山东大学

硕士学位论文摘要汇编

理科版

1985

山东大学研究生处

目　录

基　础　数　学

计　算　数　学

运　筹　学　与　控　制　论

固　体　物　理

磁 学

分 析 化 学

高 分 子 化 学

发 育 生 物 学

植 物 学

微 生 物 学

Hermite-Mahler 公式的若干应用

理学硕士　郑洪流　　指导教师　潘承洞教授

一八七三年，*Hermite* 在他的论文中，将逼近函数引入了超越数理论的研究。这种方法以后被许多数学家应用于同领域的研究，本文在 *Mahler* 及其它一些人 工作的基础上，应用这种方法讨论了超越数理论中的若干问题，获得了如下的一些结果。

定理1　设α为次数$\leqslant s$，高$\leqslant H_1$的代数数，则对任意非零的有理整系数多项式

$$P(z)=\sum_{i=0}^{N}x_i z^i$$

恒有

$$|P(e^{\alpha})|\geqslant H^{-2s(2s-1)N+1-c_1N^2/\log\log H}\quad(H>H_0(\alpha、N))$$

其中$H=\max\{|x_0|,\cdots|x_N|\}$，$c_1$只与$\alpha$有关。

定理2，设 $0=b_1<b_2<\cdots<b_r=b$ 为有理整数，$C_i(i=1,\cdots r)$ 也为有理整数，则有

$$|C_1e^{b_1}+\cdots+C_re^{b_r}|>H^{1-r-\frac{cr^2b\log^r}{\log\log H}}$$

其中$H=\max\{|C_1|,\cdots|C_r|\}>0$，$C$为绝对常数。

定理3，设$\alpha_0,\alpha_1\cdots\alpha_m$为数域$K$中的代数整数，$[K:Q]\leqslant s$，$\alpha_i$ 的高 $\leqslant H(i=0,\cdots m)$，$b_i(i=0\cdots m)$满足同定理2的条件，则有下述结论：设

$$\varepsilon=\max_k|e^{b_k w}-\alpha_k|$$

ω为K中整数，则

$$\varepsilon>H^{-(m+1)\frac{s-1}{m+1-s}-(m+1)\frac{s-1}{(m+1-s)\log\log H}}\cdot$$

$$\log e^{6\Omega s}m^{\Omega s}\theta^{-s+1}|\omega|^{m+1},\qquad(m>s,\ H>H_0(b_k,\omega,s))$$

定理4　设β为高$\leqslant H$，次数$\leqslant S_1$的代数数，则有

$$|e-\beta|>\begin{cases}H^{-\frac{2S_1^2}{2(2[\sqrt{2}S_1]-S_1}-C_1S^3/\log\log H}, & \beta\text{为实}\\ H^{-\frac{S_1^2}{[\frac{\sqrt{2}}{2}S_1]-S_1)}-\frac{C_2S_1^3}{\log\log H}}, & \beta\text{不为实}\end{cases}$$

C_1, C_2为绝对常数。

定理5　设 β 同定理4，$s=[Q(\alpha,\beta):Q]$，则有

则有
$$|e^{\alpha}-\beta|>H^{-\frac{2s(2s-1)}{s_1}-C_3 s^3/\log\log H}\qquad (H>H_0(\alpha,s))$$

C_3为绝对常数。

定理6，设β 同定理4，α为次数$\leqslant s_0$，高$\leqslant H_0$ 的代数数，n为自然数，n,α满足

$$n^{-1}|\log\alpha|<e^{-1.76(1+\frac{1}{n})s-\frac{1}{n}}(s_0+1)^{-\frac{s}{s_0 n}}(H_0+1)^{-\frac{s_1}{n}}$$

则有

$$|\log\alpha-\beta|>\frac{1}{2}H^{-\frac{sn}{s_1}}\exp\left\{-\frac{s}{s_1}\cdot\frac{1.76(n+1)s+(s_1+1)\log(H_0+1)+\frac{s}{s_0}\log(s_0+1)}{\log(n|\log\alpha|^{-1})-1.76\frac{(n+1)s}{n}-\frac{s}{ns_0}\log(s_0+1)-\frac{s_1}{n}\log(H_0+1)}\log H\right\}$$

其中 $s=[Q(\alpha,\beta):Q]$。

定理7　设ξ_1为次数$\leqslant N_1$，高$\leqslant H_1$，ξ_2为次数$\leqslant N_2$，高$\leqslant H_2$的代数数，$H=\max(H_1,H_2)$，α为任一复数，则有

$$\max(|e^{\alpha}-\xi_1|,|\alpha-\xi_2|)>\exp\left\{-2N^2\left(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}\right)^2\log^2 H/\log\log H\right\}$$

$(H>H_0(\alpha,N_1,N_2))$，$N=[Q(\xi_1,\xi_2):Q]$。

环的单位扩张与同调维数

理学硕士　孙伯奎　　指导教师　贾启恒副教授　王树棠讲师

对于一个环R，无论有没有幺元，都可以把它嵌入一个有单位元的环中。一个最自然合理的办法是做出$R\Delta Z$，这里Z表示整数环$R\Delta Z$的加群结构同于$R\oplus Z$，其乘法规定为$\forall(r,n),(r_1,n_1)\in R\Delta Z,(r,n)(r_1,n_1)\equiv(rn_1+nr_1+n_1r,nn_1)$，这样(0,1)就成了环$R\Delta Z$的幺元。其实这种关系可以推广到更一般的情形，为此引入定义：

定义：若R是一个环(rng)，S为一个有单位元的交换环并且R为S一模，定义一个有单位元的环$R\Delta S$如下：做为$Abel$加群 $R\Delta S=R\oplus S=\{(r,s)|r\in R,s\in S\}$，其乘法规定为，$(r,S)(r_1,S_1)=(rr_1+Sr_1+S_1r,SS_1)$可以证明 $R\Delta S$ 确是有单位元的环，称为R的S一单位扩张。

很明显R和S分别做为$Sub—rng$和$Sub-ring$嵌入到$R\Delta S$里，若e是S的单位元，则$(0,e)$是$R\Delta S$的单位元。

我们知道同调维数是在某种意义下同调复杂性的一种度量。那么很自然地提出以下问题：两个环，它们之间结构上有某种关系时，它们的整体维数之间相应地会有什么关系？许多文献中有关于这类问题的研究。而本文尝试研究一下形如上述$R\Delta S$这种情况，探讨一下它的同调维数如何依赖于R和S。

先做些准备。若R和S都是有单位元的环，$M\in R-mod$ $N\in S-mod$ 则可赋予卡积$M\times N$一个自然的$R\times S-$模结构。（$R\times S$代表环乘积）也即$R\times S$对$M\times N$的纯量乘法是逐项作用。反过来，若D是任何一个$R\times S-$左模。记$RD=\{(r,0)d|r\in R,d\in D\}$则$RD$是$D$的$R\times S-$子模，从而也是$R-$模，同理$SD$成为S－模关于这种情况，有命题：

命题1：对任何$R\times S-$模D，总存在$M\in R-mod$ $N\in S-mod$ 使有$R\times S-$模同构$D\simeq M\times N$，并且可特别地取

$M=RD$，$N=SD$.（证明略）

在确定了$R\times S-$模都具有$M\times N$这种形式之后，我们可进而确定$R\times S-$模同态的一般形式：

命题2、若$D=M\times N\in R\times S-mod$。这里$M\in R-mod,N\in S-mod$，则

1）若D'为D的$R\times S-$子模，则有子模$M'\subset M$和$N'\subset N$（分别是$R-$子模和$S-$子模）使$D'=M'\times N'$

2）若$M'\times N'$为$M\times N$的$R\times S-$子模，则有$R\times S-$同构：

$$(M\times N)/(M'\times N')\cong(M/M')\times(N\times N')$$

$$(m,n)+M'N'\to(m+M',n+N')$$

3）若$M_1\times N_1$为另一$R\times S-$模，f为任一$R\times S-$同态

$f:M\times N\to M_1\times N_1$，则存在$R-$同态$d:M\to M_1$和$S-$同态$\varepsilon$：$N\to N'$使$f=(d,\varepsilon)$：$M\times N\to M_1\times N_1$

$$(m,n)\to(d(m),\varepsilon(n))$$

（证明略）

命题3：（利用命题2可证）若$D_i=M_i\times N_i$是$R\times S-$模，$i\in I$某指标集，$M_i\in R-mod$，$N_i\in S-mod$，则有$R\times S-$同构：

$$f:\coprod_{i\in I}Di\longrightarrow(\coprod_{i\in I}Mi)\times(\coprod_{i\in I}Ni)$$

$$((m_i,n_i))_{i\in I}\to((m_i),(n_i))$$

下面的推论在以后要用到

推论：若$D=M\times N\in R\times S-mod$ $M\in R-mod$，$N\in S-mod$，则D是$R\times S-$投射模的充要条件为M是$R-$投射模且N是$S-$投射模。（证明略）

利用上述结果，可以确定出环乘积的维数

命题4：若R，S为两个环，都有单位元，则有：

$$l\cdot gl\cdot dim(R\times S)=\max\{l\cdot gl\cdot dimR,\ l\cdot gl\cdot dimS\}$$

（证明略）

下面的讨论是针对弱维数的。

命题5：若$G\in mod-R, H\in mod-S, M\in R-mod N\in S-mod$，则有$Abel$群同构：

$$(G\times H)\oplus_{R\times S}(M\times N)\overset{Z}{\cong}(G\otimes_R M)\times(H\otimes_S N)$$

（证明略）

注：前面讨论的 $R\times S$－左模的理论可完 全搬到关于右模的情形，从而使得命题5中的符号有意义。

推论：若$G\in mod-R, H\in mod-S$，则

$G\times H\in mod-R\times S$是平坦模$\Leftrightarrow G\in mod-R$和$H\in mod-S$都是平坦模。

（证明略）

利用这些命题，可确定弱维数：

命题6：对两个有单位元的环R和S。有

$w\cdot gl\cdot dim(R\times S)=max\{w\cdot gl\cdot dim\ R,\ w\cdot gl\cdot dim\ S\}$ （证明略）

现在研究$R\Delta S$假设R有单位元素。情况较简单，这时可得到以下 命题：

命题7：设R，S均为有单位元的环，$R\Delta S$有定义，则有环同构$R\Delta S\cong R\times S$。右端为一般的环乘积。

（证明略）

因此将此命题与命题4相结合便可得到如下推论：

推论：若R有单位元，$R\Delta S$有定义，则：

$$l\cdot gl\cdot dim\ R\triangle S=max\{l\cdot gl\cdot dim\ R,\ l\cdot gldimS\}$$

$$w\cdot gl\cdot dimR\Delta S=max\{w\cdot gl\cdot dimR,\ w\cdot gl\cdot dimS\}.$$

由于整体维数是一个整体概念。它决定于R和S的整体结构与其联系，下面我想看一看，如果固定了一个S。对不同的R，$R\triangle S$的维数会取到哪些值，首先有以下命题：

命题8：设无单位元的环R使$l\cdot gl\cdot dimR\Delta S=n<\infty$

则存在无单位元的环R_1使$l\cdot gl\cdot dimR_1\Delta S=n+1$

（证明略）

从而，我们可归纳地得到

推论：对任何$n\geqslant l\cdot gl\cdot dimS$。存在设有单位元的环$R$，使 $l\cdot gl\cdot dimR\Delta S=n$

又利用下面引理

引理：T和V都是环，其中V设有幺元，T 有幺元。$V\triangle S$有定义，$T\in S-mod$。则有环同构

$$(T\oplus V)\Delta\simeq T\times(V\Delta R)$$ （证明略）

可证明：

命题9：对任何有单位元的可换环S，存在无单位元的环R，使

$l\cdot gl\cdot dimR\Delta S=\infty$

$R\Delta S$的维数有可能严格小于S的整体维数吗？这个问题有待进一步研究，然而下面的命题指出两者差别的一个界限：

命题10：如果$proj\cdot dimSR=t$，则 $l\cdot gl\cdot dimS-l\cdot gl\cdot dimR\Delta S\leqslant t$

结语：本文对R的S－单位扩张$R\times S$及同调维数的关系做了一些初步研究，这在以前的文献中没发现有人研究过、当然还有许多问题待进一步探索和细致地分析。

相　对　遗　传　模

理学硕士　唐忠明　　指导教授　贾启恒副教授　王树棠讲师

给定环R上的一个模M,$G.Azumaya$给出了M-投射模和M-内射模的定义。这些概念被$M.S.Shrikhande$[6]用来研究遗传模和余遗传模。$Azumaya$,$Mbuntum$ 和$Varadarajau$[2]得到了直和是M－内射的充要条件、M－投射模和M－内射模的基本性质已收集在$Anderson$和$Fuller$[1]中。

在本文中、R是带有单位元的结合环。所有模都是左R－酉模。我们把映射写在元素的右边。因而，如果M是左R－模。$S=End_R(M)$,则M是左R－,右S－双模。$M^{(A)}$表示A个M的付本的直和。

用内射模在正向极限及直和下的内射性来表征 $Noether$ 环是一个很著名的结论。下面的定理把这个结论推广到相对内射模。

1.定理.对环R。下列结论等价。

（1）R是左 $Noether$ 环。

（2）在有向指标集上。对任意的R－模M,M－内射模的正向极限是M－内射的。

（3）对任意的R－模M，M－内射模的直和是M－内射的。

由这个定理，可得下列推论。

2.推论.设R是左$Noether$环,M、N是R－模,如果N的所有有限生成的子模是M－内射的，则N是M－内射的。

3 推论.设R是左$Noether$环，M，N是R模，且有N的子模的递增序列：

$$N_1\subseteq N_2\subseteq N_3\subseteq\cdots\cdots$$

如果每个N_i是M－内射的，则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}N_i$也是$M$－内射的,关于遗传环。我们有下列等价条件。

4.命题.环R是遗传环的充要条件是当R－模M是投射时就有M－内射模的商是M－内射的。

$Shrilkhande$[6]称子模都是投射的投射模为遗传模、在本文中，我们推广了这个概念，给出了弱相对遗传模。弱相对余遗传模和相对遗传模的定义。并讨论了它们的一些性质。

5.定义，设M，N是R－模。N称为是相对于M是弱遗传（或M－弱遗传的),如果N的每个M－子模是M－投射的。N称为是相对于M是弱余遗传的（或M－弱余遗传的），如果N的每个M－同态像是M－内射的。

6．命题．如果模P的每个子模是M－投射的，则每个P－内射模的M－同态像是P－内射的。

7．推论．如果M的每个子模是M－投射的。则所有M－内射模都是M－弱余遗传的。

对偶地，我们有：

8．命题．如果P的每个同态像是M－内射的，则每个P－投射的M－子模是P－投射的。

9．推论．如果M的每个同态像是M－内射的。则所有M－投射模都是M－弱遗传的。

10．推论．如果M是拟投射、拟内射的R－模（例如，$M=R$为自内射环）则下列结论等价：（1）所有M－投射模是M－弱遗传的；

（2）所有M－内射模是M－弱余遗传的。

特别考虑R投射模，可得：

11．命题．设R是一个环。P是一个R－投射模，$P=P_1+R_x$如果对R的所有左理想I，R/I是Rx－内射的，则P_1也是R－投射的。

12．推论．设$P=Rx_1+\cdots+Rx_n$是有限生成的R－投射模、如果对R的所有左理想I，R/I是Rx_i－内射的，$i=1,\cdots,n$.则P的每个子模是P－投射。

13．定义．模P称为是M（半）遗传的（或相对于M是（半）遗传的）如果P的每个(有限生成的)子模是M－投射的。如果P是P－(半)遗传的，则称P是自(半)遗传的，对偶地，可定义M－余遗传模。

14．命题．如果P是自遗传的，则对任意整地$n>0$.$P^{(n)}$也是自遗传的。

15．命题．如果P是有限生成的$Noether$自遗传模。则对任意集合A，$P^{(A)}$是自遗传的。

16．命题．如果P是自半遗传的。则对任意集合A,$P^{(A)}$也是自半遗传的。

利用这些关于直和的结论、我们来研究自遗传模的自同态环。

17．命题．如果P是自遗传模、则环$S=End_R(P)$的每个主左理想是投射的。

18．定理．如果P是自遗传的左R－模，则环$S=End_R(P)$是左半遗传的。

19．定理．如果投射模P是有限生成的$Noether$自遗传模。则环$S=End_R(P)$是左遗传的。

最后，我们考虑完全环上的不可分投射自遗传模，我们知道半完全环上的不可分投射模由它的本原幂等元确定。因而只需考虑完全环的本原幂等元。

20．命题．设R是左完全环，$e\in R$是本原幂等元。如果Re是自遗传的。则eRe是一个除环。

21．命题．设R是左完全环。$\{e_i|i=1,\cdots,n\}$是R的正交本原幂等元集。且$1=e_1+\cdots+e_n$，如果每个Re_i是自遗传的，则R是半准素的。

角域内的亚纯函数

理学硕士　扈培础　　指导教师　莫叶教授

用D表示 z －平面上的一个域，$\bar{D}$表示其闭包，Γ表其边界。设 $f(z)$ 是D内的亚纯函数，在Γ上没有零点和极点，则有$R.Nevanlinna$公式：

$$\log|f(z)| = -\sum_{\nu} g(a_\nu, z) + \sum_{\mu} g(b^\mu, z) - \frac{1}{2\pi}\int \log|f(\zeta)|dh(\zeta, z). \tag{1}$$

其中$\{a_\nu\}$,$\{b_\mu\}$分别表示$f(z)$在D内的零点和极点，且 $z\in\{a_\nu, b_\mu\}$，g 是域D的 $Green$函数，h 是 g 的共轭函数。

由于$Green$函数 g 由域D唯一确定，从而公式（1）充分显示了亚纯函数的最基本特征：$f(z)$ 在D内的取值与域D的变化有关；当域D给定时，$f(z)$的值由其零点，极点和边界值唯一确定。前一种关系在多复变函数理论中给出了深入的研究，这就是由$Hartogs$首先提出而经$E.E.Levi$,OKa等人发展了的全纯域与拟凸域的等价性问题。在单复变的情形，$E.Landau$定理是突出的一例。后一种关系的重要性由$R.Nevanlinna$所发现，1925年，他在$Poisson-Jensen$公式的基础上引进了充分反映亚纯函数这一特性的特征函数$T(r,f)$，并且建立了值分布论近代研究中起重要作用的两个基本定理。$T(r,f)$是与圆域相联系的特征函数，根据公式（1），对其它一些较规则的域也可引入相应的特征函数，角域就是其中之一。

设$f(z)$是角域$\{\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta\}$，$0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi$内的亚纯函数，用 $A_{\alpha\beta}(r,f)$，$B_{\alpha\beta}(r,f)$，$C_{\alpha\beta}(r,f)$,$S_{\alpha\beta}(r,f)$分别表示相应的$f(z)$的$Nevanlinna$ 特征函数。关于这些特征函数也可建立两个基本定理。同时于1925年，$R.Nevanlinna$ 猜想

$$A_{\alpha\beta}(r,\frac{f'}{f}) + B_{\alpha\beta}(r,\frac{f'}{f}) = o(S_{\alpha\beta}(r,f)), r\to\infty, \tag{2}$$

至多除去 r 的一个测度有限的集合。

1970年，A,A,Гольдберг 和И.В.Островский证明了：若 $f(z)$为全平面上的亚纯函数，则成立

$$A_{\alpha\beta}(r,\frac{f'}{f}) + B_{\alpha\beta}(r,\frac{f'}{f}) = o(T(r,f)),\ r\to\infty,$$

至多除去 r 的一个测度有限的集合。

$R.Nevanlinna$猜想至今未有证明。本文在适当条件下证明了该猜想成立并得到了关于$Riemann$的 ζ 函数的二个结果

由于一般角域可借助变换化到半平面的情形，因此我们只需讨论半平面上的亚纯函数即可。

设$f(z)$是半平面$\{Imz\geqslant 0\}$内的亚纯函数，则可选取适当小正数$\varepsilon(0<\varepsilon<\frac{\pi}{4})$，使得$f(z)$在较大一点的域$\{-\varepsilon\leqslant argz\leqslant \pi+\varepsilon\}$内亚纯，令

$$\alpha=-\varepsilon,\ \beta=\pi+\varepsilon,\ l=\frac{\pi}{\pi+2\varepsilon},\ 0<\lambda<1.$$

$$D_{\alpha\beta}(R)=\{z:\alpha<argz<\beta,\ 0<|z|<R\},$$

用$\{a_\nu=r_\nu e^{i\varphi_\nu}\}$，$\{b_\mu=\rho_\mu e^{i\varphi_\mu}\}$表示$f(z)$在$D_{\alpha\beta}(R)$内的零点和极点，记

$$x_{\alpha\beta}(r,f)=\frac{l}{\pi}\int_\alpha^\beta \sin l(\varphi-\alpha)\left\{(1+\frac{1}{r^{2l}})\log^+|f(e^{i\varphi})|+\right.$$

$$\left.+(1-\frac{1}{r^{2l}})\frac{\partial}{\partial\rho}\log^+|f(\rho^{\frac{1}{l}}e^{i\varphi})|_{\rho=1}\right\}d\varphi,$$

$$c(r,\lambda,\varepsilon,f)=\sum_{\substack{1<\rho_\mu\leqslant r\\ -\varepsilon\leqslant\psi_\mu\leqslant 0,\pi\leqslant\psi_\mu\leqslant\pi+\varepsilon}}\sin^\lambda l(\psi_\mu+\varepsilon),$$

$$\mathring{S}(r,\varepsilon,f)=\frac{1}{\pi}\int_1^r\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}+\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{t^2}-\frac{t^l}{r^{2l}}\right)\left(\mathring{f}(te^{i\varphi})\right)^2 t\sin(\varphi+\varepsilon)d\varphi dt,$$

$$\mathring{f}(z)=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}.$$

定义$f(z)$在半平面$\{Imz\geqslant 0\}$内的增长指数为

$$w=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^+S(r,f)}{\log r}.$$

若$f(z)$满足条件

$$\lim_{r\to\infty}\frac{S(r,f)}{\log r}=\infty,$$

则我们称$f(z)$是半平面$\{Imz\geqslant 0\}$内的超越亚纯函数。

本文假设$f(z)$满足如下条件：存在正实数，M,p及$0<\lambda<1$使得

$$\left.\begin{array}{l}C(r,\lambda,\varepsilon,f)\\ C(r,\lambda,\varepsilon,\frac{1}{f})\\ \mathring{S}(r,\varepsilon,f)\end{array}\right\}\leqslant M(rS(r,f))^p. \tag{3}$$

例如当$f(z)$在实轴附近无零点和极点并且有界时，条件（3）成立。本文中不带下角标的特征函数均表上半平面之特征函数。

定理1．设$f(z)$是$\overline{D_{\alpha\beta}(R)}$内的亚纯函数，则对于$1<r<R$，有

$$S_{\alpha\beta}(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C_{\alpha\beta}(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}})d\theta+x_{\alpha\beta}(r,f).$$

推论　$S_{\alpha\beta}(r,f)-x_{\alpha\beta}(r,f)$为递增函数。

定理2　设$f(z)$是$\{Imz\geqslant 0\}$内的亚纯函数，满足条件（３），则存在常数K，使得对于$1<r<\rho$有

$$A(r,\frac{f'}{f})+B(r,\frac{f'}{f})\leqslant K\{1+\log^+\frac{1}{r-1}+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log\rho+\log^+S(\rho,f)\}.$$

定理3　设$f(z)$是$\{Imz\geqslant 0\}$内的亚纯函数，满足条件（３），则当$f(z)$的增长指数有穷时

$$A(r,\frac{f'}{f})+B(r,\frac{f'}{f})=o(\log r),\ r\to\infty.$$

当$f(z)$的增长指数为无穷时

$$A(r,\frac{f'}{f})+B(r,\frac{f'}{f})=o\{\log(rS(r,f))\},r\to\infty,$$

至多除去r的一个测度有限的集合。

推论　设$f(z)$是$\{Imz\geqslant 0\}$内的超越亚纯函数，满足条件（３）。则*Nevanlinna*猜想成立。

定理4　*Riemann*猜想成立的一个充分必要条件是

$$\lim_{R\to\infty}\left\{\frac{1}{\pi R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\log|\zeta_0(Re^{i\theta})|d\theta+\frac{1}{\pi}\int_0^R\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{R^2}\right)\log|\zeta_0(it)|dt\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{\pi}{2}+\gamma+\log 8\pi\right\}-2.$$

其中$\zeta_0(z)=\zeta(z+\frac{1}{2})/\zeta(\frac{1}{2})$，$\zeta(z)$是*Riemann* ζ－函数，γ是*Euler*常数。

定理5　*Riemann*猜想成立的一个必要条件是

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\log|\zeta_0(it)|\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{4}\left\{\frac{\pi}{2}+\gamma+\log 8\pi\right\}-2.$$

关于微分多项式的几个结果

理学硕士　巩昌镇　　　指导教师　莫叶教授

本文分两部分，第一部分从简单的微分多项式$f'(z)-f^n(z)$出发，得到了函数$f(z)$的一些值分布结果。第二部分对 *Milloux* 关于微分多项式的一条定理进行了推广。

（一）

1959年，$W.K.Hagman$ 证明了这样一条定理：设$f(z)$为z平面非常数的超越亚纯函数，n为一正整数不小于5，则

$$\varphi(z)=f'(z)-f^n(z)$$

取所有有穷复数无穷多次。

1967年，$W.K.Hagmgn$ 又作了这样的推测：设$\{f(z)\}$为D：$|z|<1$内的亚纯函数族，n为一正整数不小于5，若对于$\{f(z)$内的每一函数$f(z)$在D内都有

$$f'(z)-f^n(z)\neq 1$$

则$\{(z)\}$在D内正规。

围绕着整函数与亚纯函数的$f'(z)-f^n(z)$这种组合，$W.K.Hagman$，$D.Drasin$ 等都曾作过研究，得到了许多结论。本文从$f'(z)-f^n(z)$出发得到了$f(z)$的一些值分布结果。

定理1．设$f(z)$为一开平面的亚纯函数，n,k为两个正整数

$$n\geqslant 5 \qquad\qquad k>\frac{n+2}{n-4}$$

令

$$x(z)=\frac{f'(z)-1}{f^n(z)}$$

则当$x(o)\neq 0,1,\infty,x'(o)\neq 0,f'(o)\neq 1$时，有

$$(n-4-\frac{n+2}{k})T(r,\ f)\leqslant(1-\frac{1}{k})\bar{N}_{k-1}(r,\frac{1}{x-1})+S(r,f,x)$$

其中

$$S(r,f,x)=3m(r,\ \frac{f'}{f^1})+m(r,\ \frac{x}{x'})+m(r,\ \frac{x'}{x-1})+\frac{n}{k}\log\frac{1}{|f(o)|}$$

$$+\frac{1}{n}\log\frac{1}{|f'(o)-1|}+(1-\frac{1}{n-2})\log|\cdot x_{(0)}|+(1-\frac{1}{k})$$

$$\log|x_{(0)}-1|+4\log 2$$

定理 2．设 $f(z)$为一开平面的亚纯函数，n,k为两个正整数。

$$n\geqslant 5 \qquad k>\frac{n+2}{n-4}$$

若

$$x(z)=\frac{f'(z)-1}{f^n(z)}$$

取值 1 的点的重级$\geqslant k$，则 $f(z)$必为常数。

定理 3．设 $f(z)$为$|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 内的亚纯函数，n为一正整数，且$n\geqslant 5$，若 $f(o)\neq 0,\infty$，$x_{(0)}\neq 1$，$x'_{(0)}\neq 0$则有

$$(n-4)T(r,f)\leqslant\bar{N}(r,\frac{1}{x-1})+S_1(r,f,x)$$

其中

$$S_1(r,f,x)=(1-\frac{1}{n-2})m(r,\frac{f'}{f})+m(r,\frac{x'}{x})+m(r,\frac{x'}{x-1})$$

$$+\log|f_{(0)}|+\log|\frac{x_{(0)}-1}{x'_{(0)}}|+(2-\frac{1}{n-2})\log 2$$

定理 4．设函数 $f(z)$在$|z|<1$内亚纯，$n\geqslant 5$，若$f_{(0)}\neq 0$，∞，$x_{(0)}\neq 0$，1，$x'_{(0)}\neq 0$，∞，

则对于$0<r<1$有

$$T(r,f)<C\{\log^+|f(o)|+\log^+|x_{(0)}|+\log^+\frac{1}{|x'_{(0)}|}$$

$$+\bar{N}(r,\frac{1}{x-1})+\log\frac{2}{1-r}\}$$

其中常数 C 仅依赖于n。

定理 5．设函数 $f(z)$在$|z|<1$内解析，且在此园内

$$x(z)=\frac{f'(z)-1}{f^n(z)}\neq 1$$

若 $f_{(0)}\neq 0,\infty$，$x_{(0)}\neq 0$，$x'_{(0)}\neq 0,\infty$

则对于$0<r<1$有

$$\log|M(r,f)\leqslant\frac{c}{1-r}\{\log^+|f_{(0)}|+\log^+|x_{(0)}|+\log^+\frac{1}{|x'_{(0)}|}+\log\frac{2}{1-r}\}$$

其中 c 仅依赖于 n.

（二）

1940年，*Milloux*得到如下结论：

定理 A、设函数

$$f(z),\ \alpha_0(z),\ \alpha_1(z),\cdots\cdots,\alpha_l(z)$$

为$|z|<1$内的解析函数，并且使得

$$f(z)\neq 0$$
$$x(z)=\alpha_0(z)f(z)+\alpha_1(z)f'(z)+\cdots\cdots+\alpha_l(z)f^{(l)}(z)\neq 1$$
$$x_{(0)}\neq 0,\ x'_{(0)}\neq 0$$

若当 $r\to 1(0<r<1)$时

$$m(r,\alpha_j(z))=O(\log\frac{1}{1-r})\quad (j=0,1,\cdots,l)$$

则

$$m(r,f(z))=O(\log\frac{1}{1-r})$$

本文我们把上述 *Milloux* 的结果推广到一般微分多项式的情形.

定理 1 .设函数

$$f(z),\ \alpha_1(z),\ \alpha(z),\cdots\cdots,\alpha_l(z)$$

为$|z|<1$内的解析函数，并且使得

$$f(z)\neq 0$$
$$x[f]=\alpha_1(z)M_1[f]+\alpha_2(z)M_2[f]+\cdots\cdots+\alpha_l(z)M_l[f]\neq 1$$
$$x[f]_{(0)}\neq 0,\ x'[f]_{(0)}\neq 0$$

若当 $r\to 1(0<r<1)$时

$$m(r,\alpha_j(z))=O(\log\frac{1}{1-r})\quad (j=1,2,\cdots\cdots,l)$$

则

$$m(r,f(z))=O(\log\frac{1}{1-r})$$

*Milloux*理论中有下述基本结论：

定理 B. 设 $f(z)$为 z 面中的超越亚纯函数，且其零点与极点的个数均为有限

$$x(z)=\alpha_0(z)f(z)+\alpha_1(z)f^{(1)}(z)+\cdots\cdots+\alpha_l(z)f^{(l)}(z)$$

其中 $\alpha_j(z)(j=0,\ \cdots,l)$为$z$面亚纯函数，满足$T(z,\alpha_j(z))=0(T(r,f))$，若 $x(z)$ 不为常数，则$x(z)$能取任何有限复数值（零可能除外）无穷次。

把定理A与定理B的内容相结合，采用定理 1 的证明方法，便可得到定理 1 在z平面的表现形式。

定理2．设函数

$$f(z), \alpha_1(z), \alpha_2(z), \cdots\cdots, \alpha_l(z)$$

为z面解析函数，并且使得

$$f(z) \neq 0$$

$$x[f] = \alpha_1(z)M_1[f] + \alpha_2(z)M_2[f] + \cdots\cdots + \alpha_l(z)M_l[f] \neq 1$$

$$x[f]_{(0)} \neq 0 \qquad x'[f]_{(0)} \neq 0$$

若当 $r \to \infty (0 < r < \infty)$ 时

$$m(r, \alpha_j(z)) = 0(\log r) \quad (j = 1, 2, \cdots, l)$$

则 $f(z)$ 必为常数．

附言：在值分布理论的研究中，高阶导数用特殊微分多项式来替代，特殊微分多项式用一般的微分多项式来替代，很多人沿着这条路线得到了很多一般结论。从*Miranda*．*Hayman*．*Drasin*，顾永兴的研究中，我们猜测下述正规定则成立。

设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内的全纯函数族，$\alpha_1(z)$，$\alpha_2(z)$，……，$\alpha_l(z)$ 为 D 内 l 个全纯函数，若对族中每个函数 $f(z)$ 有

$$f(z) \neq 0$$

$$x[f] = \alpha_1(z)M_1[f] + \alpha_2(z)M_2[f] + \cdots\cdots + \alpha_{(z)}M_l[f] \neq 1$$

则函数族 $\{f(z)$ 在 D 内正规．

若这一猜测被证明，很多著名的正规定则将都变成它的推论。

凝聚增算子方程的多重解

理学硕士　杜一宏　　指导教师　郭大钧教授

设 E 为半序 Banach 空间，P 为 E 上的正锥，$f: R_+ \times P \to P$，$H.Amann$ 通过对 f 的导算子进行详细研究，讨论了算子方程 $x = f(\lambda, x)$ 多重解的存在性．$H.Amann$ 的主要结果，是下面的两个定理：

定理 A．设 (E, P) 为半序 Banach 空间，其正锥 P 是正规的且有非空内部，$f: R_+ \times P \to P$ 全连续，二次连续右可微，$f(0,0) = 0$．记 $\Lambda = \{\lambda \epsilon R_+ | \exists x \epsilon P$，使 $x = f(\lambda, x)\}$，$\Sigma = \{(\lambda, x) \epsilon R_+ \times P | x = f(\lambda, x)\}$，$\lambda^* = \sup \Lambda$．如 $\forall (\mu, y) \epsilon (o, \lambda^*) \times P$，$f'(\mu, y) = (f_\lambda(\mu, y), f_x(\mu, y)): R \times E \to E$ 强增，$\lambda^* < \infty$，且 $\exists \mu \epsilon (o, \lambda^*)$，$\rho = \rho(\mu) > 0$ 使 $\sum \cap ([\mu, \infty) \times P) \subset [\mu, \infty) \times \rho B^+$，那么，对每个 $\lambda \epsilon [\mu, \lambda^*)$，$f(\lambda, \cdot)$ 至少有两个不动点。其中 $\rho B^+ = \{x | x \epsilon P, \|x\| \leqslant P\}$．

定理 B．设 (E, P) 为半序 Banach 空间，其正锥 P 正规且有非空内部，$g: P \to \dot{P}$ 全连续，二次连续右可微，渐近线性。设 $g'(\infty)$ 及 $g'(x)(x \epsilon P)$ 都是强正的，又设 $\exists\ y \epsilon \dot{P}$ 及强正線性算子 $u: E \to E$ 使得 $\forall x \epsilon P$，$g(x) \geqslant u(x) + y$，那么 $\lambda_\infty = \dfrac{1}{r(g'(\infty))} \leqslant \lambda^* \leqslant \dfrac{1}{r(u)}$，且 $\lambda_\infty < \lambda^*$ 时，$\Lambda = [o, \lambda^*]$，$\forall \lambda \epsilon (\lambda_\infty, \lambda^*)$，$x = \lambda g(x)$ 至少有两个解。