精品课堂

张友贵 杜祖缔 施光燕◎编著

掌握高等数学

（理工·经济类）

本科教学同步辅导 考研复习综合训练

- 内容精讲及例题解析
- 考研真题分类解析
- 教学同步检测

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

高等学校数学学习辅导教材

掌握高等数学

·精品课堂·

（理工·经济类）

张友贵　杜祖缔　施光燕　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

掌握高等数学/张友贵,杜祖缔,施光燕编著.—大连:大连理工大学出版社,2004.11
ISBN 7-5611-2647-6

Ⅰ.掌… Ⅱ.①张… ②杜… ③施… Ⅲ.高等数学 高等学校—自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 010432 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84707961
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:22.25 字数:773 千字
印数:1 ~6 000
2004 年 11 月第 1 版 2004 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑:王 纪 责任校对:杨 莉
封面设计:孙宝福

定价:29.80 元

前言

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

高等数学是高等院校非理科各专业十分重要的公共基础课，它既提供学习专业所必需的数学工具，又训练学生的抽象思维、逻辑推理以及解决问题的能力，且可通过对精确、简练、对称等美的享受来提高学生的文化素质。高等数学又是硕士研究生入学考试必考的，且占分数比例很大的课程。因此，掌握好高等数学是广大一年级的本科生和备考硕士生的心声。本书就是为适应这种需要，集编者几十年的教学经验而奉献给读者的一本学习辅导书。

本书的内容涵盖了高等数学的教学大纲和硕士生入学考试的考试大纲。全书按内容共分八部分，每部分均以内容精讲及例题解析、考研真题分类解析和教学同步检测三大块表述。

本书有如下特点：

1. 重点突出且又简练地归纳出各部分的主要内容，以便读者能提纲挈领地掌握相应的全部知识要点。

2. 选题典型，紧扣大纲要求，解析颇具启发性，有利于帮助读者进一步理解、掌握课程基本内容及各部分的常用技巧。

3. 考研真题分类合理，按解题方法将全部考研题进行分类，前有“思路”，启发读者深入分析解题方法，后有“评注”，进一步总结和综述解题方法。

4. 教学同步检测内容非常丰满，其中涵盖所有可能碰到的题型，可满足各类读者对掌握该部分内容所需进行训练的需求，其题解或提示详略恰当。

5. 资料齐全，本书收集了硕士研究生考试自1987年至2004年的理工与经济类全部考题，并附有试题解析索引表，以便读者能掌握全部信息所给予的启示。

本书承蒙大连理工大学王文贤、于远许教授认真审阅，并提出了许多宝贵意见，在此向他们表示最诚挚的感谢。

由于水平有限，疏漏之处望请同仁和读者指正。

编著者

2004年9月于大连

目　录

模拟试卷

模拟试卷参考答案与提示

附录

第一章　函数、极限、连续

人们了解自然、研究事物总是通过量与量之间的关系去进行的，量与量之间一种重要的关系就是函数关系. 高等数学研究的对象就是函数，研究的方法就是极限方法，本门课程自始至终就是用极限去讨论函数的各种性质与相关的问题. 本章的内容包括什么是函数，不按教学顺序而集中地总结极限的概念和求极限的方法，以及函数的连续性等.

一 内容精讲及例题解析

第1.1节　函数的定义与符号

1. 函数的定义

若变量 x、y 之间存在着确定的对应关系，即当 x 的值给定时，y 的值随之也就被确定，则称 y 是 x 的函数，记为 $y = f(x)$.

确定函数有两个要素：函数的定义域和对应关系.

例如：$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ 和符号函数 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$，这不能说 $f(x)$ 和 $\operatorname{sgn}(x)$ 是相同的，因它们的定义域不同.

2. 函数记号

一旦在问题中设定函数 $y = f(x)$，这里记号"f"就是表示确定的对应规则，$f(3)$ 就是表示，按这对应规则 $x = 3$ 所对应的函数值 y，等等.

【例1.1】 设 $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \leqslant 0 \\ 1 + x^2 - x, & x > 0 \end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

思路　首先可视复合函数 $f[f(x)]$ 是以变量 $f(x)$ 代函数 $f(x)$ 中变量 x 而成，然后再处理剩下的 $f(x)$.

解　$f[f(x)] = \begin{cases} 1 + f^2(x), & f(x) \leqslant 0 \\ 1 + f^2(x) - f(x), & f(x) > 0 \end{cases}$

由于当 $x \leqslant 0$ 时，$f(x) = 1 + x^2 > 0$，而在 $x > 0$ 时，由于 $1 + x^2 \geqslant 2x > x$，有

$f(x) = 1 + x^2 - x > 0$

故对任何 x 必有 $f(x) > 0$,于是

$$f[f(x)] = 1 + f^2(x) - f(x), \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$f[f(x)] = \begin{cases} 1 + (1+x^2)^2 - (1+x^2), & x \leqslant 0 \\ 1 + (1+x^2-x)^2 - (1+x^2-x), & x > 0 \end{cases}$$

3. 初等函数

称幂函数 x^k(k 为常数)、指数函数 a^x、对数函数 $\log_a x$($a > 0, a \neq 1$ 的常数)、三角函数及反三角函数为基本初等函数.凡由基本初等函数经有限次加、减、乘、除及有限次复合且能用一个式子表达的函数,称为初等函数.

第 1.2 节　极限的概念与运算法则

1. 极限的直观定义

当一个变量 $f(x)$ 在 $x \to a$ 的变化过程中的变化趋势是,无限地接近于一个常数 b,则称变量 $f(x)$ 在 $x \to a$ 的过程中极限存在,称常数 b 为它的极限,记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

否则,就称极限不存在.

在极限不存在的情形中,若 $f(x)$ 在 $x \to a$ 的过程中,其值是无限增大,则要求写成

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

相应地,有 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ 和 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$(即 $f(x)$ 的绝对值无限增大)的情形.

在定义中要注意的是:$x \to a$ 的变化过程是指 x 按任何方式向 a 靠拢且在靠拢的过程中始终 $x \neq a$.

2. 极限的精确定义

若对 $\forall\, \varepsilon > 0$,总存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,有

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

成立,则称在 $x \to a$ 的过程中,$f(x)$ 以 b 为极限,记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

极限的精确定义对工科本科生而言,仅需能听懂即可.

3. 极限的运算法则

若 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ 均存在,则

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\text{(此时，再加条件}\lim_{x\to a}g(x)\neq 0\text{)}$$

在运用极限的运算法则时，其前提(即各极限分别存在)是不能忽略的.

4. 极限的性质

1° 惟一性　若极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在，则极限是惟一的.

2° 有界性　若极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在，则一定存在a的去心领域，即存在$\delta>0$，使在$0<|x-a|<\delta$内$f(x)$是有界的.

3° 保号性　设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$，若$b>0$，则$f(x)$变到后来必有$f(x)>0$，即必存在$\delta>0$，使在$0<|x-a|<\delta$内，$f(x)>0$；若$b<0$，则变至后来必有$f(x)<0$.

第 1.3 节　求极限方法小结

1. 利用定义

【例 1.2】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$.

解　由于$x\to 0$，$x\neq 0$，所以在变化过程中$\frac{1}{x}$始终有定义的，由定义显然在$x\to 0$的过程中$\left|\frac{1}{x}\right|$在无限增大，且$\frac{1}{x}$的符号不定，故应回答∞.

【例 1.3】(873402)　$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$不存在

解　因当$x\to 0^+$即从0的右边向0靠拢，即$\frac{1}{x}\to+\infty$，于是$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$；而当$x\to 0^-$时，$\frac{1}{x}\to-\infty$，从而$e^{\frac{1}{x}}\to 0$，因而应回答不存在.

2. 利用极限运算法则

【例 1.4】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3n-4n^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-4=-4$

【例 1.5】 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1-x}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(1-x)}{\lim\limits_{x\to -1}x^2}=\frac{2}{1}=2$

3. 利用函数的连续性

由函数在点x_0处连续的定义，若已知$f(x)$在$x=a$处连续，则必有$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，而又已知初等函数在定义区间上是连续的，因此求极限

$$\lim_{x\to a}f(x)$$

时，若$f(x)$是初等函数又判断出a是在$f(x)$的定义区间上，则

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

即只要将 a 代入 $f(x)$ 中计算 $f(a)$.

【例 1.6】 计算$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{e^x - \sin(1 + x^2)}{x\ln(1 + x)}$

解 因为
$$f(x) = \frac{e^x - \sin(1 + x^2)}{x\ln(1 + x)}$$
为初等函数，将 $x = 3$ 代入得
$$f(3) = \frac{e^3 - \sin 10}{3\ln 4}$$
所以
$$\lim_{x \to 3} \frac{e^x - \sin(1 + x^2)}{x\ln(1 + x)} = \frac{e^3 - \sin 10}{4\ln 4}$$

拿到一个求极限问题首先用最简单的方法做起，即前三种做法. 当遇到分子、分母的极限均为 0 时$\left(\text{简记为}\dfrac{0}{0}\right)$，以及类似地$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0 \cdot \infty$，$\infty - \infty$，$1^{\infty}$，$0^0$，$\infty^0$ 这七种情况时，上面的方法就失效，故称上述七种情况为未定式，除上述七种情况外，其他情况的极限均可利用上述三种情况加以确定. 例如
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^x$$
易见底数的极限为 0，指数的极限为 $+\infty$，用以上的记号即为 $0^{+\infty}$ 型，这不属于那七种未定式，即这是极限立即可以确定的. 因底数趋于 0，则变至后来其绝对值必小于 1，而指数趋于 $+\infty$，即自乘项数无限增加，由极限定义直观判断就知 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{1 + x^2}\right)^x = 0$.

下面归纳地介绍前述七种未定式极限的处理办法，以及其他求极限的方法.

4. 变形

即在所论变化过程中，把 $f(x)$ 作等价变形以消除不定性，通常采用消公因子，分子、分母同乘、除一因子，分子(分母)有理化等手段.

【例 1.7】 计算$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^2 + 4n - 5}{n^2 - 6n}$.

解 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^2 + 4n - 5}{n^2 - 6n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3 + \dfrac{4}{n} - \dfrac{5}{n^2}}{1 - \dfrac{6}{n}} = 3$

【例 1.8】 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 3) = 5$

【例 1.9】 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n + 1}\left(\sqrt{2n + 4} - \sqrt{2n - 8}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{2n+4}-\sqrt{2n-8}\right)\left(\sqrt{2n+4}+\sqrt{2n-8}\right)}{\sqrt{2n+4}+\sqrt{2n-8}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{12\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n+4}+\sqrt{2n-8}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{12\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{4}{n}}+\sqrt{2-\frac{8}{n}}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

5. 利用两个重要极限公式

两个重要极限公式：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\right)$$

当遇到所求极限中 $f(x)$ 的形式与它们接近时，就可考虑利用这两个公式.

【例 1.10】 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin x}$.

解
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos 2x}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}{\frac{\sin x}{x}} = 2$$

【例 1.11】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x$.

解
$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{(-2x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

【例 1.12】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x-\frac{1}{2}}$.

解法 1
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{x-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{2x-1}{2}}\right]^{\frac{2x-1}{2}\frac{2}{2x-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \mathrm{e}$$

解法 2
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^{x-\frac{1}{2}}}{(2x-1)^{x-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x-\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x-\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{(-2x)\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}} = \mathrm{e}$$

6. 运用洛必达法则

这是不定式求极限最重要的方法，读者必须熟练掌握.

洛必达法则　设 $f(x),g(x)$ 可导，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$（或 ∞），若

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=b(\text{或 }\infty)$$

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=b(\text{或 }\infty)$$

这里要注意的：一是分子 $f(x)$ 和分母 $g(x)$ 分别求导数，而不是求 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的导数；二是当 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限不存在时（不包括极限为 ∞ 的情形），而 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限未必不存在，只能说这时洛必达法则失效；三是洛必达法则只能在 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$ 的未定式时运用，当是其他五种未定式时，一定要转化为 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$ 时再运用，如 $0\cdot\infty$ 可改写成分式的形式，$\infty-\infty$ 可先通分，三种指数未定式可用先取对数的办法.

【1.13】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos 2x}$.

思路　先用简单方法得知这是 $\frac{0}{0}$ 的未定式，于是就运用洛必达法则.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{2\sin 2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}e^{x^2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}$

【例 1.14】　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

思路　这是属于 $\infty-\infty$ 型未定式，先通分化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式.

解

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\quad\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$

【例 1.15】　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

分析　这是一个数列的极限，且是 ∞^0 型未定式，由于洛必达法则是求未定式极限最主要的方法，于是也想用洛必达法则来求此极限，为此首先应变成是连续变量的函数，对于此例当然想到考虑函数 $x^{\frac{1}{x}}$ 和考虑极限

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}\qquad(*)$$

读者首先要能清楚地了解原来所求的数列极限和函数极限（*）之间的关系：若函数极限（*）存在，则原数列极限与之相等；若函数极限（*）不存在，则原数列极限

未必不存在，这是因为 $x\to+\infty$ 是任何方式，按正整数趋于 ∞ 只是其中一个特定的方式.

解
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} \qquad (\infty^0\text{ 型})$$

先求其对数的极限：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^0=1$$

7. 等价无穷小(大)的替换

这个技巧不是主要的，但若能配合运用这个技巧，有时可简化求极限的运算.

无穷小的定义　若在 $x\to a$ 时，$f(x)$ 以零(无穷大)为极限，则称在 $x\to a$ 的过程中 $f(x)$ 为无穷小(大)量.

例如在 $x\to 0$ 时，$x^k(k>0)$，$\sin x$，$1-\cos x$，$\tan x$，e^x-1，$\ln(1+x)$ 都是无穷小量.

无穷小量的比较　若在 $x\to a$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 均是无穷小量，即它们都是趋向于零，但有时我们要比较其趋于零的速度，于是定义如下：

若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b(\neq 0)$，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是同阶无穷小，记为 $f(x)=O(g(x))$.

若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的高阶无穷小，记为 $f(x)=o(g(x))$.

若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是等价无穷小，记为 $f(x)\sim g(x)$.

对于下面常用的等价无穷小关系，读者应作为常识而记住. 在 $x\to 0$ 时

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x),\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$$

在求极限时，若 $f(x)$ 中有一因子为无穷小量，则直接可以将其换成与之等价的无穷小量.

相应地，也有无穷大量的比较的概念.

【例 1.16】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1-x)(e^{3x}-1)}{(1-\cos x)\sin 2x}$.

思路　本题易见为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，当然可用洛必达法则，但在分子、分母分别求导时，形式较繁. 若运用等价无穷小替换技巧，所求函数中因子 $(1-\cos x)$、

$\sin 2x$、$\ln(1-x)$、$e^{3x}-1$ 都是无穷小量，且我们都应知道与其等价的无穷小：

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},\quad \sin 2x \sim 2x$$

$$\ln(1-x) \sim (-x),\quad e^{3x}-1 \sim 3x$$

于是立即可分别替换之.

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1-x)(e^{3x}-1)}{(1-\cos x)\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(-x)(3x)}{\frac{x^2}{2}2x}=-3$$

评注　在作等价无穷小(大)替换时，只能作因子的替换，即该部分与函数中的其他部分是乘、除关系时才能替换，而加、减项不能作替换.

【例 1.17】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

分析　i) 由于是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，所以可直接运用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

仍是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式. 继续使用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

ii) 若对分子中后一项“$\sin x$”采用等价无穷小替换：$\sin x \sim x$(在 $x\to 0$ 时)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

由 i) 和 ii) 得到了两个不同的结果，这是不可能的！第一种方法显然没有错误，而第二种方法是错误的，即在加、减项中不能作等价无穷小替换.

【例 1.18】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\cos x}}$.

分析　由于是 $\dfrac{0}{0}$ 型，所以用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\frac{1}{x}-x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\frac{1}{2}}x}}\qquad\left(1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\right)$$

这是分母极限为$\frac{1}{\sqrt{2}}$，分子中第一项极限为0，第二项极限不存在，因此整个式子极限不存在，根据洛必达法则，分子、分母分别求导以后的极限不存在，不能说原来的极限也不存在，因此要重新寻找方法求原来的极限.

解　因为$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\frac{x}{\sqrt{2}}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{2}\,x\cos\frac{1}{x}=0$$

8. 运用泰勒公式

在微分学中知道，若$f(x)$ n次可导，则有泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

加上余项$o((x-x_0)^n)$之后，它们之间是严格相等，因此在任何情形下，可以把$f(x)$换成右边的多项式加余项，而且$e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x)$在$x=0$点的泰勒公式也是应该作为常识而记住的，因此在求极限时，当你认为把其中的函数改写成多项式为有利时就应想到运用泰勒公式.

【例 1.19】　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}$.

分析　此题是$\frac{0}{0}$型，当然可直接用洛必达法则，且要用不止一次. 注意到本题是$x\to 0$，此时若是有理分式，则只要看x的指数最小的项即可(因$x\to 0$时x的指数愈大就愈小). 本题中只要能把$\sin x,\ln(1+x)$改写为多项式，则整个函数就成为有理分式，于是就想到泰勒公式. 对此，大家应能背出：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),\quad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

分别代入就可求得极限.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x+\frac{x^2}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{1}{2}$$

9. 夹逼定理

若在 a 的邻域内有关系

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$(或 $\pm\infty$),则

$$\lim_{x\to a} f(x) = b(\text{或} \pm \infty)$$

【例 1.20】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$.

分析 该题不能应用极限的运算法则,因为其加项的项数是在变化的;而所论和式又无法写出其和的简单表达式.但是,可发现若简化以后可写出和式,于是想到运用夹逼定理.

解
$$\frac{n+1}{(2n)^2} = \underbrace{\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}}_{n+1\text{项}}$$
$$< \frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$$
$$\leqslant \underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}_{1+n\text{项}} = \frac{1+n}{n^2}$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(2n)^2} = 0$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right) = 0$$

【例 1.21】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

分析 此题也不能应用极限运算法则,因其因子数目也在不断变化.但也不像前一例那样能用夹逼定理,而只能设法把其形式简化.注意到其中因子

$$\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

于是整个乘积可以写成简单的形式,从而求得极限.

解
$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\,\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\,\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$
$$= \frac{1\cdot(n+1)}{2n}$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

10. 化为定积分

由定积分的定义