

高等学校教材

数学分析讲义

(第四版)

上册

刘玉琏 傅沛仁 编
林 玎 苑德馨 刘 宁



高等教育出版社

内容提要

本书分上、下两册,是在第三版的基础上修订而成的,但在内容和体例上,未作较大变动。上册内容包括:函数,极限,连续函数,实数的连续性,导数与微分,微分学基本定理及其应用,不定积分,定积分等。

本书阐述细致,范例较多,便于自学,可作为高等师范院校本科教材,也可作为高等理科院校函授教材及高等教育自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义. 上/刘玉琏等编. —4版. —北京:
高等教育出版社,2003.

ISBN 7-04-011880-7

I. 数... II. 刘... III. 数学分析-高等学校-
教材 IV. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 008301 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	廊坊市科通印业有限公司		
		版 次	1960 年 8 月第 1 版
开 本	850×1168 1/32		2003 年 7 月第 4 版
印 张	14.25	印 次	2003 年 9 月第 2 次印刷
字 数	360 000	定 价	19.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

第一版前言

本《讲义》是在我系函授本科用《数学分析讲义》的基础上修改完成的。在修改时,吸取了系内教师和广大函授生对该《讲义》在多次教学中所提出的意见。

本《讲义》的内容选取,考虑了当前中等学校多数数学教师的专业基础,注意了数学分析课程本身的系统性,照顾了其它后继课的需要。文字叙述力求通顺,定理证明力求详明,使其通俗易懂,便于自学。

我们对某些重要的概念和定理作了细致的分析;对一些定理的证明,除了给出分析的严格证明外,注意用几何图形帮助读者理解定理内容,掌握定理的证法。

本《讲义》有些部分用小字排印,它们有的是对某些问题作进一步的说明;有的是教学上的难点;有的是进一步提高不可缺少的内容。初学的读者,可先不阅读小字部分,待逐步掌握数学分析的方法之后,再阅读这部分内容。

由于我们水平有限,错误和不妥之处一定很多,敬希广大读者批评指正。

本《讲义》主要由刘玉琏同志执笔编写,傅沛仁同志参加了部分章节的编写和修改工作。

吉林师范大学数学系
数学分析教研室

1960年于长春

第二版前言

从1960年本《讲义》出版以来,收到许多读者的来信,对本《讲义》的内容、体系、讲法等诸多方面提出很多宝贵意见,并建议增配练习题,有的读者对印刷与编写的一些错漏编制了详细的勘误表。这是对我们工作的鼓励和支持,也是提高修订质量不可缺少的条件。借此再版之机,向关怀和支持我们工作的广大读者表示深切谢意。

此次修订,根据1980年5月在上海高校理科数学教材编审委员会会议上审订的高师《数学分析教学大纲》,对原《讲义》的内容作了小量的增删。在保持原《讲义》通俗易懂,便于自学的前提下,对体例、格式、叙述等作了较大的修改。力求使原《讲义》的优点得到发展,缺点得到克服。其中函数与极限两章是重新编写的。函数的讲法适应了新大纲的要求;极限的讲法注意了与现行高中《微积分初步》的衔接,既便于自学,又有利于指导中学的极限教学。

此次修订,每节(个别除外)之后都配有一定数量的练习题,对较难的题给了提示,书后附有计算题与判别题的答案。为了满足读者学习《数学分析》的不同要求,在每个练习题(个别除外)中分为甲类题(在符号“* * * *”之前)与乙类题(在符号“* * * *”之后)。我们认为,高师数学专业二年制或三年制专修科或函授专修科,以本《讲义》作为《数学分析》代用教材,只做部分或全部甲类题就够了。高师数学专业四年制本科或函授本科,以本《讲义》作为《数学分析》的教材,除做甲类题外,还要做部分或全部乙类题。如果学生做完全部练习题有困难,教师可选其中某些题作为习题

课上的示范题或习作题。

本《讲义》的内容都是新大纲要求的，故此次修订不排小字。师范专科学校使用本《讲义》，在保证学生学好上册内容的基础上，对下册内容应作必要删减。

此次修订，承蒙四川大学秦卫平副教授在百忙中审阅了全部修订稿，提了许多宝贵的意见和建议。对他为提高本《讲义》的质量所付出的辛勤劳动表示深切感谢。

尽管此次修订我们作了很大努力，但是由于我们水平有限，错误与不妥之处在所难免，敬希广大读者再予批评指正。

编者

1981年7月于东北师大

第三版前言

为了使本书的第三版能与《数学分析讲义学习指导书》(刘玉琏等编,高等教育出版社1987年4月第一版)配套使用,此次修订,内容和体例原则上不作大的变动,并保持本书通俗易懂,便于自学的特点。主要的改动有:改正了第二版中的错漏,对内容作了个别的增删,对练习题作了少量调整和精简,对某些文字叙述作了改写或重写。引入了量词符号,从而许多的定义和定理的叙述以及定理的证明都相应作了改动。

此次修订,得到韩山师专林庆瑞,贵阳师专任永复、丁丰朝,泉州师专蔡永芳,晋东南师专李江等老师们的关怀和支持。他们经过多次教学实践,对本书的第二版提出较全面的系统的批评意见和修订建议。这是提高修订质量不可缺少的外部条件。同时也得到我系数学分析教研室吕凤、王大海、苑德馨、赵杰、刘宁、尚淑芳等老师的关怀和帮助。在此谨向他们表示衷心感谢。

高等教育出版社本书的责任编辑文小西副编审,对本书的出版和修订始终给予具体的帮助和指导,并细致审定书稿,纠正一些错误和不妥之处,为提高书稿质量付出了艰苦劳动。在此谨向他表示衷心感谢。

尽管本书做了两次修订,但限于编者的水平,谬误仍在所难免。敬希广大读者和老师们再予批评指正。

编者

1991年8月于东北师大

第四版前言

从前几版情况看,使用本书作为数学分析课教材的学校多为高师院校,为了加强基础,在第十章讲多元函数微分学时,首先把函数概念提高一步,给出比较严格的函数定义,并对高中“数学”没有严格定义的基本初等函数用分析的工具给以定义,对其性质予以证明。我们认为,补加这部分内容对培养合格的中学数学教师是有益的。

本书的知识内容、知识范围、知识的深度和广度、知识的难易程度、例题和练习题的选配、与其后继课的衔接等,基本上能满足当前多数兄弟院校对数学分析课的教学需要。因此本书的主体内容基本上不作变动。在保持本书通俗易懂,适于自学,便于讲授的基础上,修错补漏,使其更好地为提高高校的基础课教学质量服务。

因编者年事已高,身体欠佳,特邀请三位有多年的丰富的数学分析教学经验的教师参加协助修订,她们是林珂、苑德馨和刘宁。

本书第四版责任编辑李陶同志对书稿精心审改,为提高本书的质量付出了辛勤劳动,在此谨向他表示衷心感谢。限于编者的水平,谬误在所难免,诚恳期望广大读者和老师们批评指正。

编者

2002年10月于长春

常用符号

一、集合符号

1. 集合与元素之间

符号“ \in ”表示“属于”；符号“ $\bar{\in}$ ”（或“ \notin ”）表示“不属于”，符号“ $P(x)$ ”表示“元素 x 具有性质 P ”。

设 A 是集合， x 是元素。例如：

$x \in A$ ——元素 x 属于 A 。 $x \bar{\in} A$ （或 $x \notin A$ ）——元素 x 不属于 A 。 $\{x | x \in A, P(x)\}$ ——集合 A 中具有性质 P 的元素 x 的全体。

2. 集合之间

符号“ \subset ”表示“包含”；符号“ $=$ ”表示“相等”；符号“ \emptyset ”表示“空集”；符号“ \cup ”表示“并”或“和”；符号“ \cap ”表示“交”或“乘”；符号“ $-$ ”表示“差”。

设 A 与 B 是两个集合。例如：

$B \subset A$ —— B 的任意元素 x 都是 A 的元素，或 B 是 A 的子集，或 B 被 A 包含。

$B \subset A$ ，且 $A \neq B$ （或 $B \subsetneq A$ ）—— B 是 A 的真子集。

$A - B = \{x | x \in A, \text{但 } x \bar{\in} B\}$ —— B 关于 A 的差集，如图 0.1(a)。

若 $B \subset A$ ， $\complement_A B = \{x | x \in A, \text{但 } x \bar{\in} B\}$ ——由属于 A 而不属于 B 的元素所组成的集合，或 A 中子集 B 的“补集”或“余集”，如图 0.1(b)。

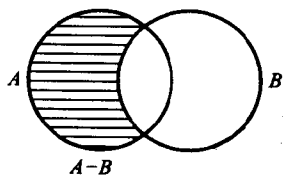


图 0.1(a)

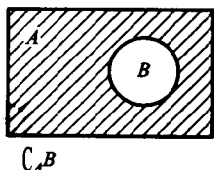


图 0.1(b)

$A \cup B$ —— A 与 B 的并集或和集, 即

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$, 如图 0.2(a).

$A \cap B$ —— A 与 B 的交集或积集, 即

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 同时 } x \in B\}$, 如图 0.2(b).

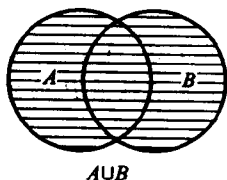


图 0.2(a)

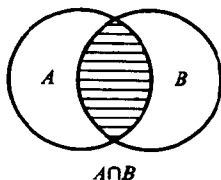


图 0.2(b)

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是一列无限多个集合.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x | \text{存在某个正整数 } k, \text{ 有 } x \in A_k\}.$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x | \text{对任意正整数 } k, \text{ 有 } x \in A_k\}.$$

二、数集符号

本书所说的数都是实数. 全体实数, 即实数集, 表为 \mathbf{R} . 我们已知实数集 \mathbf{R} 中的数和数轴上的点是一一对应的, 因此也称 \mathbf{R} 是实直线. 常将“数 a ”说成“点 a ”, 反之亦然. 本书所说的数集都是实数集 \mathbf{R} 的子集. 实数集 \mathbf{R} 有些常用的重要子集:

符号“ \mathbf{N}_+ ”表示正整数集；符号“ \mathbf{N} ”表示自然数集；符号“ \mathbf{Z} ”表示整数集；符号“ \mathbf{Q} ”表示有理数集，有

$$\mathbf{N}_+ \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

1. 区间 为了书写简练，将各种区间的符号、名称、定义列表如下： $(a, b \in \mathbf{R}, \text{且 } a < b)$

符号	名称	定义
(a, b)	有限区间	$\{x a < x < b\}$
$[a, b]$		$\{x a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$		$\{x a < x \leq b\}$
$[a, b)$		$\{x a \leq x < b\}$
$(a, +\infty)$	无穷区间	$\{x a < x\}$
$[a, +\infty)$		$\{x a \leq x\}$
$(-\infty, a)$		$\{x x < a\}$
$(-\infty, a]$		$\{x x \leq a\}$

符号 $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”，符号 ∞ 是 $+\infty$ 和 $-\infty$ 的通称，读作“无穷大”。在数学分析中不把它们看做数，它们在数轴上也没有位置，一般不与实数作四则运算。但它们与实数有顺序关系， $+\infty$ 表示比一切实数都大， $-\infty$ 表示比一切实数都小，即对任意实数 x ，有 $-\infty < x < +\infty$ 。无穷开区间 $(-\infty, +\infty)$ 也表示实数集 \mathbf{R} 。

2. 邻域，设 $a \in \mathbf{R}$ ，任意 $\delta > 0$ 。

数集 $\{x | |x - a| < \delta\}$ 表为 $U(a, \delta)$ ，即

$$U(a, \delta) = \{x | |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta),$$

称为 a 的 δ 邻域。当不需要注明邻域半径 δ 时，通常是对某个确定的邻域半径 δ ，常将它表为 $U(a)$ ，简称 a 的邻域。

数集 $\{x | 0 < |x - a| < \delta\}$ 表为 $\dot{U}(a, \delta)$ ，即

$$U(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta) - \{a\},$$
 也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a, \delta)$ 中去掉 a , 称为 a 的 δ 去心邻域. 当不需要注明邻域半径 δ 时, 通常是对某个确定的邻域半径 δ , 常将它表为 $U(a)$, 简称 a 的去心邻域.

三、逻辑符号

数学分析的语言是文字叙述和数学符号共同组成的, 其中有些数学符号是借用数理逻辑的符号. 使用这些数理逻辑的符号能使定义、定理的表述简明、准确. 数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势. 本书将普遍使用这些符号.

1. 连词符号

符号“ \Rightarrow ”表示“蕴涵”或“推得”, 或“若……, 则……”.

符号“ \Leftrightarrow ”表示“必要充分”, 或“等价”.

设 A, B 是两个陈述句, 可以是条件, 也可以是命题. 例如:

$A \Rightarrow B$ ——若命题 A 成立, 则命题 B 成立; 或命题 A 蕴涵命题 B ; 称 A 是 B 的充分条件, 同时也称 B 是 A 的必要条件.

n 是整数 $\Rightarrow n$ 是有理数.

$A \Leftrightarrow B$ ——命题 A 与命题 B 等价; 或命题 A 蕴涵命题 B ($A \Rightarrow B$), 同时命题 B 也蕴涵命题 A ($B \Rightarrow A$); 或 $A(B)$ 是 $B(A)$ 的必要充分条件.

$A \subset B \Leftrightarrow$ 任意 $x \in A$, 有 $x \in B$.

2. 量词符号

符号“ \forall ”表示“任意”, 或“任意一个”, 它是将英文字母 A 倒过来.

符号“ \exists ”表示“存在某个”或“能找到”, 它是将英文字母 E 反过来.

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确. 例如, 数集 A 有上界、有下界和有界的定义:

数集 A 有上界 $\Leftrightarrow \exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } x \leq b$;

数集 A 有下界 $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } a \leq x$;

数集 A 有界 $\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in A, \text{有 } |x| \leq M$.

设有命题：“集合 A 中任意元素 a 都有性质 $P(a)$ ”，用符号表为

$$\forall a \in A, \text{有 } P(a).$$

显然，这个命题的否命题是：“集合 A 中存在某个元素 a_0 没有性质 $P(a_0)$ ”，用符号表为

$$\exists a_0 \in A, \text{没有 } P(a_0).$$

这两个命题互为否命题。由此可见，否定一个命题，要将原命题中的“ \forall ”改为“ \exists ”，将“ \exists ”改为“ \forall ”，并将性质 P 否定。例如，数集 A 有上界与数集 A 无上界是互为否命题，用符号表示就是：

数集 A 有上界 $\Leftrightarrow \exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } x \leq b$;

数集 A 无上界 $\Leftrightarrow \forall b \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in A, \text{有 } b < x_0$.

四、其它符号

符号“max”表示“最大”（它是 maximum（最大）的缩写）。

符号“min”表示“最小”（它是 minimum（最小）的缩写）。

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个实数。例如：

$\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ —— n 个实数 a_1, a_2, \dots, a_n 中最大数。

$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ —— n 个实数 a_1, a_2, \dots, a_n 中最小数。

符号 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数。例如：

$$[\pi] = [3.1415\cdots] = 3, \quad [-e] = [-2.718\cdots] = -3,$$

$$[0] = 0, \quad [5] = 5.$$

符号“ $n!$ ”表示“不超过 n 的所有正整数的连乘积”，读作“ n 的阶乘”，即

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1. \quad 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

规定： $0! = 1$.

符号“ $n!!$ ”表示“不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的正整数的连乘积”读作“ n 的双阶乘”，即

$$(2k-1)!! = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1.$$

$$(2k)!! = (2k) \cdot (2k-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2.$$

$$9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1. \quad 12!! = 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2.$$

符号“ C_n^m ”($n, m \in \mathbf{N}_+$, 且 $m \leq n$)表示“从 n 个不同元素中取 m 个元素的组合数”，即

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

有公式： $C_n^m = C_n^{n-m}$ 与 $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$.

目 录

常用符号	1
第一章 函数	1
§ 1.1 函数	1
一、函数概念(1) 二、函数的四则运算(5) 三、函数的图像(7)	
四、数列(9) 练习题 1.1(10)	
§ 1.2 四类具有特殊性质的函数	12
一、有界函数(12) 二、单调函数(16) 三、奇函数与偶函数(18)	
四、周期函数(19) 练习题 1.2(21)	
§ 1.3 复合函数与反函数	22
一、复合函数(22) 二、反函数(25) 三、初等函数(29)	
练习题 1.3(33)	
第二章 极限	35
§ 2.1 数列极限	35
一、极限思想(35) 二、数列 $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ 的极限(37) 三、数列极	
限概念(40) 四、例(43) 练习题 2.1(47)	
§ 2.2 收敛数列	48
一、收敛数列的性质(48) 二、收敛数列的四则运算(51)	
三、数列的收敛判别法(56) 四、子数列(64) 练习题 2.2(66)	
§ 2.3 函数极限	69
一、当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限(69) 二、例(I)(71)	
三、当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限(73) 四、例(II)(78)	
练习题 2.3(81)	
§ 2.4 函数极限的定理	82

一、函数极限的性质(82)	二、函数极限与数列极限的关系(85)	
三、函数极限存在判别法(88)	四、例(93)	练习题 2.4(95)
§ 2.5 无穷小与无穷大		97
一、无穷小(97)	二、无穷大(98)	三、无穷小的比较(102)
练习题 2.5(105)		
第三章 连续函数		107
§ 3.1 连续函数		107
一、连续函数概念(107)	二、例(109)	三、间断点及其分类(111)
练习题 3.1(113)		
§ 3.2 连续函数的性质		115
一、连续函数的局部性质(115)	二、闭区间连续函数的整体性质(116)	
三、反函数的连续性(120)	四、初等函数的连续性(121)	
练习题 3.2(125)		
第四章 实数的连续性		128
§ 4.1 实数连续性定理		128
一、闭区间套定理(128)	二、确界定理(130)	三、有限覆盖定理(134)
四、聚点定理(136)	五、致密性定理(137)	六、柯西收敛准则(138)
练习题 4.1(140)		
§ 4.2 闭区间连续函数整体性质的证明		141
一、性质的证明(141)	二、一致连续性(144)	练习题 4.2(147)
第五章 导数与微分		150
§ 5.1 导数		150
一、实例(150)	二、导数概念(153)	三、例(155)
练习题 5.1(161)		
§ 5.2 求导法则与导数公式		163
一、导数的四则运算(163)	二、反函数求导法则(168)	三、复合函数求导法则(170)
四、初等函数的导数(175)	练习题 5.2(179)	
§ 5.3 隐函数与参数方程求导法则		181
一、隐函数求导法则(181)	二、参数方程求导法则(186)	
练习题 5.3(187)		
§ 5.4 微分		189
一、微分概念(189)	二、微分的运算法则和公式(193)	三、微分

在近似计算上的应用(194) 练习题 5.4(196)	
§ 5.5 高阶导数与高阶微分	197
一、高阶导数(197) 二、莱布尼茨公式(200) 三、高阶微分(204)	
练习题 5.5(205)	
第六章 微分学基本定理及其应用	207
§ 6.1 中值定理	207
一、罗尔定理(207) 二、拉格朗日定理(210) 三、柯西定理(212)	
四、例(213) 练习题 6.1(216)	
§ 6.2 洛必达法则	218
一、 $\frac{0}{0}$ 型(218) 二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型(223) 三、其他待定型(225)	
练习题 6.2(229)	
§ 6.3 泰勒公式	230
一、泰勒公式(230) 二、常用的几个展开式(236) 练习题 6.3(238)	
§ 6.4 导数在研究函数上的应用	240
一、函数的单调性(240) 二、函数的极值与最值(245) 三、函数的凸凹性(256)	
四、曲线的渐近线(267) 五、描绘函数图像(271)	
练习题 6.4(276)	
第七章 不定积分	279
§ 7.1 不定积分	279
一、原函数(279) 二、不定积分(281) 练习题 7.1(286)	
§ 7.2 分部积分法与换元积分法	286
一、分部积分法(287) 二、换元积分法(291) 练习题 7.2(300)	
§ 7.3 有理函数的不定积分	302
一、代数的预备知识(302) 二、有理函数的不定积分(305)	
练习题 7.3(310)	
§ 7.4 简单无理函数与三角函数的不定积分	311
一、简单无理函数的不定积分(311) 二、三角函数的不定积分(316)	
练习题 7.4(321)	
第八章 定积分	323
§ 8.1 定积分	323

一、实例(323)	二、定积分概念(327)	
§ 8.2 可积准则		330
一、小和与大和(330)	二、可积准则(333)	三、三类可积函数(336)
练习题 8.2(339)		
§ 8.3 定积分的性质		341
一、定积分的性质(341)	二、定积分中值定理(348)	练习题 8.3(350)
§ 8.4 定积分的计算		352
一、按照定义计算定积分(352)	二、积分上限函数(354)	三、微积分的基本公式(356)
四、定积分的分部积分法(358)	五、定积分的换元积分法(361)	六、对数函数的积分定义(365)
七、指数函数——对数函数的反函数(370)	练习题 8.4(372)	
§ 8.5 定积分的应用		376
一、微元法(376)	二、平面区域的面积(378)	三、平面曲线的弧长(384)
四、应用截面面积求体积(390)	五、旋转体的侧面积(395)	六、变力作功(397)
练习题 8.5(399)		
§ 8.6 定积分的近似计算		401
一、梯形法(402)	二、抛物线法(406)	练习题 8.6(409)
附录 希腊字母表		410
练习题答案		412