

高等教育工科数学系列教材

微 积 分 (上)

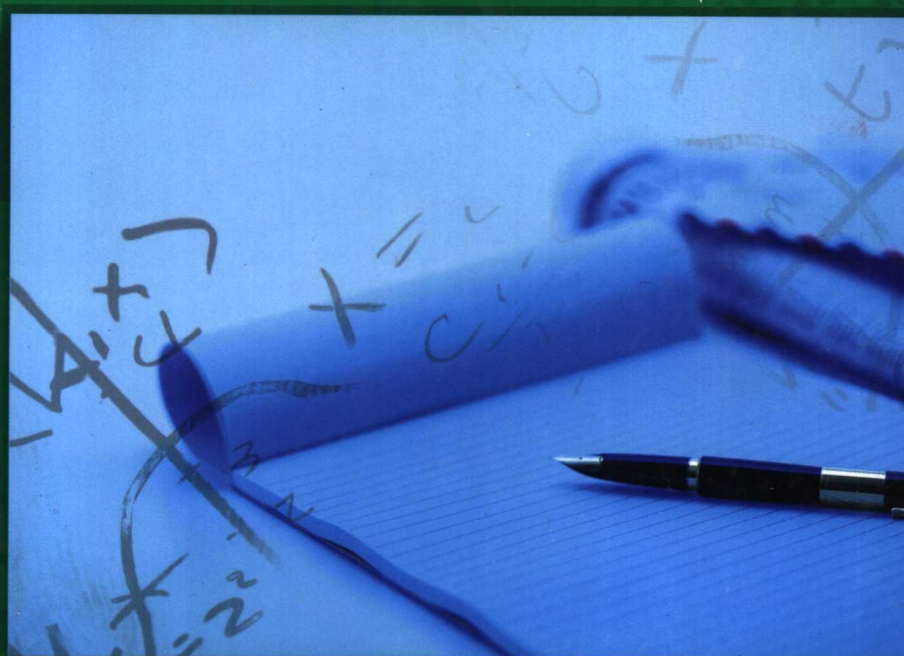
魏贵民

龚 灏

胡 灿

魏友华

编 著



WEIJIFEN



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等教育工科数学系列教材

微 积 分

(上)

魏贵民 龚 灏 编著
胡 灿 魏友华

高等教育出版社

内容提要

《微积分》是高等教育工科数学系列教材之一,分上、下两册,全书共八篇.上册内容为:第一篇(一元函数微分法)、第二篇(一元函数积分法)和第三篇(空间解析几何).主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、一元函数微分法的应用、定积分与不定积分、一元函数积分法的应用、广义积分、向量代数、平面与直线和常见的二次曲面与常见的空间曲线等九章.每节配有习题,每章配有补充题,书末附有习题参考解答.

本书注重整体取材优化,使学生在致力于学好经典内容的同时学习领会现代数学的思想方法,内容有一定深度却又简明易懂,颇具改革新意.本书论述清晰、例题典型,具有很强的科学性和教学适用性,可作为非数学类专业微积分课程的教材或参考书,也可供工程技术人员和报考研究生的读者自学参考.

图书在版编目(CIP)数据

微积分.上/魏贵民等编著.一北京:高等教育出版社,2004.6

ISBN 7-04-014247-3

I. 微… II. 魏… III. 微积分—高等学校—教材
IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 056521 号

责任编辑 孙鸣雷 特约编辑 周 滔

封面设计 吴 昊 责任印制 蔡敏燕

书 名 微积分(上)

编 著 魏贵民 龚 灏 胡 灿 魏友华

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码 100011

总 机 010-82028899

传 真 021-56965341

购书热线 010-64054588

021-56964871

免费咨询 800-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

<http://www.hepsh.com>

排 版 南京理工排版校对公司

印 刷 江苏如皋市印刷有限公司

开 本 787×960 1/16

印 张 16.75

字 数 312 000

版 次 2004 年 6 月第 1 版

印 次 2004 年 6 月第 1 次

定 价 21.00 元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

《微积分》是高等教育工科数学系列教材之一,分上、下两册,全书共八篇.上册内容为第一篇(一元函数微分法)、第二篇(一元函数积分法)、第三篇(空间解析几何).主要包括函数、极限、连续、导数与微分、一元函数微分法的应用、定积分与不定积分、一元函数积分法应用、广义积分、向量代数、平面与直线、常见的二次曲面与常见的空间曲线,共九章.每节配有习题,每章配有补充题,书末附有习题参考解答.本书主要特色体现在以下几方面.

一、注重教学内容的整体优化,选择合理的教学内容与体系结构

本书的编写吸收了国内外众多优秀教材的长处,结合编者数十年的教学实践和数学教学改革的经验,在保证教学内容的完整性与科学性的前提下,本书对传统的高等数学教材的教学内容与体系结构进行合理地调整,使概念之间的内在联系更加清晰,更加紧密,更加自然.例如,在一元函数积分学的处理上,教材打破了传统教材先介绍不定积分再介绍定积分的次序,在利用牛顿-莱布尼兹定理计算定积分时引出了原函数,从而引出了不定积分.如此处理,完全符合微积分产生和发展的原始过程.在多元函数积分学的处理上,教材把二重积分、三重积分、第一类曲线积分和第一类曲面积分归结为 Riemann 积分;把第二类曲线积分和第二类曲面积分归结为向量值函数积分.如此处理,使学生对多元函数积分学理解得更深刻,与实际结合得更紧密.

二、从实际问题出发,引入数学概念和理论

本书在介绍数学概念和理论时,适当地引入实际问题,让学生体会到微积分是来源于实践,又能指导实践的一种思维创造.在教材中,我们尽量从不同角度给出实际例子并加入简单的数学模型,让学生初步体会到微积分与现实世界中的客观现象有着密切联系.在习题中我们也适当加大应用问题的比例,以便学生在实际生活中能尝试利用所学的微积分知识来分析和解决一些简单的实际问题.

三、注重教学实际需要,尊重易教易学的原则

本书注重整体取材优化,使学生致力于学好经典内容的同时学习领会现代数学的思想方法.本书体现了易教易学的特点,每一章节的安排符合教学规律,注意消化教学难点,努力用最简捷的途径系统讲授工科大学学生所需要的数学知识.教材的编写注意科学性、趣味性、实用性,切实地为教学第一线服务.

四、选择适当的教学定位

本书适应高等教育从精英教育向大众化教育过渡的需要,主要针对一般工

科院校的教学实际,选择适当的例题、习题和恰当的教学内容,做到重视教学思想方法、淡化运算技巧.

本系列教材由成都理工大学魏贵民教授任主编,胡灿、魏友华任副主编.

《微积分(上)》由魏贵民、龚灏、胡灿、魏友华执笔编写,郭科教授主审,陈国东、刘锐参加了审稿工作,他们为本书提出了重要的修改意见.

虽然我们努力使本书成为一本具有改革新意又便于教学的教材,但由于编者水平所限,书中的不足与考虑不周之处肯定很多,错误也在所难免,我们希望得到专家、同行和读者的批评指正,使本书在教学实践中不断完善起来.

编 者

2004年6月

目 录

第一篇 一元函数微分法

第一章 函数 极限 连续	1
第一节 实数集	1
第二节 函数	2
第三节 数列的极限	15
第四节 函数的极限	19
第五节 极限的性质与四则运算法则	23
第六节 极限存在准则 两个重要极限	26
第七节 无穷小量与无穷大量	31
第八节 函数的连续性	38
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	41
第十节 闭区间上连续函数的性质	44
第二章 导数与微分	48
第一节 导数概念	48
第二节 初等函数的导数	55
第三节 高阶导数	65
第四节 隐函数及参量函数微分法	68
第五节 函数的微分	74
第三章 一元函数微分法的应用	81
第一节 中值定理	81
第二节 L'Hospital 法则	86
第三节 Taylor 公式	90
第四节 函数的单调性	94
第五节 函数的极值	98
第六节 曲线的凹凸与拐点	102
第七节 渐近线	105
第八节 函数图形的描绘	107
第九节 曲率	110

第十节 方程的近似解·····	114
-----------------	-----

第二篇 一元函数积分法

第四章 定积分与不定积分·····	120
第一节 定积分·····	120
第二节 不定积分·····	134
第三节 换元积分法·····	139
第四节 分部积分法·····	153
第五节 几种特殊类型函数的积分·····	159
第五章 一元函数积分法的应用·····	169
第一节 微元分析法·····	169
第二节 平面图形的面积·····	170
第三节 体积·····	174
第四节 平面曲线的弧长·····	178
第五节 旋转体的侧面积·····	181
第六节 定积分在物理学上的应用·····	183
第七节 函数的平均值·····	186
第六章 广义积分·····	189
第一节 无穷限的广义积分·····	189
第二节 无界函数的广义积分·····	191

第三篇 空间解析几何

第七章 向量代数·····	193
第一节 空间直角坐标系·····	193
第二节 向量的概念·····	195
第三节 向量的加法与数量乘法·····	198
第四节 向量的内积与外积·····	201
第八章 平面与直线·····	207
第一节 曲面方程与曲线方程·····	207
第二节 平面方程·····	208
第三节 直线方程·····	213
第九章 常见的二次曲面与常见的空间曲线·····	220
第一节 一些空间曲面·····	220

第二节 几种常见的二次曲面.....	224
第三节 几种常见的空间曲线.....	228
习题参考解答.....	232
索引.....	252
参考文献.....	257

第一篇 一元函数微分法

高等数学是自然科学与社会科学的基础,是高等学校理工科各专业学生的一门必修的重要基础理论课,它是为培养我国社会主义现代化建设所需要的高质量专门人才服务的.

本篇介绍一元函数微分法.这是微积分学的第一个主要内容.

第一章 函数 极限 连续

微分法与积分法的运算对象是函数,主要是连续函数,而运算的理论基础是极限.关于函数、极限与连续的概念,我们从直观上容易理解,它们的概念和许多性质在中学数学中已经介绍.作为学习本课程的准备工作,有必要首先对函数、极限、连续的内容择其要者加以陈述和深化.

第一节 实 数 集

集合是数学中一个原始的概念.读者在中学已经学习了关于集合的许多内容,如:集合、元素、子集、并集、交集、补集、空集 $\emptyset$ 、集合的表示方法,等等,这里不再重述这些内容.

常用的数集如下:

复数集 $\mathbf{C}$;

实数集 $\mathbf{R}$;

有理数集 $\mathbf{Q}$;

整数集 $\mathbf{Z}$;

自然数集 $\mathbf{N}$;

正整数集 $\mathbf{N}^+$;

正实数集 $\mathbf{R}^+$.

微积分学特别关注实数集 $\mathbf{R}$ 及其一些特殊的子集.例如:

开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$;

半开区间 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$,

$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$,

其中, a 和 b 是实数, 且 $a < b$. 以上的 3 个数集都叫做有限区间或者区间, a 和 b 叫做区间的端点, 数 $b-a$ 叫做区间的长度.

引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可类似地表示无限区间, 例如:

$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$;

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$;

$\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$

等等.

以后在不必辨明所论区间是否包含其端点, 以及是否是有限区间还是无限区间的场合, 我们就简单地称它为区间, 且常用 I 表示.

实数集与实数轴上的点是一一对应的. 因此, 实数 a 也可以叫做数轴上的点 a . 设正数 δ , 开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 叫做点 a 的 δ 邻域, 记为 $O(a, \delta)$, 点 a 叫做邻域的中心, δ 叫做该邻域的半径 (图 1-1).



图 1-1

开区间 $(a-\delta, a)$, $(a, a+\delta)$ 分别叫做点 a 的左邻域、右邻域. 而 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 叫做点 a 的去心邻域, 记为 $O(\hat{a}, \delta)$.

第二节 函 数

一、函数概念

在中学数学课程中, 已经介绍了函数的概念, 并且还介绍了一次函数、二次函数、三角函数等几类函数.

定义 1 数集 D 到某个数集的一个映射 f , 叫做数集 D 上的一个函数, D 叫做函数 f 的定义域.

D 中的数 x 在映射 f 下的像 y , 或者说 x 按照法则 f 所对应的数 y , 可用记号 $f(x)$ 表示, 即可写为 $y = f(x)$, 叫做 x 对应的函数值. 把 x 看作在 D 中取值的一个变量, 当 x 在 D 中变化时, y 也相应地产生变化, 因此, 把 x 叫做函数 f

的自变量, y 叫做函数 f 的因变量. 为了方便, 也为了数学上久已形成的习惯, 通常将变量 y 叫做自变量 x 的函数, 通俗地说, 有

定义 2 设 x 与 y 是同一变化过程中两个变量, D 是变量 x 取值的数集. 如果对于 D 中的每个变量 x , 变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与它对应, 则 y 叫做变量 x 的函数, 记为 $y = f(x)$.

在上述定义中, 特别要求对 D 中的每一个 x , 对应的 y 值都是惟一的, 这种函数叫做单值函数, 而将取消了惟一性要求之后的对应关系叫做多值函数. 今后无特别声明, 函数一律指的是单值函数.

本书所说的函数, 是自变量与函数值都是实数的函数, 简称实函数.

当点 a 属于某函数的定义域, 则说这函数在点 a 有定义. 当数集 S 是某函数定义域的子集, 则说这个函数在 S 上有定义.

当自变量 x 取遍 D 的各个数值时, 对应的函数值全体组成的数集

$$R(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

叫做函数 $y = f(x)$ 的值域.

平面直角坐标系中的点集

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

叫做函数 $y = f(x)$ 的图形或者图象.

下面举出一些函数的例子, 以便加深对函数概念的理解, 同时, 这些例子在理论或实际问题中也具有典型意义.

例 1 常量函数:

$$y = -2$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R(f) = \{-2\}$.

例 2 在等温过程中, 定量的理想气体的体积 V 与压强 p 呈反比关系

$$V = \frac{C}{p},$$

其中, C 是与该气体有关的一个常数, 定义域 $D = \{p \mid 0 < p < a\}$, 在区间 $(0, a)$ 上任意取定一个 p 的值, 就相应地确定了 V 的一个值, 故其值域 $R(f) = \left\{V \mid \frac{C}{a} < V < +\infty\right\}$.

例 3 在电子技术中, 经常遇到各种波形, 如图 1-2 所示是一种三角波形的一个波形, 图中横坐标表示时间 t , 纵坐标表示电压 U , 从图可知, U 和 t 的关系可以表示为

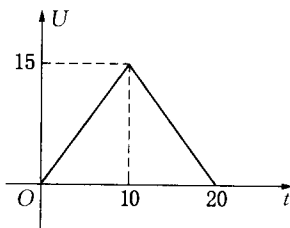


图 1-2

$$U = \begin{cases} \frac{3}{2}t, & \text{当 } 0 \leq t \leq 10 \text{ 时;} \\ 30 - \frac{3}{2}t, & \text{当 } 10 < t \leq 20 \text{ 时.} \end{cases}$$

这个函数的定义域 $D = \{t \mid 0 \leq t \leq 20\}$, 值域 $R(f) = \{U \mid 0 \leq U \leq 15\}$, 其中, 自变量在不同的取值范围, 对应法则用不同的式子来表示, 我们把这种函数叫做分段函数. 分段函数是一种很重要的函数, 以后要常用到.

例 4 函数:

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时;} \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

叫做符号函数, 它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R(f) = \{-1, 0, 1\}$, 如图 1-3 所示.

对于任何实数 x , 有如下关系式成立

$$x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x.$$

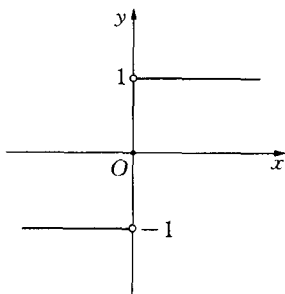


图 1-3

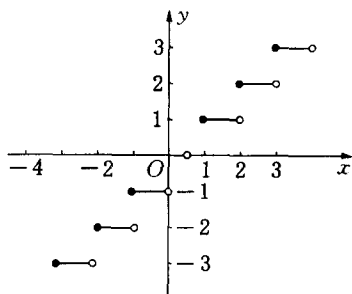


图 1-4

例 5 取整函数: $y = [x]$.

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $\left[\frac{5}{7}\right] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-1] = -1$, $[-3.5] = -4$.

函数 $y = [x]$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R(f) = \mathbf{Z}$, 它的图形如图 1-4 所示, 这个图形叫做阶梯曲线, 在 x 为整数值处图形发生跳跃, 跃度为 1.

例 6 Dirichlet 函数:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

它的图形是不能精确地画出来的, 但可以作一些直观地想象, 当 x 取有理

数时,有无数多个点稠密地分布在直线 $y = 1$ 上;当 x 取无理数时,有无数多个点稠密地分布在 x 轴上,如图 1-5 所示.

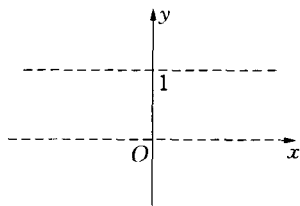


图 1-5

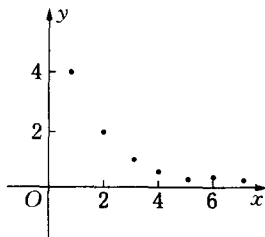


图 1-6

例 7 函数: $y = f(n) = \frac{1}{2^{n-3}} \quad (n \in \mathbf{N}^+).$

它的图形是平面直角坐标系中一批各自孤立的点(图 1-6). 定义域是正整数集 $\mathbf{N}^+$ 的函数,叫做**整标函数**. 如果 $y = f(n)$ 是一整标函数,则 $a_n = f(n)$ 恰是数列 $\{a_n\}$ 的通项.

有的函数关系隐含在某个二元方程 $F(x, y) = 0$ 中,即由

$$F(x, y) = 0$$

确定了一个函数 $y = \varphi(x)$,使 $F[x, \varphi(x)] \equiv 0$. 我们把 $y = \varphi(x)$ 叫做这个函数的**显式**,而 $F(x, y) = 0$ 叫做这个函数的**隐式**,也叫做**隐函数**. 例如,方程

$$x^2 + y^2 = 1,$$

如果限制 $y \geq 0$,可以解得显式是

$$y = \sqrt{1 - x^2};$$

如果限制 $y < 0$,可以解得显式是

$$y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

当对 y 没有限制时,对于 x 在区间 $[-1, 1]$ 上的一个值,根据 $x^2 + y^2 = 1$,有 y 的两个值与之对应,这时 y 是 x 的一个多值函数,函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 以及函数 $y = -\sqrt{1 - x^2}$ 叫做这个多值函数的两支.

值得注意的是,有的隐函数虽然存在,但并非都可以像上述那样能解出该函数的显式.

如果一个函数的对应法则是用解析式给出的,而又略去了定义域,我们常把这个解析式的存在域当作这个函数的定义域.

两个函数相等应是两个函数的定义域相同且对应法则一样,因此,函

数 $f(x) = \lg x^2$ 与 $g(x) = 2\lg x$ 由于定义域不同, 故不能看作是相等的两个函数.

二、函数的几个常用性质

今后, 我们用符号 $\forall$ 表示“对于任意的”, 用符号 $\exists$ 表示“存在”, 用符号 $\exists!$ 表示“存在惟一的”.

对于函数 $f(x)$, 我们常关注是否具有以下性质:

(1) 有界性

设函数 $f(x)$ 在 D 上有意义, 如果 $\exists M \in \mathbf{R}^+$, 使得 $\forall x \in D$, 有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界; 否则, 称 $f(x)$ 在 D 上无界. 这就是说, 如果对 $\forall M \in \mathbf{R}^+, \exists x_0 \in D$, 使得

$$|f(x_0)| > M,$$

那么, 函数 $f(x)$ 在 D 上无界.

如果 $\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in D$, 有

$$f(x) \leq M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有上界, M 就是它的一个上界;

如果 $\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in D$, 有

$$f(x) \geq M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有下界, M 就是它的一个下界.

容易证明, 定义在 D 上的函数 $f(x)$ 有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的, 因为 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $|\sin x| \leq 1$.

又如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 上无界的, 然而在区间 $(1, 2)$ 上却是有界的.

(2) 单调性

设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义, 如果 $\forall x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加;

若当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**单调减少**.

今后,单调增加的函数简称**单增函数**,单调减少的函数简称**单减函数**.

单增函数和单减函数都叫做**单调函数**,使函数保持单调性的自变量的变化区间叫做**单调区间**.

(3) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则必有一 $x \in D$), 如果 $\forall x \in D$, 有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**;

如果 $\forall x \in D$, 有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 是偶函数, $f(x) = x \cos x$ 是奇函数, $f(x) = \sin x + \cos x$ 既非奇函数, 也非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称; 奇函数的图形关于原点对称.

(4) 周期性

设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义, 如果 $\exists T \in \mathbf{R}, T \neq 0$, 使得 $\forall x \in D$, 有 $(x \pm T) \in D$, 且

$$f(x+T) = f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 为**周期函数**, T 叫做 $f(x)$ 的**周期**, 通常, 周期函数的周期是指最小正周期.

例如, 函数 $\sin x, \cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数, 函数 $\tan x, \cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

有的周期函数无最小正周期, 如 Dirichlet 函数 $D(x)$, 任意有理数都是该函数的周期, 但它没有最小正周期.

三、复合函数

从结构上看, 有许多比较复杂的函数可以分解成结构比较简单的函数. 例如, 函数

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

可由函数

$$y = \sqrt[3]{u}, u = x^2 - 1$$

来表示. 如果将 $u = x^2 - 1$ 代入表达式 $y = \sqrt[3]{u}$, 就得到 $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$. 即函数 $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ 是由 $y = \sqrt[3]{u}$ 及 $u = x^2 - 1$ 构成的, 或者说 $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ 是由 $y = \sqrt[3]{u}$ 及 $u = x^2 - 1$ 复合而成的复合函数.

一般地, 若函数 $y = f(u)$ 的定义域是 D_1 , 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域的某个非空子集是 D_2 , 它使得 $R(\varphi) = \{\varphi(x) \mid x \in D_2\} \subseteq D_1$, 则在 D_2 上的函数

$$y = f[\varphi(x)]$$

叫做由函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**, u 叫做**中间变量**.

例 8 函数 $y = a^{1-x^2}$ 可以看作由 $y = a^u$ 和 $u = 1 - x^2$ 复合而成的复合函数.

例 9 函数 $y = \sqrt{\frac{1 - (x^2 + 1)^3}{1 + (x^2 + 1)^3}}$ 可以看作由

$$y = \sqrt{u}, u = \frac{1-v}{1+v}, v = u^3, w = x^2 + 1$$

四个函数复合而成的.

例 10 设函数 $y = f(u) = \log_a u$, 而 $u \in (0, +\infty)$; $u = \varphi(x) = 1 - x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 讨论复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域.

解 $y = f[\varphi(x)] = \log_a(1 - x^2)$, 虽然 $u = 1 - x^2$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 但它不是 $y = \log_a(1 - x^2)$ 的定义域, 因为当 $|x| \geq 1$ 时, $\log_a(1 - x^2)$ 无意义, 因此 $y = \log_a(1 - x^2)$ 的定义域只能取 $(-\infty, +\infty)$ 的满足条件

$$1 - x^2 > 0$$

的子集, 即 $y = \log_a(1 - x^2)$ 的定义域是 $(-1, 1)$.

例 11 设 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2}$, 求 $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(x)] = \frac{1}{[\varphi(x)]^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 2}$;

$$\varphi[f(x)] = \sqrt{1 + [f(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}}{x^2 + 1}.$$

例 11 说明, 复合函数的复合次序是不能调换的.

应该注意的是, 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如, $y = \arcsin u$ 及 $u = 2 + x^2$ 就不能复合成一个复合函数, 因为 $y = \arcsin(2 + x^2)$ 是没有意义的.

四、反函数

设函数 $f(x)$ 的定义域、值域分别为 D, B . 如果 $\forall b \in B, \exists a \in D$, 满足 $f(a) = b$, 那么, $\forall b \in B$, 用 $a \in D$ 与之对应, 这一对应法则显然是数集 B 到数集 D 的一个映射. 因而是以 B 为定义域、 D 为值域的一个函数, 这个函数叫做函数 $f(x)$ 的**反函数**, 记为

$$y = f^{-1}(x).$$

例 12 求函数 $y = 3x + 1$ 的反函数.

解 由 $y = 3x + 1$, 得

$$x = \frac{1}{3}(y - 1).$$

交换上式记号 x, y 便得所求的反函数为

$$y = \frac{1}{3}(x - 1).$$

例 13 求函数 $y = a^x$ 的反函数.

解 由 $y = a^x$, 得

$$x = \log_a y.$$

交换上式记号 x, y 便得所求的反函数为

$$y = \log_a x.$$

例 14 正弦函数 $y = \sin x$ 由于自变量 x 有多个值的函数值可能相同. 例如, 当 $x = x_0 + 2n\pi (n = 1, 2, \dots)$ 时, 函数值均为 $\sin x_0$. 因此, 对定义域必须适当限制, 才可能有反函数. 例如, 一般, 限制 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 可得反函数

$$y = \arcsin x.$$

容易验证, 函数与其反函数的图象关于直线 $y = x$ 对称.

容易验证, 单调函数必有反函数, 并且, 单增(减)函数的反函数也是单增(减)函数.

五、基本初等函数

常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数叫做**基本初等函数**. 基本初等函数是大家熟悉的, 这里仅就它们的性质和图形列表作一介绍(由于常量函数 $y = C$ 的图形是一条过点 $(0, C)$ 的水平线, 各种性质十分明显, 故不再列出).