高等学校教材

数学分析讲义

（第四版）

上 册

刘玉琏 傅沛仁
林 玎 苑德馨 刘 宁 编

高等教育出版社

内容提要

本书分上、下两册，是在第三版的基础上修订而成的，但在内容和体例上，未作较大变动。上册内容包括：函数，极限，连续函数，实数的连续性，导数与微分，微分学基本定理及其应用，不定积分，定积分等。

本书阐述细致，范例较多，便于自学，可作为高等师范院校本科教材，也可作为高等理科院校函授教材及高等教育自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义．上/刘玉琏等编．—4版．—北京：高等教育出版社，2003．

ISBN 7-04-011880-7

Ⅰ．数…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．数学分析-高等学校-教材　Ⅳ．017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 008301 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	廊坊市科通印业有限公司		
		版　　次	1960 年 8 月第 1 版
开　　本	850×1168　1/32		2003 年 7 月第 4 版
印　　张	14.25	印　　次	2003 年 9 月第 2 次印刷
字　　数	360 000	定　　价	19.70 元

第一版前言

本《讲义》是在我系函授本科用《数学分析讲义》的基础上修改完成的。在修改时，吸取了系内教师和广大函授生对该《讲义》在多次教学中所提出的意见。

本《讲义》的内容选取，考虑了当前中等学校多数数学教师的专业基础，注意了数学分析课程本身的系统性，照顾了其它后继课的需要。文字叙述力求通顺，定理证明力求详明，使其通俗易懂，便于自学。

我们对某些重要的概念和定理作了细致的分析；对一些定理的证明，除了给出分析的严格证明外，注意用几何图形帮助读者理解定理内容，掌握定理的证法。

本《讲义》有些部分用小字排印，它们有的是对某些问题作进一步的说明；有的是教学上的难点；有的是进一步提高不可缺少的内容。初学的读者，可先不阅读小字部分，待逐步掌握数学分析的方法之后，再阅读这部分内容。

由于我们水平有限，错误和不妥之处一定很多，敬希广大读者批评指正。

本《讲义》主要由刘玉琏同志执笔编写，傅沛仁同志参加了部分章节的编写和修改工作。

吉林师范大学数学系

数学分析教研室

1960年于长春

第二版前言

从1960年本《讲义》出版以来，收到许多读者的来信，对本《讲义》的内容、体系、讲法等诸方面提出很多宝贵意见，并建议增配练习题，有的读者对印刷与编写的一些错漏编制了详细的勘误表。这是对我们工作的鼓励和支持，也是提高修订质量不可缺少的条件。借此再版之机，向关怀和支持我们工作的广大读者表示深切谢意。

此次修订，根据1980年5月在上海高校理科数学教材编审委员会会议上审订的高师《数学分析教学大纲》，对原《讲义》的内容作了小量的增删。在保持原《讲义》通俗易懂，便于自学的前提下，对体例、格式、叙述等作了较大的修改。力求使原《讲义》的优点得到发展，缺点得到克服。其中函数与极限两章是重新编写的。函数的讲法适应了新大纲的要求；极限的讲法注意了与现行高中《微积分初步》的衔接，既便于自学，又有利于指导中学的极限教学。

此次修订，每节(个别除外)之后都配有一定数量的练习题，对较难的题给了提示，书后附有计算题与判别题的答案。为了满足读者学习《数学分析》的不同要求，在每个练习题(个别除外)中分为甲类题(在符号“* * * *”之前)与乙类题(在符号“* * * *”之后)。我们认为，高师数学专业二年制或三年制专修科或函授专修科，以本《讲义》作为《数学分析》代用教材，只做部分或全部甲类题就够了。高师数学专业四年制本科或函授本科，以本《讲义》作为《数学分析》的教材，除做甲类题外，还要做部分或全部乙类题。如果学生做完全部练习题有困难，教师可选其中某些题作为习题

课上的示范题或习作题。

本《讲义》的内容都是新大纲要求的，故此次修订不排小字。师范专科学校使用本《讲义》，在保证学生学好上册内容的基础上，对下册内容应作必要删减。

此次修订，承蒙四川大学秦卫平副教授在百忙中审阅了全部修订稿，提了许多宝贵的意见和建议。对他为提高本《讲义》的质量所付出的辛勤劳动表示深切感谢。

尽管此次修订我们作了很大努力，但是由于我们水平有限，错误与不妥之处在所难免，敬希广大读者再予批评指正。

编者

1981年7月于东北师大

第三版前言

为了使本书的第三版能与《数学分析讲义学习指导书》(刘玉琏等编,高等教育出版社 1987 年 4 月第一版)配套使用,此次修订,内容和体例原则上不作大的变动,并保持本书通俗易懂,便于自学的特点。主要的改动有:改正了第二版中的错漏,对内容作了个别的增删,对练习题作了小量调整和精简,对某些文字叙述作了改写或重写。引入了量词符号,从而许多的定义和定理的叙述以及定理的证明都相应作了改动。

此次修订,得到韩山师专林庆瑞,贵阳师专任永复、丁丰朝,泉州师专蔡永芳,晋东南师专李江等老师们的关怀和支持。他们经过多次教学实践,对本书的第二版提出较全面的系统的批评意见和修订建议。这是提高修订质量不可缺少的外部条件。同时也得到我系数学分析教研室吕凤、王大海、苑德馨、赵杰、刘宁、尚淑芳等老师的关怀和帮助。在此谨向他们表示衷心感谢。

高等教育出版社本书的责任编辑文小西副编审,对本书的出版和修订始终给予具体的帮助和指导,并细致审定书稿,纠正一些错误和不妥之处,为提高书稿质量付出了艰苦劳动。在此谨向他表示衷心感谢。

尽管本书做了两次修订,但限于编者的水平,谬误仍在所难免。敬希广大读者和老师们再予批评指正。

编者

1991 年 8 月于东北师大

第四版前言

从前几版情况看，使用本书作为数学分析课教材的学校多为高师院校，为了加强基础，在第十章讲多元函数微分学时，首先把函数概念提高一步，给出比较严格的函数定义，并对高中“数学”没有严格定义的基本初等函数用分析的工具给以定义，对其性质予以证明。我们认为，补加这部分内容对培养合格的中学数学教师是有益的。

本书的知识内容、知识范围、知识的深度和广度、知识的难易程度、例题和练习题的选配、与其后继课的衔接等，基本上能满足当前多数兄弟院校对数学分析课的教学需要。因此本书的主体内容基本上不作变动。在保持本书通俗易懂，适于自学，便于讲授的基础上，修错补漏，使其更好地为提高高校的基础课教学质量服务。

因编者年事已高，身体欠佳，特邀请三位有多年的丰富的数学分析教学经验的教师参加协助修订，她们是林玎、苑德馨和刘宁。

本书第四版责任编辑李陶同志对书稿精心审改，为提高本书的质量付出了辛勤劳动，在此谨向他表示衷心感谢。限于编者的水平，谬误在所难免，诚恳期望广大读者和老师们批评指正。

编者

2002 年 10 月于长春

常用符号

一、集合符号

1. 集合与元素之间

符号“$\in$”表示“属于”;符号“$\overline{\in}$”(或“$\notin$”)表示“不属于”,符号“$P(x)$”表示“元素 x 具有性质 P”.

设 A 是集合,x 是元素.例如:

$x\in A$——元素 x 属于 A. $x\overline{\in}A$(或 $x\notin A$)——元素 x 不属于 A. $\{x\mid x\in A,P(x)\}$——集合 A 中具有性质 P 的元素 x 的全体.

2. 集合之间

符号“$\subset$”表示“包含”;符号“$=$”表示“相等”;符号“$\varnothing$”表示“空集”;符号“$\bigcup$”表示“并”或“和”;符号“$\bigcap$”表示“交”或“乘”;符号“$-$”表示“差”.

设 A 与 B 是两个集合.例如:

$B\subset A$——B 的任意元素 x 都是 A 的元素,或 B 是 A 的子集,或 B 被 A 包含.

$B\subset A$,且 $A\neq B$(或 $B\subsetneqq A$)——B 是 A 的真子集.

$A-B=\{x\mid x\in A$,但 $x\overline{\in}B\}$——B 关于 A 的差集,如图 0.1(a).

若 $B\subset A$,$\complement_A B=\{x\mid x\in A$,但 $x\overline{\in}B\}$——由属于 A 而不属于 B 的元素所组成的集合,或 A 中子集 B 的“补集”或“余集”,如图 0.1(b).

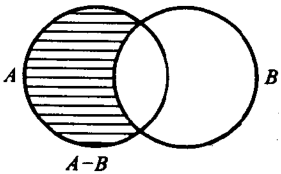

图 0.1(a)

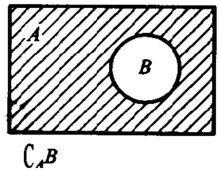

图 0.1(b)

$A\cup B$——A 与 B 的并集或和集，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\},\text{如图 0.2(a)}.$$

$A\cap B$——A 与 B 的交集或积集，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 同时 } x\in B\},\text{如图 0.2(b)}.$$

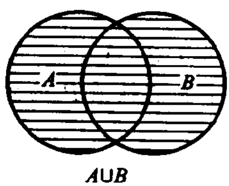

图 0.2(a)

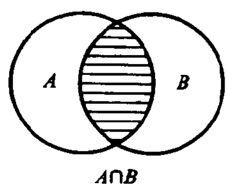

图 0.2(b)

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一列无限多个集合.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{x\mid \text{存在某个正整数 } k,\text{有 } x\in A_k\}.$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\{x\mid \text{对任意正整数 } k,\text{有 } x\in A_k\}.$$

二、数集符号

本书所说的数都是实数.全体实数，即实数集，表为 **R**.我们已知实数集 **R** 中的数和数轴上的点是一一对应的，因此也称 **R** 是**实直线**.常将“数 a”说成“点 a”，反之亦然.本书所说的数集都是实数集 **R** 的子集.实数集 **R** 有些常用的重要子集：

符号“$\mathbf{N}_+$”表示正整数集；符号“$\mathbf{N}$”表示**自然数集**；符号“$\mathbf{Z}$”表示**整数集**；符号“$\mathbf{Q}$”表示**有理数集**，有

$$\mathbf{N}_+ \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

1. 区间　为了书写简练，将各种区间的符号、名称、定义列表如下：($a, b \in \mathbf{R}$，且 $a < b$)

符　号	名　称		定　义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x \mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x \mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x \mid a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无穷区间	开区间	$\{x \mid a<x\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x \mid a\leqslant x\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x \mid x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x \mid x\leqslant a\}$

符号 $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”，符号 ∞ 是 $+\infty$ 和 $-\infty$ 的通称，读作“无穷大”。在数学分析中不把它们看做数，它们在数轴上也没有位置，一般不与实数作四则运算。但它们与实数有顺序关系，$+\infty$ 表示比一切实数都大，$-\infty$ 表示比一切实数都小，即对任意实数 x，有 $-\infty < x < +\infty$。无穷开区间 $(-\infty, +\infty)$ 也表示实数集 $\mathbf{R}$。

2. 邻域　设 $a \in \mathbf{R}$，任意 $\delta > 0$.

数集　$\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 表为 $U(a, \delta)$，即

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta),$$

称为 **a 的 δ 邻域**。当不需要注明邻域半径 δ 时，通常是对某个确定的邻域半径 δ，常将它表为 $U(a)$，简称 **a 的邻域**。

数集　$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 表为 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)-\{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a，称为 a 的 **δ 去心邻域**．当不需要注明邻域半径 δ 时，通常是对某个确定的邻域半径 δ，常将它表为 $\mathring{U}(a)$，简称 a 的**去心邻域**．

三、逻辑符号

数学分析的语言是文字叙述和数学符号共同组成的，其中有些数学符号是借用数理逻辑的符号．使用这些数理逻辑的符号能使定义、定理的表述简明、准确．数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势．本书将普遍使用这些符号．

1．连词符号

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴涵”或“推得”，或“若……，则……”．

符号“$\Longleftrightarrow$”表示“必要充分”，或“等价”．

设 A,B 是两个陈述句，可以是条件，也可以是命题．例如：

$A\Rightarrow B$——若命题 A 成立，则命题 B 成立；或命题 A 蕴涵命题 B；称 A 是 B 的充分条件，同时也称 B 是 A 的必要条件．

$$n\text{ 是整数}\Rightarrow n\text{ 是有理数}.$$

$A\Longleftrightarrow B$——命题 A 与命题 B 等价；或命题 A 蕴涵命题 B $(A\Rightarrow B)$，同时命题 B 也蕴涵命题 $A(B\Rightarrow A)$；或 $A(B)$ 是 $B(A)$ 的必要充分条件．

$$A\subset B\Longleftrightarrow \text{任意 } x\in A,\text{有 } x\in B.$$

2．量词符号

符号“$\forall$”表示“任意”，或“任意一个”，它是将英文字母 A 倒过来．

符号“$\exists$”表示“存在某个”或“能找到”，它是将英文字母 E 反过来．

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确．例如，数集 A 有上界、有下界和有界的定义：

数集 A 有上界 $\Longleftrightarrow \exists b\in\mathbf{R}, \forall x\in A$，有 $x\leqslant b$；

数集 A 有下界 $\Longleftrightarrow \exists a\in\mathbf{R}, \forall x\in A$，有 $a\leqslant x$；

数集 A 有界 $\Longleftrightarrow \exists M>0, \forall x\in A$，有 $|x|\leqslant M$.

设有命题："集合 A 中任意元素 a 都有性质 $P(a)$"，用符号表为

$$\forall a\in A，有 P(a).$$

显然，这个命题的否命题是："集合 A 中存在某个元素 a_0 没有性质 $P(a_0)$"，用符号表为

$$\exists a_0\in A，没有 P(a_0).$$

这两个命题互为否命题. 由此可见，否定一个命题，要将原命题中的"$\forall$"改为"$\exists$"，将"$\exists$"改为"$\forall$"，并将性质 P 否定. 例如，数集 A 有上界与数集 A 无上界是互为否命题，用符号表示就是：

数集 A 有上界 $\Longleftrightarrow \exists b\in\mathbf{R}, \forall x\in A$，有 $x\leqslant b$；

数集 A 无上界 $\Longleftrightarrow \forall b\in\mathbf{R}, \exists x_0\in A$，有 $b<x_0$.

四、其它符号

符号"max"表示"最大"（它是 maximum（最大）的缩写）.

符号"min"表示"最小"（它是 minimum（最小）的缩写）.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个实数. 例如：

$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$——$n$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最大数.

$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$——$n$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最小数.

符号 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数. 例如：

$[\pi]=[3.141\,5\cdots]=3$，　$[-\mathrm{e}]=[-2.718\cdots]=-3$，

$[0]=0$，　$[5]=5$.

符号"$n!$"表示"不超过 n 的所有正整数的连乘积"，读作"n 的阶乘"，即

$n!=n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1$.　$7!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$.

规定：$0!=1$.

符号“$n!!$”表示“不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的正整数的连乘积”读作“n 的双阶乘”，即

$$(2k-1)!!=(2k-1)\cdot(2k-3)\cdots5\cdot3\cdot1.$$

$$(2k)!!=(2k)\cdot(2k-2)\cdots6\cdot4\cdot2.$$

$$9!!=9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1.\quad 12!!=12\cdot10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2.$$

符号“C_n^m”($n,m\in\mathbf{N}_+$，且 $m\leqslant n$)表示“从 n 个不同元素中取 m 个元素的组合数”，即

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\ (n-m)!},$$

有公式：$C_n^m=C_n^{n-m}$ 与 $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

目　录