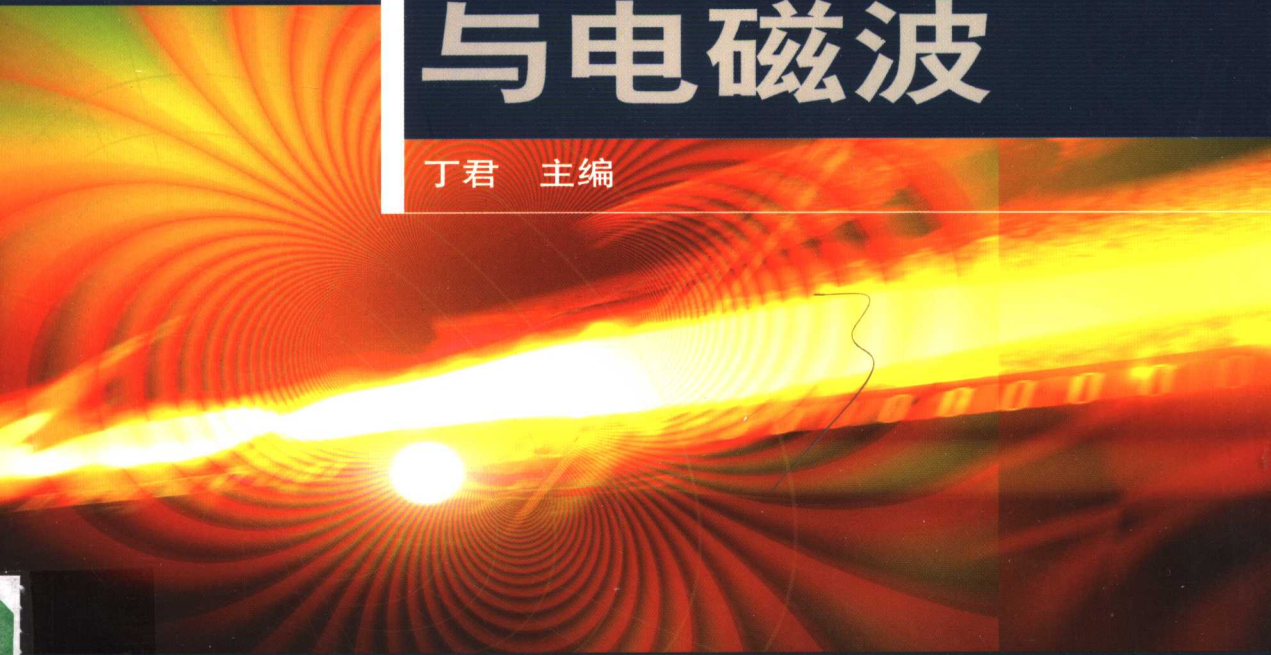





高等学校教材

工程电磁场 与电磁波

丁君 主编



 高等教育出版社

高等学校教材

工程电磁场与电磁波

丁 君 主编

高等教育出版社

内容提要

“电磁场与电磁波”是电子信息和通信等专业的一门技术基础课。《工程电磁场与电磁波》就是为这门课程编写的教材(参考学时 76 学时)。本书由西北工业大学具有丰富教学经验的教师编写,在章节编排上与多数教材中采用的传统模式有所不同,先建立电磁学的基本理论——麦克斯韦方程,再分别对静态场和时变场进行讨论。书中对静电场、恒定电场和恒定磁场的知识没有分章编写,而是归纳在“第四章静态场分析”中,进行共性和个性的总结,以免与普通物理学重复。静态场问题主要突出边值问题的求解方法,尤其对镜像法和分离变量法的介绍相当详尽。全书侧重于时变场的分析,对均匀平面波的传播规律、极化特性、能量传递关系、反射和折射规律等进行了详细讨论,并尽量结合工程应用实例。

本书具体内容为:第一章矢量分析、第二章电磁学基本理论、第三章媒质的电磁性质和边界条件、第四章静态场分析、第五章场论和路论的关系、第六章平面电磁波、第七章规则波导和空腔谐振器、第八章电磁波的辐射。

本书可供普通高等学校电子信息、通信等专业作为“电磁场与电磁波”课程的教材使用,也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场与电磁波/丁君主编. —北京:高等教育出版社,2005.7

ISBN 7-04-016693-3

I.工... II.丁... III.①电磁场—高等学校—教材②电磁波—高等学校—教材 IV.O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 056664 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
总 机	010-58581000	网上订购	http://www.landaco.com http://www.landaco.com.cn
经 销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
印 刷	河北省香河县印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2005年7月第1版
印 张	20.5	印 次	2005年7月第1次印刷
字 数	370 000	定 价	23.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 16693-00

序 言

工程电磁场与电磁波是电子信息与通信等专业本科生必修的一门重要的技术基础课。在高等数学、普通物理中的电磁学和电路课程的基础上学习本课程,将使学生对宏观电磁场和电磁波的基本规律有更深入和完整的理解,具备定量计算简单工程电磁问题的能力,建立场和路的统一认识。本课程也为学习微波技术、高等电磁理论等专业课程或从事电磁工程研究准备必要的知识基础。

在本书中,编者结合多年的电磁场课程的教学经验,以及从事电磁场应用研究的体会,从学生学习和掌握知识的规律出发,从便于读者自学和查阅资料的角度考虑,研究了多本国内外教材的特点和优点,对全书内容和章节进行了精心安排,在继承传统的基础上,进行了革新,本书在体系上与多数教材有所不同。

作为技术基础课程教材,本书对涉及的概念、原理、定律及专业名词均给出了明确的物理定义和说明,以及相应的数学表达式。本书以电磁学的数学基础为起点,首先讨论了电磁学遵循的普遍规律——麦克斯韦方程组及媒质的电磁性质;然后分别对静态场和时变场进行分析。如在静态场分析中,将静电场、恒定电场和恒定磁场归纳在一章中,既讨论了他们的对偶性,又分析了它们各自的特殊性,同时讨论了静态场遵循的普遍规律。对静态场边值问题的经典解法给出了详细介绍。本书中包含了大量精心编排的例题,这些例题不仅增强了学生对所学知识的理解,而且有助于提高学生分析问题和解决典型电磁问题的能力。本书的习题解答等内容编入与之配套的教学辅导书,将于2006年出版。

参加本书编写的有西北工业大学丁君、陈国瑞、郭陈江、李春晖同志,由丁君主编。本书编写中得到了西北工业大学教务处的大力支持,及西北工业大学电子信息学院同仁的关心和帮助,在此表示感谢。

本书承蒙西安电子科技大学梁昌洪教授和西安交通大学傅君眉教授对书稿进行了仔细审阅,并提出了很多宝贵意见和建议,在此表示衷心感谢。此外,李建周老师、李洁老师,及王瑁、杨丽娜、陈志亮等硕士研究生在书稿的打印和插图绘制方面给予的大力帮助,在此一并表示感谢。感谢高等教育出版社对本书出版的全力支持。

由于作者水平有限,书中难免存在错误和不当之处,敬请使用本书的广大师生和读者们批评指正。

编者
2005年5月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

策划编辑	刘激扬
责任编辑	刘激扬
封面设计	刘晓翔
责任绘图	朱 静
版式设计	史新薇
责任校对	王 超
责任印制	陈伟光

目 录

第 1 章 矢量分析	1
§ 1.1 矢量的概念	1
1.1.1 标量	1
1.1.2 矢量	1
§ 1.2 矢量运算	2
1.2.1 矢量加法	2
1.2.2 矢量减法	4
1.2.3 标量和矢量的乘积	4
1.2.4 两矢量的标量积	4
1.2.5 两矢量的矢量积	5
1.2.6 三矢量的乘积	7
§ 1.3 矢量微分元	8
1.3.1 直角坐标系	8
1.3.2 圆柱坐标系	8
1.3.3 球坐标系	9
1.3.4 广义正交曲线坐标系	11
§ 1.4 矢量在不同坐标系中的变换	12
1.4.1 圆柱坐标系与直角坐标系间的变换	12
1.4.2 球坐标系与直角坐标系间的变换	15
§ 1.5 标量场的梯度	16
1.5.1 标量场的等值面	16
1.5.2 标量场的梯度	17
§ 1.6 矢量场的散度	19
1.6.1 矢量场的矢线	19
1.6.2 通量	20
1.6.3 矢量场的散度	20
1.6.4 散度定理	22
§ 1.7 矢量场的旋度	24
1.7.1 矢量场的环量	24
1.7.2 矢量场的旋度	25
1.7.3 斯托克斯定理	26
§ 1.8 重要矢量恒等式	28

1.8.1 两个零恒等式	28
1.8.2 拉普拉斯算子	29
1.8.3 常用的矢量恒等式	30
习题	32
第2章 电磁学基本理论	34
§2.1 电场的基本物理量	34
2.1.1 电场强度	34
2.1.2 电位	39
§2.2 磁场的基本物理量	44
2.2.1 磁感应强度	44
2.2.2 矢量磁位	48
§2.3 安培环路定律	52
2.3.1 安培环路定律	52
2.3.2 位移电流	54
2.3.3 全电流定律	56
§2.4 法拉第电磁感应定律	59
2.4.1 法拉第电磁感应定律	59
2.4.2 法拉第电磁感应定律的推广	62
§2.5 电流连续性方程	63
§2.6 高斯定律	65
2.6.1 电场的高斯定律	65
2.6.2 磁场的高斯定律	69
§2.7 麦克斯韦方程组的积分形式	70
§2.8 麦克斯韦方程组的微分形式	72
习题	75
第3章 媒质的电磁性质和边界条件	79
§3.1 电场中的导体	79
3.1.1 静电场中的导体	80
3.1.2 恒定电场中的导体	80
3.1.3 电导率	82
§3.2 电场中的电介质	84
3.2.1 电介质的极化	84
3.2.2 束缚电荷	86
3.2.3 电位移矢量	88
§3.3 磁场中的磁介质	91
3.3.1 物质的磁化	91
3.3.2 磁场强度	93
3.3.3 磁介质的分类	94

§ 3.4 媒质中的麦克斯韦方程组	97
§ 3.5 电磁场的边界条件	98
3.5.1 电场法向分量的边界条件	98
3.5.2 电场切向分量的边界条件	100
3.5.3 标量电位的边界条件	101
3.5.4 磁场法向分量的边界条件	101
3.5.5 磁场切向分量的边界条件	102
3.5.6 矢量磁位的边界条件	104
3.5.7 标量磁位的边界条件	104
3.5.8 电流密度的边界条件	105
习题	106
第 4 章 静态场分析	109
§ 4.1 静态场特性	109
4.1.1 静态场的麦克斯韦方程	109
4.1.2 静电场基本方程	110
4.1.3 恒定电场基本方程	110
4.1.4 恒定磁场基本方程	111
§ 4.2 泊松方程和拉普拉斯方程	111
4.2.1 静电场的泊松方程和拉普拉斯方程	111
4.2.2 恒定电场的拉普拉斯方程	112
4.2.3 恒定磁场的矢量泊松方程	113
§ 4.3 静态场的重要原理和定理	114
4.3.1 对偶原理	114
4.3.2 叠加原理	117
4.3.3 惟一性定理	117
§ 4.4 镜像法	120
4.4.1 点电荷对无限大接地导体平面的镜像	121
4.4.2 线电荷对无限大接地导体平面的镜像	122
4.4.3 点电荷对无限大介质平面的镜像	123
4.4.4 线电流对无限大磁介质平面的镜像	124
4.4.5 点电荷对半无限大接地导体角域的镜像	126
4.4.6 点电荷对导体球面的镜像	128
4.4.7 线电荷对导体圆柱面的镜像	130
4.4.8 带有等量异号电荷的平行长直导体圆柱间的镜像	131
§ 4.5 分离变量法	134
4.5.1 直角坐标系中的分离变量法	134
4.5.2 圆柱坐标系中的分离变量法	144
4.5.3 球坐标系中的分离变量法	151

§ 4.6 复变函数法	153
4.6.1 复变函数的性质	154
4.6.2 复变函数法	156
4.6.3 保角变换法	161
习题	163
第 5 章 场论和路论的关系	167
§ 5.1 引言	167
§ 5.2 电阻	168
5.2.1 欧姆定律	168
5.2.2 焦耳定律	169
5.2.3 电阻的计算	170
§ 5.3 电容	172
5.3.1 双导体的电容	172
5.3.2 部分电容	174
§ 5.4 电感	176
5.4.1 自感	176
5.4.2 互感	180
§ 5.5 基尔霍夫定律和麦克斯韦方程	182
5.5.1 基尔霍夫电流定律	182
5.5.2 基尔霍夫电压定律	183
习题	187
第 6 章 平面电磁波	190
§ 6.1 引言	190
§ 6.2 时变电磁场波动方程	190
§ 6.3 均匀平面波在无耗介质中的传播	193
6.3.1 波动方程的解	193
6.3.2 相位常数和相速	194
6.3.3 本质阻抗	195
6.3.4 坡印廷矢量	196
§ 6.4 均匀平面波在有耗媒质中的传播	200
6.4.1 复介电常数和复本质阻抗	200
6.4.2 波动方程及其解	201
6.4.3 低损耗媒质	202
6.4.4 高损耗媒质	203
§ 6.5 波的极化特性	206
6.5.1 线极化波	206
6.5.2 圆极化波	207
6.5.3 椭圆极化波	208

6.5.4 极化的分解	209
§ 6.6 均匀平面波对平面边界的垂直入射	210
6.6.1 对理想导体表面的垂直入射	210
6.6.2 对无限大理想介质分界面的垂直入射	215
6.6.3 对无限大有耗媒质分界面的垂直入射	218
§ 6.7 多层介质分界面上的垂直入射	221
6.7.1 边界条件法	222
6.7.2 等效阻抗法	223
§ 6.8 均匀平面波对平面边界的斜入射	225
6.8.1 垂直极化波的斜入射	226
6.8.2 平行极化波的斜入射	230
6.8.3 波的全反射	232
6.8.4 波的全透射	232
习题	234
第 7 章 规则波导和空腔谐振器	236
§ 7.1 规则波导中电磁波的一般特性	236
7.1.1 横电磁(TEM)波	238
7.1.2 横磁(TM)波和横电(TE)波	238
§ 7.2 矩形波导	240
7.2.1 TE 波	240
7.2.2 TM 波	244
7.2.3 矩形波导的传输特性	244
§ 7.3 TE_{10} 模	251
7.3.1 TE_{10} 模的场分量	251
7.3.2 TE_{10} 模的特点	252
7.3.3 矩形波导中的功率传输	253
7.3.4 波导损耗	254
§ 7.4 圆柱形波导	258
7.4.1 TM 波	259
7.4.2 TE 波	261
7.4.3 圆波导中的传输损耗	263
7.4.4 圆波导的几个主要模式	263
§ 7.5 空腔谐振器	264
7.5.1 矩形空腔谐振器	265
7.5.2 圆形空腔谐振器	267
7.5.3 谐振波长	268
7.5.4 品质因数	269
7.5.5 圆形谐振腔的三种常用谐振模式	272

习题	275
第 8 章 电磁波的辐射	277
§ 8.1 引言	277
§ 8.2 滞后位	278
§ 8.3 电偶极子的辐射	281
8.3.1 电偶极子的电磁场	281
8.3.2 近区场和远区场	282
8.3.3 方向性函数和方向图	283
8.3.4 辐射功率和辐射电阻	284
8.3.5 方向性系数和半功率波瓣宽度	285
§ 8.4 磁偶极子的辐射	286
8.4.1 对偶原理的应用	286
8.4.2 磁偶极子的辐射场	287
§ 8.5 对称振子天线的辐射	289
8.5.1 对称振子天线的辐射场	289
8.5.2 半波振子天线的辐射	291
§ 8.6 天线阵的辐射	294
8.6.1 二元阵的辐射场	294
8.6.2 均匀直线阵	298
习题	301
附录一 符号表	303
附录二 国际单位制(SI)	305
索引	308
参考书目	316

第1章 矢量分析

在这门课程中,我们几乎从头到尾和场打交道。实际上,人们周围的空间也确实存在着各种各样的场,例如自由落体现象,说明存在一个重力场;人们能感觉到室内外的冷暖,说明我们周围分布着一个温度场,等等。那么到底什么是场呢?

从物理意义上理解,场是遍及一个被界定的或无限扩展的空间内的,能够产生某种物理效应的特殊的物质,场是具有能量的。从数学意义上理解,场是给定区域内各点数值的集合,这些数值规定了该区域内一个特定量的特性。

例如温度场就由 T 描述,只要知道了场中各点 T 的大小,该温度场就被确定了,这种只有数值大小的物理量称为标量,该场称为标量场;还有一种场,例如本书中讨论的电磁场,电场强度 E 是描述电场的物理量之一,人们不仅需要知道它的数值大小,还要知道它的方向,这样才能完全确定它,这样的物理量称为矢量,该场称为矢量场。在电磁场和电磁波的学习中始终要用到矢量运算,因此掌握矢量分析是十分必要的。



§ 1.1 矢量的概念

1.1.1 标量

在电磁场中遇到的特征量可区分为标量和矢量两类。

一个仅用大小就能够完整描述的物理量称为标量。如电荷、电位和能量等。这些量中的每一个量,用单纯的一个数就可以完整地描述。电荷 0.5 库仑(C), 电位 220 伏特(V)等都是标量的例子。

1.1.2 矢量

一个不仅有大小而且有方向的物理量称为矢量。力、速度、力矩、电场强度和加速度都是矢量。

一个矢量常用一个线段来图示,其长度按适当比例表示它的大小,方向则用箭头指示,如图 1.1(a)所示。其中 R 代表一个从 O 点指向 P 点的矢量。图

1.1(b)表示几个平行矢量有同样的大小和方向,它们都代表同一个矢量。一个大小为零的矢量称为空矢或零矢。一个大小为1的矢量称为单位矢量。

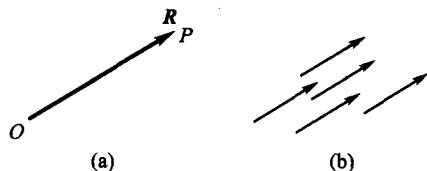


图 1.1

一个矢量 A 可以表示为:

$$A = Aa \quad (1.1)$$

其中 A 是 A 的大小,称为模,由式(1.2)表示

$$A = |A| \quad (1.2)$$

a 是 A 的单位矢量,即方向与 A 的方向相同,大小为1的矢量,由式(1.3)表示

$$a = \frac{A}{|A|} \quad (1.3)$$



§ 1.2 矢量运算

1.2.1 矢量加法

矢量加法是矢量的几何和,两个矢量的几何和服从平行四边形规则,如图 1.2(a)所示。

$$C = A + B \quad (1.4)$$

矢量加法也可以用矢量三角形表示,如图 1.2(b)所示,矢量 A 的头和矢量 B 的尾相接,得矢量 C 。同理矢量 B 的头和矢量 A 的尾相接,也得矢量 C 。

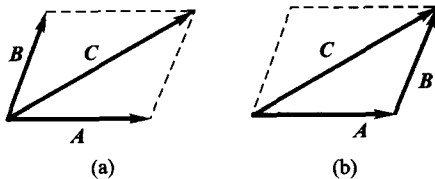


图 1.2 矢量加法

可见,矢量加法和矢量排列次序无关,即服从交换律

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (1.5)$$

矢量加法也服从结合律

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} + (\mathbf{C} + \mathbf{B}) + \mathbf{D} \quad (1.6)$$

矢量加法是几个矢量的合成问题,反之,一个矢量也可以分解为几个矢量。例如把矢量 \mathbf{A} 放在直角坐标系中,可以分解为 \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y 和 \mathbf{A}_z , \mathbf{A} 为这三个矢量之和,如图 1.3 所示。

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z \quad (1.7)$$

在直角坐标系中,三个轴方向上的单位矢量分别为 \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y 和 \mathbf{a}_z 。矢量 \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y 和 \mathbf{A}_z 的模分别为矢量 \mathbf{A} 在 x , y 和 z 轴方向上的投影,用 A_x , A_y 和 A_z 表示则

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

可见, \mathbf{A} 的模为

$$|\mathbf{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (1.8)$$

\mathbf{A} 的单位矢量 \mathbf{a} 为

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}} \\ &= \frac{A_x}{|\mathbf{A}|} \mathbf{a}_x + \frac{A_y}{|\mathbf{A}|} \mathbf{a}_y + \frac{A_z}{|\mathbf{A}|} \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (1.9)$$

由图 1.3 可知:

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{|\mathbf{A}|}, \cos \beta = \frac{A_y}{|\mathbf{A}|}, \cos \gamma = \frac{A_z}{|\mathbf{A}|} \quad (1.10)$$

其中 α , β 和 γ 分别为矢量 \mathbf{A} 的方向角,即矢量 \mathbf{A} 与三个坐标轴方向的夹角。 $\cos \alpha$, $\cos \beta$ 和 $\cos \gamma$ 称为矢量 \mathbf{A} 的方向余弦。

设有三个矢量 \mathbf{A} , \mathbf{B} 和 \mathbf{C} ,在直角坐标系中分别表示为:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{C} = C_x \mathbf{a}_x + C_y \mathbf{a}_y + C_z \mathbf{a}_z$$

则三个矢量相加为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} &= (A_x + B_x + C_x) \mathbf{a}_x + (A_y + B_y + C_y) \mathbf{a}_y \\ &\quad + (A_z + B_z + C_z) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (1.11)$$

在矢量的分解中应注意到分解的不惟一性。例如,同一个矢量在不同的坐标系中,分解的情况是不同的。

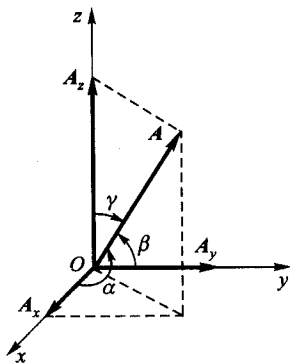


图 1.3 直角坐标系中的矢量

1.2.2 矢量减法

矢量减法可以视为矢量加法的特例,即:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (1.12)$$

通常 $(-\mathbf{B})$ 称为矢量 \mathbf{B} 的逆矢量,它的大小和矢量 \mathbf{B} 一样,但方向相反,如图1.4所示。由矢量加减法运算规则可知,如果三个矢量 \mathbf{A} , \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 头尾相连组成封闭三角形,其矢量和为零,如图1.5所示。

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 0 \quad (1.13)$$

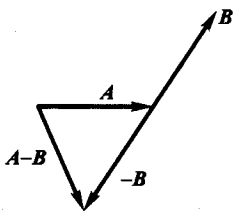


图 1.4 矢量减法

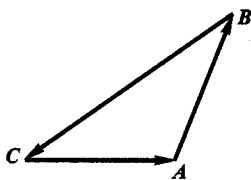


图 1.5 和矢量为零的几何表示

同理可推断,若多个矢量头尾相连组成封闭的多边形,其矢量和必为零。

1.2.3 标量和矢量的乘积

一个标量 k 和矢量 \mathbf{A} 相乘,得矢量 \mathbf{B} ,即:

$$\mathbf{B} = k\mathbf{A} = k|\mathbf{A}|\mathbf{a} \quad (1.14)$$

显然: \mathbf{B} 的大小等于 \mathbf{A} 大小的 $|k|$ 倍。若 $k > 0$, \mathbf{B} 与 \mathbf{A} 同方向;若 $k < 0$, \mathbf{B} 与 \mathbf{A} 反方向;若 $|k| > 1$, \mathbf{B} 的模比 \mathbf{A} 大, $|k| < 1$,则 \mathbf{B} 比 \mathbf{A} 小。应记住一个有用的事实, \mathbf{B} 平行于 \mathbf{A} ,方向相同或相反。

1.2.4 两矢量的标量积

两矢量的标量积亦称点积,定义为:一个矢量在另一个矢量方向上的投影与另一矢量模的乘积,结果是一个标量。可表示为:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta \quad (1.15)$$

式中 θ 为两矢量的夹角,如图1.6所示。

由式(1.15)可知, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,标量积变为零,因此,两非零矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的正交条件为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.16)$$

点积的基本性质服从:

$$\text{交换律} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.17)$$

$$\text{分配律} \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1.18)$$

在直角坐标系中, $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$ 和 \mathbf{a}_z 三个单位矢量互相正交, 根据标量积定义得:

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = 1, \quad \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = 1, \quad \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \quad (1.19a)$$

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = 0, \quad \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = 0, \quad \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0 \quad (1.19b)$$

于是两矢量的标量积可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.20)$$

说明两矢量的标量积等于其对应的分量的乘积之和。

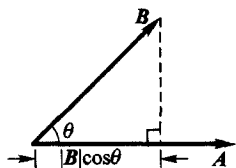


图 1.6 点积的图示

1.2.5 两矢量的矢量积

两矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的矢量积亦称叉积, 其结果仍是一个矢量, 用矢量 \mathbf{C} 表示, 矢量 \mathbf{C} 的大小为 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 组成的平行四边形的面积, 方向垂直于矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 构成的平面, 并且 \mathbf{A}, \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 三者符合右手螺旋法则, 其数学表达式为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \mathbf{a}_c \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (1.21)$$

式中 θ 为矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的夹角, 如图 1.7 所示。

由式(1.21)可以得到非零矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 平行的条件为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \quad (1.22)$$

根据式(1.21)的矢量积定义和右手螺旋法则可以看出

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (1.23)$$

说明矢量积不服从交换律, 但服从分配律, 即

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1.24)$$

显而易见, 矢量积不服从结合律, 即

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \quad (1.25)$$

式(1.25)的形式称为矢量三重积, 不等号左边三重积的矢量和矢量 \mathbf{A} 垂直, 并且位于矢量 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 构成的平面; 而右边三重积的矢量和矢量 \mathbf{C} 垂直, 且位于矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 构成的平面内, 可见左右两边的结果不一样, 式中括号不是可有可无的, 括号代表优先进行矢量运算的部分。

对于直角坐标系来说, 由矢量积定义可得到单位矢量之间的关系:

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x = 0, \quad \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y = 0, \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = 0 \quad (1.26a)$$

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x, \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y, \quad (1.26b)$$

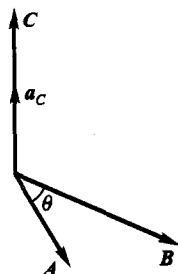


图 1.7 矢量积图示