高等数学例题与习题集

（四）

常微分方程

（俄） A. K. 博亚尔丘克
Г. П. 戈洛瓦奇 编著
郑元禄 译

清华大学出版社

（俄）A. K. 博亚尔丘克
Г. П. 戈洛瓦奇 编著
郑元禄 译

高等数学例题与习题集（四）

常微分方程

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

《高等数学例题与习题集》是一套目前在俄罗斯具有广泛影响的高等数学辅导用书. 在我国，无论是高等数学教材的编写方面，还是高等数学的教学方面，都与俄罗斯的高等数学教育有着很深的渊源. 因此将这套书译成中文，介绍给国内读者.

本书为《高等数学例题与习题集》的第四卷，是原书的第 5 册，内容是关于常微分方程的例题与习题. 具体包括一阶微分方程、高阶微分方程、微分方程组、一阶偏微分方程、微分方程的近似解法、稳定性和相轨线、解线性微分方程的拉普拉斯变换方法共 7 章内容. 每章开始给出必要的理论材料，然后是各类典型例题的演算，最后是为读者安排的练习题，书末给出了练习题的答案.

北京市版权局著作权合同登记号　图字：01-2001-0657

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/(俄)博亚尔丘克，(俄)戈洛瓦奇编著；郑元禄译. 北京：清华大学出版社，2005. 1

(高等数学例题与习题集；4)

ISBN 7-302-09628-7

Ⅰ. 常…　Ⅱ. ①博… ②戈… ③郑…　Ⅲ. 常微分方程—教学参考资料　Ⅳ. O175. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 098196 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

组稿编辑：刘　颖

文稿编辑：王海燕

印 装 者：三河市春园印刷有限公司

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　　本：185×230　**印张**：30. 5　**字数**：644 千字

版　　次：2005 年 1 月第 1 版　2005 年 1 月第1 次印刷

书　　号：ISBN 7-302-09628-7/O・411

印　　数：1～5000

定　　价：39. 80 元

译 者 序

数学，无论从其对其他学科的影响上看，还是从数学自身发展上看，它的重要性都是不言而喻的. 高等数学，作为大多数理工科大学生的必修课，在锻炼学生的逻辑思维，以及为后续专业课程的学习打好基础方面，其重要性更是不言而喻的. 如何学好高等数学，仁者见仁，智者见智，但数学习题的作用是大家公认的.

《高等数学例题与习题集》是由四位俄罗斯数学家编写的一套高等数学辅导书，全书共 5 册，其中第 1 册包括分析引论，一元函数微分学，不定积分，定积分 4 章内容；第 2 册包括级数，多元函数微分学两部分内容；第 3 册包括含参变量积分，重积分与曲线积分两部分内容；第 4 册是关于复变函数的内容，包括数学分析基础，复数与复变函数，复平面上的初等函数，复平面上的积分，解析函数级数、孤立奇点，解析延拓，留数及其应用，解析函数几何理论的一些问题共 8 章内容；第 5 册是关于微分方程理论的内容，包括一阶微分方程，高阶微分方程，微分方程组，一阶偏微分方程，微分方程的近似解法，稳定性与相轨线，解线性微分方程的拉普拉斯变换方法共 7 章内容.

作者曾编写过高等数学习题集，本书的前 3 册是他们的两卷本辅导书《数学分析例题与习题》的修改与补充. 本套书从 1997 年开始出版发行，历时两年于 1999 年完成. 并已被翻译成西班牙文出版发行.

本套书采用统一风格，每章的开始给出必要的理论材料，然后给出各种类型的例题，最后是为读者准备的习题，书末给出习题答案. 全书共演算例题 2823 道，其中第 1 册 805 道，第 2 册 497 道，第 3 册 369 道，第 4 册 363 道，第 5 册 789 道；收录习题 1998 道，其中第 1 册 923 道，第 2 册 328 道，第 3 册 238 道，第 4 册 193 道，第 5 册 316 道. 这些例题涵盖了各部分内容的典型习题和较难处理的习题，这样既有利于帮助读者尽快地掌握解决典型题目的方法，促进对基本概念和基本定理的理解，也可以通过一些较难题目的解法来提高知识的综合运用能力，用以强化和锻炼综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力. 本书参考了许多知名的俄文版习题集，其中包括久负盛名的吉米多维奇的《数学分析习题集》(人民教育出版社 1958 年翻译出版)，沃尔科维斯基等的《复变函数论习题集》(上海科学技术出版社 1981 年翻译出版)，菲利波夫等的《微分方程习题集》(上海科学技术出版社 1981 年翻译出版). 例如，前 3 册中所演算的例题就包括了《数学分析习题集》中的绝大多数典型题和难题.

我国近代的高等教育，无论是在教材的编写方面，还是在教学方法方面，都与俄罗斯(前苏联)的高等教育有着很深的渊源. 因此，我们将此套辅导书翻译成中文，一方面给读者提供一套辅导书，另一方面，也将俄罗斯当代的高等数学教学水准介绍给国内高校的学

生和数学教师.

本套书并没有局限于高等数学教科书的内容，而是站在较高的角度来梳理高等数学中各部分内容之间以及它们与其他相关分支之间的关系，并且将一些相关分支的内容纳入到高等数学的背景下来讨论（反映在理论材料、例题演算和习题中）. 例如，书中涉及了集合论、线性空间、矩阵、函数逼近论等方面的内容. 这样有利于读者从全局上把握高等数学的知识，以加深对这些知识的理解和认识.

本套书的读者对象主要为工科院校的学生以及理科或师范院校数学系的学生. 对于广大的高等院校中的数学教师来讲，它也是非常有用的参考书.

本套书已由清华大学出版社自俄罗斯引进中文版权，准备分 4 册出版发行（原书第 2 册和第 3 册合并为 1 册）. 本册由郑元禄翻译，在翻译过程中，对原书中的一些印刷错误直接进行了修改，而没有加脚注说明.

数学科学系的萧树铁教授、谭泽光教授、白峰杉教授等对本书的翻译给予了很多支持与鼓励，在此向他们表示感谢. 北京大学俄语系的王辛夷老师、林百学老师在联系俄罗斯出版社及其他事情上给了译者很多帮助，在此表示感谢.

由于译者的水平所限，书中自有很多错误或者不妥之处，敬请读者批评指正.

译　者

2003 年岁末

前　　言

根据作者们的计划，本书的任务是利用不平凡的例题和练习题，帮助读者深刻地理解和掌握常微分方程理论.

常微分方程理论的特点是它的普遍性及其与极限理论、函数论、微积分学、级数理论及其他数学分支的密切联系. 这个特点的本质也就是常微分方程理论的方法是数学分析的方法. 因此，人们把常微分方程理论看成是数学分析向下面所述类型的方程给定的一类隐函数的进一步开拓和发展，这不是没有理由的：这些方程包含独立的变量、函数及其导数. 于是，一元函数积分学实际上是一类 $y'=f(x)$ 型最简单微分方程的积分理论.

本书包括大学和要求学习较深数学知识的工科院校微分方程教学大纲的所有部分.

本书每章提供了所需要的最少的理论知识，这些知识是解相应例题必不可少的. 此外，对于同类图书来说，本书研究了下列非传统例题：柯西(Cauchy)问题解的可开拓理论，一阶非线性偏微分方程，微分方程的某些数值解法，相位平面上极限环存在特征的应用. 每章提供了供独立完成的练习题.

本书包含了 768 道详细解答的例题，这些例题是从微分方程的教科书和习题集中选取的。

目　　录

引言 基本概念 微分方程的建立

1 基本定义

形如

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1}$$

的方程称为 n 阶常微分方程，其中 F 是在变量 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 坐标空间的某一区域 D 上给定的已知函数，$x\in(x_0,x_1)$ 是自变量，$y,y',\cdots,y^{(n)}$ 是未知函数和它的导数，n 是方程的阶数.

方程(1)的解指的是任一函数 $y=f(x),x\in(x_0,x_1)$，此函数

1) 在区间 (x_0,x_1) 内有 n 阶导数，并且

$$\forall x\in(x_0,x_1),\quad (x,f(x),f'(x),\cdots,f^{(n)}(x))\in D;$$

2) 满足方程(1)，即使它变成恒等式

$$F(x,f(x),f'(x),\cdots,f^{(n)}(x))\equiv 0,\quad \forall x\in(x_0,x_1).$$

如果可求出方程(1)的一切解，则称它是可求积分的.

关于已解出最高阶导数 $y^{(n)}$ 的方程(1)称为典型方程，具有形式

$$y^{(n)}=\varphi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}). \tag{2}$$

2 柯西问题

设函数 $\varphi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 在变量 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 坐标空间的区域 D 上连续. 要求求出一个包含点 x_0 且有 n 阶连续可微函数 $y=f(x)$ 的区间 X，使 $(x,f(x),f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x))\in D$，这时 $x\in X$，且满足条件

1) $\forall x\in X,f^{(n)}(x)\equiv\varphi(x,f(x),f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x))$；

2) $f(x_0)=y_0,f'(x_0)=y'_0,\cdots,f^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$，其中 $(x_0,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)})\in D$.

在形式上，方程(2)的柯西问题可写成形式

$$\begin{cases} y^{(n)}=\varphi(x,y',\cdots,y^{(n-1)}), \\ y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是给定的数.

问题(3)的每个具体解称为柯西问题的特解. 依赖于参数 $x_0, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$ 的特解集合称为柯西问题的通解.

3 按给定的曲线族建立微分方程

为了建立满足下列给定曲线族的曲线的微分方程

$$\Phi(x, y, C_1, \cdots, C_n) = 0, \tag{4}$$

其中 $C_i(i=1,2,\cdots,n)$是属于某一区域 C 的任意常数,应该按下面的步骤做:

1) 对等式(4)n 次求微分,其中 y 是变量 x 的 n 次连续可微函数,即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}y' = 0, \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}y' + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}y'^2 + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}y'' = 0, \cdots \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^n\Phi}{\partial x^n} + \cdots + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}y^{(n)} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

2) 从关系式(4)和(5)消去任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

建立给定曲线族的微分方程:

1 $x^2+Cy^2-2y=0$.

◀假设 $y=y(x)$是已知方程的一个连续可微解,其中 C 是一个不依赖于 x 的参数,则应有恒等式

$$F(x,C) = x^2 + Cy^2(x) - 2y(x) \equiv 0, \tag{1}$$

其中 $x\in X\subset\mathbb{R}$,X 是某一集合,函数 F 是对 x 可微的. 求导数,有

$$\frac{\partial F(x,C)}{\partial x} \equiv 2x + 2y(x)y'(x)C - 2y'(x) \equiv 0,$$

从而,有

$$C = \frac{y'-x}{yy'} \quad (yy' \neq 0). \tag{2}$$

把(2)式代入(1)式,得微分方程

$$(x^2-y)y' - xy = 0. \ ▶$$

2 $Cy-\sin Cx=0$.

◀同例 1,得恒等式

$$Cy'(x) - C\cos Cx \equiv 0.$$

当 $C=0$ 时,微分方程的曲线族是不确定的,因此 $C\neq 0$. 从方程组

$$y'^2 = \cos^2 Cx, \quad C^2y^2 = \sin^2 Cx \tag{1}$$

求出

$$C^2 = \frac{1-y'^2}{y^2}, \quad y \neq 0. \tag{2}$$

把(2)式代入(1)式，有

$$1-y'^2 = \sin^2\left(\sqrt{\frac{1-y'^2}{y^2}}x\right), \quad 即 \quad y' = \cos\left(\frac{x\sqrt{(1-y'^2)}}{y}\right). ▶$$

3 $(x-C_1)^2+C_2y^2=1$.

◀将恒等式 $(x-C_1)^2+C_2y^2(x)-1\equiv 0$ 对 x 求两次微分，得

$$2(x-C_1)+2C_2y(x)y'(x)\equiv 0, 1+((y'(x))^2+y(x)y''(x))C_2\equiv 0.$$

从以上 3 个恒等式中消去常数 C_1 和 C_2，有

$$y^3y''+(y'^2+yy'')^2=0. ▶$$

4 $y=e^{Cx}$.

◀在对变量 x 求导数后，得到 $y'(x)=Ce^{Cx}$，从而 $C=\frac{y'}{y}(y\neq 0)$. 因此这个曲线族的微分方程具有形式：

$$y = e^{\frac{y'}{y}x}. ▶$$

5 $x-C_1y^2-C_2y-C_3=0$.

◀将已知等式对 x 求 3 次导数，得

$$\begin{cases} 1-2yy'C_1-C_2y'=0, \\ 2(y'^2+yy'')C_1+C_2y''=0, \\ 2(3y'y''+yy''')C_1+C_2y'''=0. \end{cases} \tag{1}$$

从等式(1)的最后一个等式求出

$$C_1=-\frac{C_2y'''}{2(3y'y''+yy''')} \quad (3y'y''+yy'''\neq 0). \tag{2}$$

把等式(2)代入等式(1)的第二个等式，得

$$y'^2y'''-3y'y''^2=0, \quad 即 \quad 3y''^2-y'y'''=0,$$

这是因为 $y'\neq 0$(这可由(1)式的第一个等式得出). ▶

注 在上述所有的例题中都假设给定的隐函数存在所需要的任意阶导数. 这个假设是重要的，因为最简单的方程 $y^2-x^2-C=0$ 确定了不连续的隐函数 $y=y(x,C)$ 的无限集，其中 $-\infty<x<+\infty$. 例如

$$y=\begin{cases} \sqrt{C+x^2}, x\in\mathbb{Q}, \\ -\sqrt{C+x^2}, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases} \quad C\neq 0.$$

6 写出平面上所有圆的微分方程.

◀从解析几何学知道，圆心在点 $M(C_1,C_2)$，半径为 $R=C_3$ 的圆的标准方程具有形式

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2-C_3^2=0. \tag{1}$$

假设每个圆可用两个三次连续可微函数 $y=y(x)$ 表示，则从(1)式求出

$$x-C_1+(y(x)-C_2)y'(x)\equiv 0,$$
$$1+y'^2(x)+(y(x)-C_2)y''(x)\equiv 0,$$
$$3y'(x)y''(x)+(y-C_2)y'''(x)\equiv 0.$$

从最后两个恒等式中消去 $y(x)-C_2$，最后得

$$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0. \blacktriangleright$$

注　更精确地说，本题得到了所有圆的微分方程，其中每个圆除去水平直径的两个端点.

7　建立半径为 1，圆心在直线 $y=2x$ 上的所有圆的微分方程.

◀根据题设条件，在例 6 中应设 $C_3=1, C_2=2C_1$，则例 6 的方程(1)化为

$$(x-C_1)^2+(y-2C_1)^2-1=0.$$

由此得到一个单参数圆族. 将恒等式

$$(x-C_1)^2+(y(x)-2C_1)^2-1\equiv 0$$

对 x 求微分(这时设 y 是 x 的连续可微函数)，得

$$x-C_1+(y(x)-2C_1)y'(x)\equiv 0.$$

从所得的两个恒等式中消去 C_1，最后有

$$(2x-y)^2(y'^2+1)-(2y'+1)^2=0. \blacktriangleright$$

8　建立抛物线的微分方程，使它的对称轴平行于 Oy 轴，同时使它与直线 $y=0$ 和 $y=x$ 相切.

◀对称轴平行于 Oy 轴的抛物线族具有形式 $y=C_1x^2+C_2x+C_3$，其中 $C_j(j=1,2,3)$ 是任意参数. 从与直线 $y=0$ 相切的条件可见

$$y'\equiv 2C_1x_k+C_2=0,\quad C_1x_k^2+C_2x_k+C_3=0,$$

其中 x_k 是切点的横坐标. 由此得到

$$C_3=\frac{C_2^2}{4C_1}\quad (C_1\neq 0). \tag{1}$$

从抛物线与直线 $y=x$ 相切可见，应该有

$$y'\equiv 2C_1x_k+C_2=1,\quad x_k=y_k,\quad y_k=C_1x_k^2+C_2x_k+\frac{C_2^2}{4C_1}.$$

从而求出 $C_2=\frac{1}{2}$. 把值 C_2 代入(1)式，得 $C_3=\frac{1}{16C_1}$. 因此，未知的曲线族满足方程

$$y=C_1x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16C_1},$$

其中 C_1 是任一参数. 从下列恒等式中消去 C_1：

$$y'\equiv 2C_1x+\frac{1}{2},\quad y\equiv C_1x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16C_1},$$

得到要求的曲线族的微分方程

$$xy'^2=y(2y'-1). \blacktriangleright$$

9 建立圆的微分方程，使圆同时与直线 $y=0$ 和 $x=0$ 相切，并在第一、第三象限.

◀显然，这些圆的圆心应在直线 $y=x$ 上. 由此得 $C_1=C_2$（见例 6). 因为圆和两坐标轴相切，所以 $C_3=|C_1|$. 因此，所研究的圆族满足方程

$$(x-C_1)^2+(y-C_1)^2-C_1^2=0.$$

从关于 x 的恒等式

$$(x-C_1)^2+(y(x)-C_1)^2-C_1^2\equiv 0,$$
$$x-C_1+(y(x)-C_1)y'Cx\equiv 0,$$

得出所要求的微分方程

$$y'^2(x^2-2xy)-2xy'+y^2-2xy=0. \blacktriangleright$$

10 建立摆线族

$$x=C(t-\sin t),\quad y=C(1-\cos t)$$

的微分方程.

◀把变量 x 和 y 对 t 求微分，并将 $y'(t)$ 除以 $x'(t)$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{1}{\tan\frac{t}{2}},$$

$$t=2\arctan\left(\frac{1}{y'}\right)+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

把 t 的值代入等式

$$(t-\sin t)y-x(1-\cos t)=0,$$

做一些变换后，得到所要求的微分方程

$$y'=\cot\frac{x+yy'}{y(1+y'^2)}. \blacktriangleright$$

11 证明：二次曲线的微分方程具有形式

$$9y''^2y^{(5)}-45y''y'''y^{(4)}+40y'''^3=0.$$

◀设二次曲线族的一般方程为 $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$，满足条件 $a\neq 0$，于是不失一般性，可设 $a=1$. 微分 5 次，得

$$x+b(y+xy')+cyy'+d+ey'=0, \tag{1}$$
$$1+b(2y'+xy'')+c(y'^2+yy'')+ey''=0, \tag{2}$$
$$b(3y''+xy''')+c(3y'y''+yy''')+ey'''=0, \tag{3}$$
$$b(4y'''+xy^{(4)})+c(3y''^2+4y'y'''+yy^{(4)})+ey^{(4)}=0, \tag{4}$$
$$b(5y^{(4)}+xy^{(5)})+c(10y''y'''+5y'y^{(4)}+yy^{(5)})+ey^{(5)}=0. \tag{5}$$

从方程(2)，(3)，(4)求出

$$\begin{cases} b=\dfrac{3y''y^{(4)}-4y'''^2}{\Delta}, \\ c=\dfrac{3y''^2y'''+4y'y'''^2-3y'y''y^{(4)}}{\Delta}, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\Delta=3y'^2y''y^{(4)}-4y'^2y'''^2-6y'y''^2y'''+9y''^4$.

从方程(2)和(5)消去 e,并将(6)式中的值 b 和 c 代入消去 e 的结果中去,最后得

$$9y''^2y^{(5)}-45y''y'''y^{(4)}+40y'''^3=0.$$

这就是所要证明的. ▶

12 证明:可微曲线族

$$\arctan\frac{y}{x}-\ln C\sqrt{x^2+y^2}=0$$

满足微分方程

$$(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y=0.$$

◀求恒等式

$$\arctan\frac{y(x)}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2(x)}\equiv\ln C$$

的全微分,得

$$\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y(x)}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2(x)}\right)\equiv 0,$$

从而

$$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0\quad(x^2+y^2\neq 0),$$

即

$$(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y=0. ▶$$

13 建立与 Ox 轴相切的所有圆的微分方程.

◀如果在例 6 的圆族方程中设 $C_3=|C_2|$,则得到具有所要求性质的圆族方程

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2-C_2^2=0. \tag{1}$$

从恒等式

$$x-C_1+y'(y-C_2)\equiv 0,$$
$$1+y'^2+(y-C_2)y''\equiv 0$$

确定 C_1 和 C_2,把它们的值代入(1)式,得到微分方程

$$y^2y''^2+2y(1+y'^2)y''-y'^2(1+y'^2)^2=0. ▶$$

求满足已知曲线族的微分方程组:

14 $ax+z=b, y^2+z^2=b^2$.

◀把曲线的参数方程表示成如下形式

$$x=x,\quad y=y(x),\quad z=z(x),$$

其中 y 和 z 是连续可微函数. 把它们代入已知方程,得出关于 x 的恒等式

$$ax+z(x)\equiv b,\quad y^2(x)+z^2(x)\equiv b. \tag{1}$$

把这些恒等式对 x 求导数,得

$$a+z'(x)\equiv 0,\quad y(x)y'(x)+z(x)z'(x)\equiv 0,$$

从而 $a=-z'$. 把值 a 代入(1)式中的第一式,有 $b=z-xz'$. 将这个关系式和(1)式中的第二式联立,得出等式 $y^2+2zz'x-x^2z'^2=0$. 因此,未知方程组具有形式

$$yy'+zz'=0, \quad y^2+2xzz'-x^2z'^2=0. ▶$$

15 $x^2+y^2=z^2-2bz, y=ax+b$.

◀与例 14 相同,有

$$2x+2yy'=2zz'-2bz', \quad y'=a,$$

从而求出 $a=y', b=\frac{1}{z'}(zz'-x-yy')$. 把 a 和 b 的值代入原方程,得

$$b=y-xy',$$
$$z'(y-xy')=zz'-x-yy',$$
$$x^2+y^2=z^2-2z(y-xy').$$

最后两个关系式就是要求的微分方程. ▶

16 如果某一微分方程的通解具有形式

$$y=C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x,$$

求它的满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解.

◀把 y 对 x 求两次导数,容易求出相应的微分方程

$$y''+\alpha^2 y=0.$$

为求这个方程的特解,利用初始条件,求出常数 C_1 和 C_2. 有

$$y(0)=(C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x)\big|_{x=0}=C_1=1,$$
$$y'(0)=\alpha(-C_1\sin\alpha x+C_2\cos\alpha x)\big|_{x=0}=\alpha C_2=0.$$

因而 $C_1=1, C_2=0, y=\cos\alpha x$ 是特解. ▶

17 如果微分方程的通解具有形式

$$y=C_1+C_2\ln x+C_3x^3,$$

并满足下列初始条件:

$$y(1)=1, \quad y'(1)=0, \quad y''(1)=2.$$

求它的特解.

◀根据本例的条件,有

$$y(1)=(C_1+C_2\ln x+C_3x^3)\Big|_{x=1}=1,$$
$$y'(1)=\left(\frac{C_2}{x}+3C_3x^2\right)\Big|_{x=1}=0,$$
$$y''(1)=\left(-\frac{C_2}{x^2}+6C_3x\right)\Big|_{x=1}=2.$$

由此求出 $C_1=\frac{7}{9}, C_2=-\frac{2}{3}, C_3=\frac{2}{9}$. 再写出特解

$$y=\frac{7}{9}-\frac{2}{3}\ln x+\frac{2}{9}x^3.$$

建立相应微分方程的工作留给读者. ▶

18　设某个特解满足柯西问题

$$y'=x+y^2,\quad y(0)=1.$$

它能否满足另一个柯西问题

$$y''=1+2xy+2y^3,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1?$$

◀如果特解是二次连续可微的,则从第一个柯西问题求出:

$y''=1+2yy'=1+2y(x+y^2)=1+2xy+2y^3$,及 $y'(0)=1$. 因此这是可能的. ▶

19　设某个微分方程的通解具有形式

$$y=C_1x+C_2e^x+C_3(x+x^2),\quad -\infty<x<+\infty.$$

函数 $y=x+1$ 能否是这个方程的特解?

◀不能. 因为对于任意常数的任何值(也包括 $\pm\infty$),不能从通解公式得出这个函数. ▶

练　习　题

消去常数 C_i,求出下列曲线族的微分方程:

1　$y-\tan(C_1x)=0$.

2　$y=C_1e^{\frac{x}{C_2}}$.

3　$\dfrac{x^2}{1+C_1}+\dfrac{y^2}{2+C_2}-1=0$.

4　$y=C_1\sin\varphi(x)+C_2\cos\varphi(x)$, $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

5　$\rho=C_1\varphi$.

6　$\rho^2+\varphi^2-C_1=0$(ρ,φ 是极坐标).

7　$\begin{cases}C_1y^2-C_2z^2+C_3x=0,\\ C_1\sin y+4C_2e^z-2C_3=0.\end{cases}$

8　$\begin{cases}C_1y+C_2z+C_3x+C_4=0,\\ C_1y^2+C_2z^2+C_3x^2+2C_4=0.\end{cases}$

第1章　一阶微分方程

1　可分离变量的微分方程

1.1　可分离变量微分方程的概念

形如

$$f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}x + g_1(x)g_2(y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

的方程,其中 $f_i,g_i(i=1,2)$是给定的连续函数,$x\in(a,b)$,$y\in(c,d)$,称为可分离变量的微分方程.

为了对方程(1)求积分,首先应该把它的两边除以乘积 $f_2(y)g_1(x)(f_2(y)g_1(x)\neq 0)$,然后利用公式

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(y)\mathrm{d}y\right) = f(x)\mathrm{d}x + g(y)\mathrm{d}y,$$

写出

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}\mathrm{d}y = C. \tag{2}$$

在做除法运算时可能丢失一方程 $f_2(y)=0$ 和 $g_1(x)=0$ 的解.因此,为了得出方程(1)的所有解,应把 $f_2(y)=0$ 和 $g_1(x)=0$ 的解加入积分曲线族(2)中去.

1.2　用自变量的线性代换分离变量

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax+b) \quad (a,b\text{ 是常数}) \tag{3}$$

的微分方程,其中 f 是连续函数,利用变量代换 $t=ax+b$,原方程可化为可分离变量的微分方程

$$(a+bf(t))\mathrm{d}x - \mathrm{d}t = 0.$$

解下列方程:

20　$\sqrt{y^2+1}\mathrm{d}x = xy\mathrm{d}y$.

◀这是一个形如(1)的方程.把它的两边除以乘积 $x\sqrt{y^2+1}$,得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+1}}, \quad x\neq 0,$$

从而

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2+1}} + C,$$

即

$$\ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C.$$

因此，原方程的通解为

$$\ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C, \quad x \neq 0. ▶$$

21　$(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0, y(0)=1.$

◀首先求出这个方程的通解. 我们有

$$(x^2-1)dy + 2xy^2 dx = 0,$$

由此分离变量 x 和 y，得

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{2x dx}{x^2-1} = 0.$$

对所得的方程两边求积分，求出

$$-\frac{1}{y} + \ln|x^2-1| = C. \tag{1}$$

为了得出原方程的通解，还要把解 $y=0$ 加入最后的积分曲线族中去.

其次，从所有积分曲线族中选出一条经过点(0,1)的曲线. 在(1)式中设 $x=0$ 和 $y=0$，求出 $C=-1$. 因此函数

$$y = \frac{1}{1+\ln|x^2-1|}$$

是本题的解. ▶

22　$xy' + y = y^2, y(1)=0.5.$

◀把方程写成形式

$$x dy + (y-y^2) dx = 0, \tag{1}$$

并分离变量，有

$$\frac{dy}{y-y^2} + \frac{dx}{x} = 0.$$

求积分，得

$$xy(1-y) = C. \tag{2}$$

我们看到，虽然方程两边除以 $x(y-y^2)$，但是没有失去它的解 $x=0, y=0, y=1$. 最后把 $x=1, y=0.5$ 代入(2)式，求出 $C=\frac{1}{4}$. 因此，可微曲线

$$4xy(1-y) - 1 = 0$$

是本题的解. ▶