)(y-x_4)\prod\limits_{4\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$，易见 y^3 的系数为

$$-(x_1+x_2+x_3+x_4)\prod_{4\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

【评注】 范德蒙行列式可以直接使用，但要注意是大指数减小指数。例如：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1\\ n^2 & (n-1)^2 & (n-2)^2 & \cdots & 2^2 & 1\\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \\ n^{n-1} & (n-1)^{n-1} & (n-2)^{n-1} & \cdots & 2^{n-1} & 1\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)=$$

$$\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}[(n-i+1)-(n-j+1)]=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(j-i)$$

14. 行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$______。

解:按行列式的定义,若四列、五列取了前二行,则三列只能取零,故不同行不同列的五个元素乘积均为零,从而该行列式的值为零。也可以这样考虑,用行列式的性质,互换行列式的行使

$$D=\left|\begin{array}{cc:ccc} c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array}\right|$$

由拉普拉斯展开定理知 $D=0$。

【评注】 $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|$,$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=|A||B|$及$\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}=(-1)^{m+n}|A||B|$(这里 A、B 分别为 m 阶、n 阶方阵)。这几个基本公式常用到,应记住。

15. 行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{vmatrix}=$______。

解:将行列式第一行的 1 倍加到第四行上,并提出公因子 10 得:

$$D=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$$

$$=-10(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=-120$$

16. 行列式 $D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & a+1 \\ -1 & 1 & a-1 & 1 \\ -1 & a+1 & -1 & 1 \\ a-1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=$______。

解:该行列式的特点是每一行均有两个 1,两个(-1)和一个 a,将各列加到第一列上,再提公因子 a 可得:

$$D=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & a+1 \\ 1 & 1 & a-1 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

再将第一列的(-1)倍加到二列与四列上,$(+1)$倍加到第三列上,易得行列式的值为 a^4。

【评注】 计算数字行列式要根据具体问题的特点简化计算。用类似的方法容易计算 88