中国科普名家名作

名家精品集萃

TUXINGHELUOJI DEGUSHI

图形和逻辑的故事

——张远南先生献给中学生的礼物

ZHANGYUANNAN ZHU

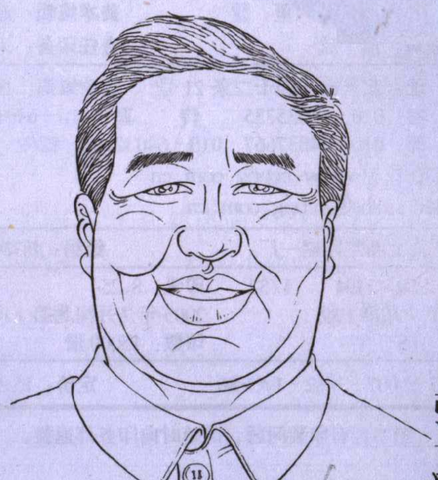
张远南◎著

中国少年儿童出版社

名家精品集萃

图形和逻辑的故事

——张远南先生献给中学生的礼物



张远南◎著

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

图形和逻辑的故事/张远南著．—北京：中国少年儿童出版社，2005.7
（中国科普名家名作系列．名家精品集萃）
ISBN 7-5007-7462-1

Ⅰ．图…　Ⅱ．张…　Ⅲ．数学-普及读物
Ⅳ．01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第030935号

TUXING HE LUOJI DE GUSHI

出版发行：中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社
出版人：海　飞
执行出版人：赵恒峰

丛书策划：薛晓哲　　**装帧设计：**颜　雷
责任编辑：许碧娟　董　慧　　**美术编辑：**颜　雷
责任校对：温　欣　　**责任印务：**宋世祁

社　址：北京市东四十二条21号　**邮政编码：**100708
总编室：010-64035735　**传　真：**010-64012262
发行部：010-84037667　010-64032266-8269
http：//www.ccppg.com.cn
E-mail：zbs@ccppg.com.cn

印刷：河北新华印刷一厂　**经销：**新华书店

开本：889×1194　1/32　**印张：**8.25
2005年7月第1版　2005年7月河北第1次印刷
字数：168千字　**印数：**15000册

ISBN 7-5007-7462-1/O·86　**定价：**15.00元

图书若有印装问题，请随时向印务部退换。

目　录

抽象中的形象——图形的故事

抽象中的形象

——图形的故事

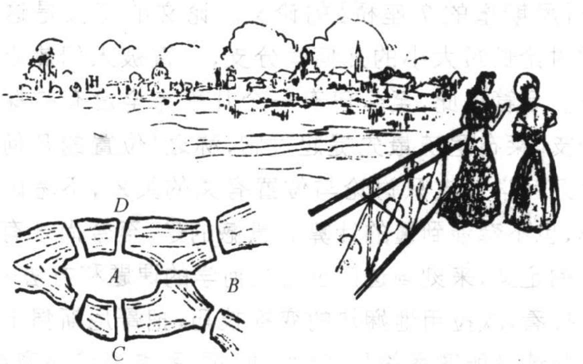
数学最本质的东西是抽象，抽象是人类创造性思维最基本的特征。在数学中，假如没有超脱元素的“具体”，便不会有集合论的诞生；没有形与数结合的解析几何，便没有微积分的发展；没有对“具体”的变换，便难以有抽象数学的产生……

然而，数学教学并不同于数学研究。数学教学要求把抽象的东西形象化，又通过直观的形象来深化抽象的内容。这种抽象中的形象，正是数学教学的真谛！

哥尼斯堡问题的来龙去脉

现今的加里宁格勒，旧称哥尼斯堡，是一座历史名城。在18、19世纪，那里是东普鲁士的首府，曾经诞生和培育出许多伟大的人物。著名的哲学家、古典唯心主义的创始人康德，终生没有离开过哥尼斯堡一步！20世纪最伟大的数学家之一——德国的希尔伯特，也出生于此地。

哥城景致迷人，碧波荡漾的普累格河，横贯其境。在河的中心有一座美丽的小岛。普河的两条支流，环绕其旁汇成大河，把全城分为下图所示的4个区域：岛区(A)、东区(B)、南区(C)和北区(D)。著名的哥尼斯堡大学，倚傍于两条支流的河旁，使这一秀色怡人的区域，又增添了



几分庄重的韵味！这里有7座桥横跨普累格河及其支流，其中5座把河岸和河心岛连接起来。这一别致的桥群，古往今来，吸引了众多的游人来此漫步！

早在18世纪以前，当地的居民便热衷于以下有趣的问题：能不能设计一条路线，使得它经过这7座桥且每座桥都只通过一次？这便是著名的哥尼斯堡七桥问题。

读者如果有兴趣，完全可以照样子画一张地图，亲自尝试一下。不过，要告诉大家的是：想把所有的可能线路都试一遍是极为困难的！因为各种可能情况不下5000种，要想一一试过，谈何容易！正因为如此，七桥问题的解答便众说纷纭：有人在屡遭失败之后，倾向于否定满足条件的解答的存在；另一些人则认为，巧妙的答案是存在的，只是人们尚未发现而已，这在人类智慧所未及的领域，是很常见的事！

问题的魔力，竟然吸引了天才的欧拉。这位年轻的瑞士数学家，独具慧眼，看出了这个似乎是趣味几何问题的潜在意义。

1736年，29岁的欧拉向彼得堡科学院递交了一份题为《哥尼斯堡的7座桥》的论文。论文的开头是这样写的："讨论长短大小的几何学分支，一直被人们热心地研究着。尽管如此，至今仍有一个几乎完全没有被探索过的分支，莱布尼茨最先提起过它，称之'位置的几何学'。这个几何学分支只讨论与位置有关的关系，不考虑长短大小，也不牵涉到量的计算。遗憾的是，至今尚未有令人满意的定义，来刻画这门位置几何学的课题和方法……"

接着，欧拉用他娴熟的变换技巧，把哥尼斯堡七桥问题变为读者所熟悉的"一笔画"问题：即能否笔不离纸，一

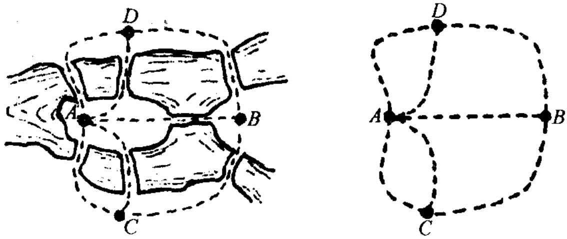


图 1－1

笔但又不重复地画完图 1－1?

读者不难发现:图中的点 A、B、C、D,相当于七桥问题中的 4 块区域;而图中的弧线,则相当于连接各区域的桥。我们还可以把此图简化为更标准的几何图形,如图 1－2。

聪明的欧拉,正是在上述基础上,经过悉心研究,确立了著名的"一笔画原理",从而成功地解决了哥尼斯堡七桥问题。不过,要弄清欧拉的特有思路,我们还得从"网络"的连通性讲起。

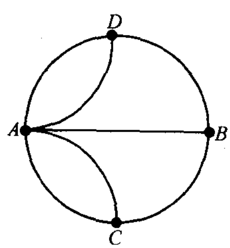
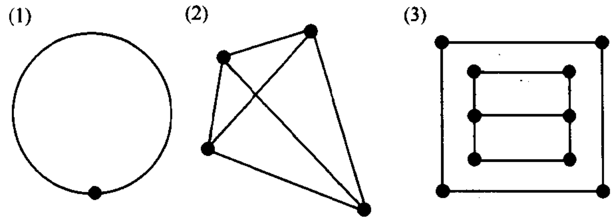


图 1－2

所谓网络,是指某些由点和线组成的图形,网络中的线弧都有两个端点,而且互不相交。如果一个网络中的任意两点,都可以找到网络中的某条弧线把它们连接起来,那么,这样的网络就称为连通的。连通的网络简称脉络。

显然,下页的 3 个图中,图(1)不是网络,因为它仅有的一条弧线只有一个端点;图(2)也不是网络,因为它中间的两条弧线相交,而交点却非顶点;图(3)虽是网络,但



不是连通的。而七桥问题的图形不仅是网络，而且是脉络！

网络的点如果有奇数条弧线交汇于它，这样的点称为奇点。反之，称为偶点。

欧拉注意到：对于一个可以“一笔画”画出的网络，首先必须是连通的。其次，对于网络中的某个点，如果不是起笔点或停笔点，那么它若有一条弧线进笔，则必有另一条弧线出笔（图 1－3）。也就是说，交汇于此点的弧线必定成双成对，即这样的点必定是偶点！

上述分析表明：网络中的奇点，只能作为起笔点或停笔点。然而，一个可以一笔画画成的图形，其起笔点与停笔点的个数，要么为 0，要么为 2。于是，欧拉得出了以下著名的“一笔画原理”：

“能一笔画画成的网络必须是连通的，而且奇点个数或为 0，或为 2。当奇点个数为 0 时，全部弧线可以排成闭

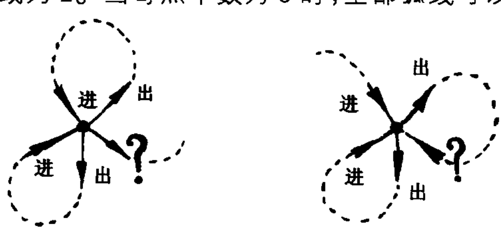


图 1－3

路。"

现在读者看到，七桥问题的奇点个数为 4(图 1－4)。因而，要找到一条经过 7 座桥，且每座桥都只走一次的路线是不可能的！

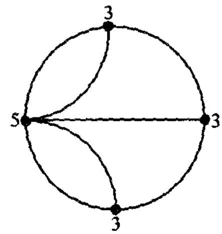
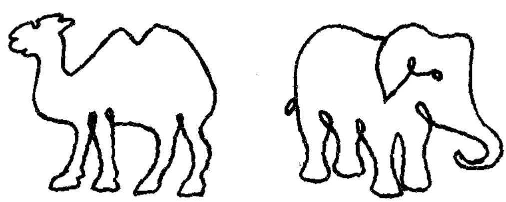


图 1－4

想不到轰动一时的哥尼斯堡七桥问题，竟然与孩子们玩的一笔画出"串"字和"田"字游戏一样！请注意，后者并不比前者简单！

下图画的两个动物世界中的庞然大物，都可以用一笔画完成。它们的奇点个数分别为 0 和 2。



需要顺便提到的是：既然可由一笔画画成的脉络，其奇点个数应不多于两个，那么，两笔画或多笔画能画成的脉络，其奇点个数又有怎样的限制呢？我想，聪明的读者完全能自行回答这个问题，倒是反过来的提问需要认真思考一番：一个奇点个数为 0 或 2 的连通网络，能否用一笔画画成？要告诉读者的是：结论是肯定的！一般地，我们有：含有 $2n(n>0)$ 个奇点的脉络，需要 n 笔画画成。

迷宫之“谜”

唐朝贞观年间，国势强盛，四海升平。

公元641年（贞观十四年），吐蕃国国王松赞干布，派使臣到长安向唐太宗请求联姻。唐太宗认为汉藏联姻对睦邻边疆是件好事，心里十分乐意，但他又想考考辅佐藏王的使臣的智慧，便出了几道难题要求使者回答。没想到使者对答如流，太宗十分满意，决定最后再考考使者。

当天晚上，唐太宗在宫中宴请使者，宴后突然提出让使者自行出宫。而此时此刻的皇宫已经过特殊布置，四处道路扑朔迷离！太宗想看一看，藏王的使臣在醉酒的情况下，是否仍能机智地摆脱困境。

不料使者聪明过人，他进宫的时候，早已留心观察四周环境，做下记号。结果没费多大周折，就顺利步出宫门！

吐蕃的使者终于以自己的才智，赢得了太宗的信赖，促成了汉藏联姻这件大事，为我国民族团结的史诗，增添了可歌的一章。

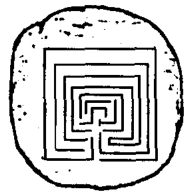
上面这则故事中，太宗的最后一道题，实际上是一种迷宫。古往今来，迷宫为很多人所青睐，并把善走迷宫视为聪明和智慧的象征！

在《三国演义》中有这样一则故事，大意是：东吴大将

陆逊被诸葛亮用八卦阵困于江边，但见怪石嵯峨，横沙立土，重叠如山，无路可出。写得实在神乎其神，想来也不过是一种用巨石垒成的迷宫罢了。

(1)

(2)



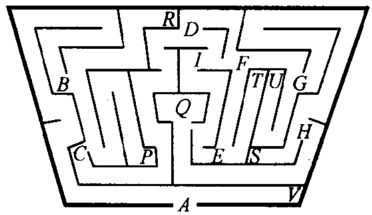
(3)

(4)

国外的迷宫更是常见。上图(1)，宛如人的指纹，是南非出土的祖鲁族人的迷宫；图(2)是希腊克里特岛出土的货币，币上的迷宫清晰可辨！图(3)是意大利出土的酒瓶迷宫，图案古朴优美，别有一番情趣；图(4)是在庞贝城遗址发现的。庞贝城曾是古罗马相当繁荣的一座城市，约建于公元前7世纪。公元79年8月，邻近的维苏威火山爆发，全城惨遭湮没。自18世纪中叶起，考古学家开始断断续续地发掘庞贝遗迹，使火山灰下的庞贝城，得以重见天日！

下面(下页上图)是英国伦敦的汉伯顿迷阵实图。

图中 A 为进出口，黑线表示篱笆，白的空隙表示通路。迷阵的中央 Q 处有两根高柱，柱下备有椅子，可供游人休息。读者可别以为这一迷阵并不复杂，倘若身临其



境，也难免要东西碰壁，左右受阻，陷入迷津！

那么，迷宫之“谜”的谜底何在呢？让我们仍以汉伯顿迷阵为例。如同上节中七桥问题那样，我们把该迷阵中所有的通路都用弧线表示，便得到图 1－5 那样的脉络。

现在的问题是：如何从 A 点出发走到迷宫的中心 Q，或从 Q 点回到入口处 A？只是，迷宫里从 A 到 Q 的通路，并不像图 1－5 那么笔直，而是弯弯曲曲、回回转转的，稍不小心便会进入死胡同，只好走回头路！

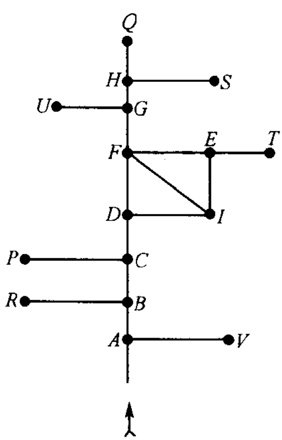


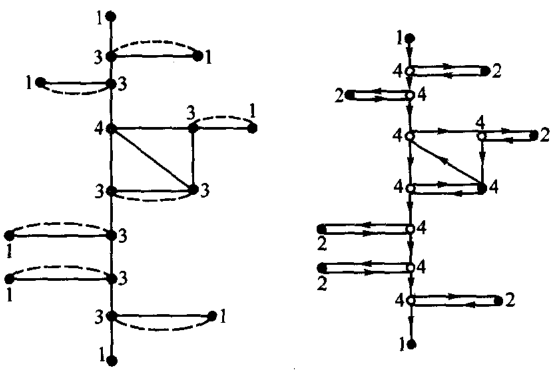
图 1－5

不过，有一种情况似乎例外，即迷宫的网络可以由“一笔画”沟通。这时只要不走重复的路，就一定能顺利走出迷宫！这无疑等于解决了迷宫问题。然而，倘若迷宫真是如同上述那样，其本身也就失去了“迷”的含义。

现实中的迷宫往往要复杂很多。以汉伯顿迷阵为例，它的脉络中除 F 点外，几乎全是奇点。因此，不要说一笔画，即

使五六笔画也难以沟通整个脉络！

然而，我们并没有因此而“山穷水尽”。因为任何一个脉络都可以通过在奇点间添加弧线的办法，变成“一笔画”的图形。这是由于在奇点间添加一条弧线，可以使脉络的奇点个数减少两个！



上图是把汉伯顿迷阵脉络的奇点两两连接起来，所得新脉络的奇点已经只剩两个，因而可以用一笔画画出。

上述方法表明：要想走出迷宫，只须在岔道口做上记号，并对某些线路作必要的重复。这样，纵然我们多走了些路，却能稳当地走出迷宫！那个聪明的吐蕃使者，当初大概就是这样做的！

最后我们还须补充一点：网络的奇点必定成双。这是图论中最早的一个定理，也是由欧拉发现的。

证明很简单：我们可以设想如图 1－6 那样，拆去原来网络中的某条弧线。这样一来，要么奇点增加两个，偶点减少两个；要么偶点增加两个，奇点减少两个；要么奇偶点不增也不减，除此之外再无第四种可能。上述所有情形，网络奇点数目的奇偶性都不会改变。如此这般，我