

上海市教育委员会高校重点教材建设项目

机械工程测试技术 学习辅导

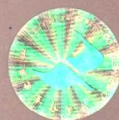
上海市教育委员会 组编

董海森 主编 王蕾 副主编 麦云飞 主审



中国计量出版社

CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE



上海市教育委员会高校重点教材建设项目

机械工程测试技术 学 习 辅 导

上海市教育委员会组编

主 编 董海森

副主编 王 蕾

主 审 麦云飞

中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

机械工程测试技术学习辅导/董海森主编. —北京:中国计量出版社, 2004

上海市教育委员会高校重点教材建设项目

ISBN 7-5026-2027-3

I. 机… II. 董… III. 机械工程—测试技术—高等学校—教学参考资料 IV. TG8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 078316 号

内 容 提 要

本书是为机械工程测试技术课程编写的一本教学辅导用书。由上海市教育委员会组编并被列入上海市教育委员会重点教材建设项目。

全书共分五章:信号及其描述,测试装置的基本特性,常用传感器,信号调理、处理和记录,信号处理初步等。每章内容均由“基本内容”、“典型例题”、“自测练习”三部分组成。重点突出、取材精练、习题类型齐全,具有很好的启发性和引导性。

本书可供高等院校机械类各专业师生参考使用。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

电话(010)64275360

E-mail jlfxb@263.net.cn

北京市迪鑫印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

版权所有 不得翻印

*

787 mm×1092 mm 16 开本 印张 13.5 字数 326 千字

2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月第 1 次印刷

*

印数 1—3 000 定价: 21.00 元

前 言

机械工程测试技术课程作为普通高等院校重要的技术基础课,受到各高校普遍重视,有些工科院校还将该课程列为本科教学中的主干课程和研究生的学位课程。

测试技术课程涉及知识面广、理论较深,在教学过程中,学生普遍反映“难学”,尤其是在做习题时更感困难。本书是针对机械工程测试技术课程的特点而编写的学习辅导用书,书中对教材中的重点、难点内容做条理性归纳、总结,并通过大量的典型例题和自测练习题对考核知识点做详细的分析、解答。旨在给学习者以指导和参考,便于读者更好地掌握教材内容。该书的编写是为提高测试技术课程教学质量的一种尝试。

在内容的编排上,各章均按照“主要内容”、“典型例题”、“自测练习”三部分进行编写。

“主要内容”强调各章基本概念,突出重点,分析难点,便于读者掌握该章的重点与难点内容。

“典型例题”根据课程的重点与难点内容,精选具有典型性的例题做详细的分析与解答,以提高学生解题能力。

“自测练习”依据考试题目类型如:填空题、选择题、简答题、分析题、计算题等多种题型做应试训练。自测练习内容覆盖全面,并附有参考解答。学生通过大量的自测练习可迅速提高应试能力,增强学习信心。

本书由上海理工大学董海森、王蕾编写。其中第一、二、三章由董海森编写,第四、五章由王蕾编写。全书由麦云飞主审。

编 者

2004.7

目 录

第一章 信号及其描述	(1)
第一节 信号的分类及描述	(1)
第二节 信号的反折、延时与尺度变换	(2)
第三节 典型信号的函数表示	(4)
第四节 卷积	(8)
第五节 周期信号的频谱	(11)
第六节 非周期信号的频谱	(17)
第七节 典型例题	(27)
自测练习题 (一)	(41)
自测练习题 (一) 参考解答	(45)
第二章 测试装置的基本特性	(48)
第一节 概述	(48)
第二节 测试装置的静态特性	(52)
第三节 传递函数	(54)
第四节 测试装置的频率特性	(59)
第五节 测试装置对任意输入的响应	(67)
第六节 实现不失真测试条件	(69)
第七节 测试装置动态特性的测试	(71)
第八节 典型例题	(73)
自测练习题 (二)	(84)
自测练习题 (二) 参考解答	(87)
第三章 常用传感器	(88)
第一节 电阻应变式传感器	(88)
第二节 电感式传感器	(93)
第三节 电容式传感器	(100)
第四节 压电式传感器	(105)
第五节 磁电式传感器	(112)
第六节 霍尔传感器	(115)
第七节 光电传感器	(118)
第八节 光纤传感器	(123)
第九节 典型例题	(126)
自测练习题 (三)	(130)
自测练习题 (三) 参考解答	(133)

第四章 信号调理、处理和记录	(135)
第一节 电桥	(135)
第二节 信号的调制与解调	(140)
第三节 滤波器	(145)
第四节 信号的显示记录装置	(152)
第五节 典型例题	(163)
自测练习题(四)	(169)
自测练习题(四) 参考解答	(176)
第五章 信号处理初步	(179)
第一节 概述	(179)
第二节 模拟信号的频谱分析	(179)
第三节 数字信号的频谱分析	(181)
第四节 随机信号及其统计特征参数	(186)
第五节 随机信号的相关分析	(190)
第六节 随机信号的功率谱分析	(194)
第七节 典型例题	(198)
自测练习题(五)	(204)
自测练习题(五) 参考解答	(208)
参考文献	(210)

第一章 信号及其描述

第一节 信号的分类及描述

一、连续信号与离散信号

连续信号是以连续时间 t 为自变量的一种函数描述。

例如：正弦信号 $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

指数信号 $x(t) = A \cdot e^{-at}$

阶跃信号 $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{当 } t \geq 0 \\ 0 & \text{当 } t < 0 \end{cases}$

都属于连续信号。

离散信号是只在一些离散时间的瞬间才有定义的信号。

例如：余弦序列 $x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right); n = \pm 1, \pm 2, \dots$

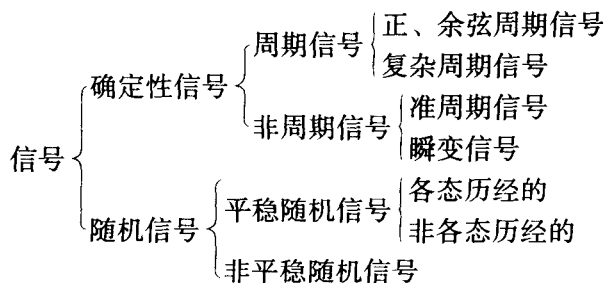
阶跃序列 $u[n] = \begin{cases} 0 & \text{当 } n = -1, -2, \dots \\ 1 & \text{当 } n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$

二、确定性信号与随机信号

确定性信号是可以明确的数学关系式表达的信号。

非确定性信号是无法用明确的数学解析关系式表达的信号，因而无法预见未来某瞬时信号的确切值。非确定性信号通常又称为随机信号。随机信号一般服从统计规律性，可以用概率统计的方法加以分析。

上述两类信号还可做更细的划分如下：



三、周期信号与非周期信号

周期信号是按一定的时间间隔 T_0 ，周而复始重复出现，无始无终的信号，可表达为：

$$x(t) = x(t + nT_0) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (1-1)$$

周期信号是定义在 $(-\infty, \infty)$ 区间上的。

不满足式 (1-1) 的信号, 为非周期信号。非周期信号不具有周而复始的特性。但非周期信号可以看作当周期 T_0 趋于无穷大时的周期信号的特例。

还有一类是介于周期信号与非周期信号之间的准周期信号。当两个以上的正、余弦信号叠加后而不能构成周期信号时, 例如: $x(t) = \sin\omega_0 t + \sin\sqrt{2}\omega_0 t$, 由于两分量的频率比为 $1/\sqrt{2}$, 不是有理数, 两分量找不到共同的重复周期, 也就不能满足式 (1-1), 因此也就是非周期信号。但是, 这类信号仍具有离散频谱的特点, 故称其为准周期信号。

四、能量有限信号与功率有限信号

在研究信号的能量特性和功率特性时, 通常对信号电压或电流在单位电阻上所消耗的能量和功率进行分析。

若信号电压 $x(t)$ 在一单位电阻上的瞬时功率为 $x^2(t)$, ($R=1$), 则信号在 $(-\infty, \infty)$ 区间的信号能量 E 定义为

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x^2(t) dt \quad (1-2)$$

它在无限区间 $(-\infty, \infty)$ 内的平均功率定义为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \quad (1-3)$$

若信号 $x(t)$ 的能量 $0 < E < \infty$, 此时 $P=0$, 则称此信号为能量有限信号, 简称能量信号。例如, 单个矩形脉冲, E 有限, $P=0$, 故为一能量信号。

若信号 $x(t)$ 的功率 $0 < P < \infty$, 此时 $E = \infty$, 则称此信号为功率有限信号, 简称为功率信号。例如, 周期信号一般都为功率有限信号。

五、信号的时域描述和频域描述

时域描述, 以时间 t 为独立变量, 反映信号幅值随时间变化的关系。无法揭示信号的频域构成。

频域描述, 利用傅里叶分析方法, 把时域信号变换成频域信号。以频率作为独立变量, 建立信号与频率的函数关系, 反映了信号各频率成分的幅值, 相位与频率间的关系。频域描述也就是对信号进行的频谱分析。

第二节 信号的反折、延时与尺度变换

一、信号反折

信号反折, 是信号自变量符号取反后的结果。图 1-1 所示反折信号 $f(-t)$ 是将信号 $f(t)$ 以 $t=0$ 为轴反转后得到。

一个信号 $f(t)$, 经反折后不变, 即: $f(-t) = f(t)$, 则此信号称为偶信号。若满足

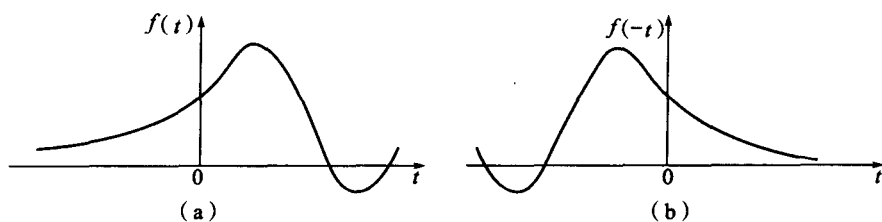


图 1-1 信号的反折

(a) 连续信号; (b) 反折信号

$f(-t) = -f(t)$ 时, 则此信号为奇信号。图 1-2 中, (a) 为偶信号, (b) 为奇信号。

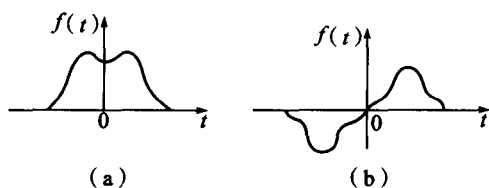


图 1-2 信号的对称性

(a) 偶信号; (b) 奇信号

二、信号延时

延时信号与原信号在波形上完全一致, 但在位置上有一个延迟时间 t_0 。图 1-3 中, $f(t-t_0)$ 是 $f(t)$ 经延时 t_0 后的结果。

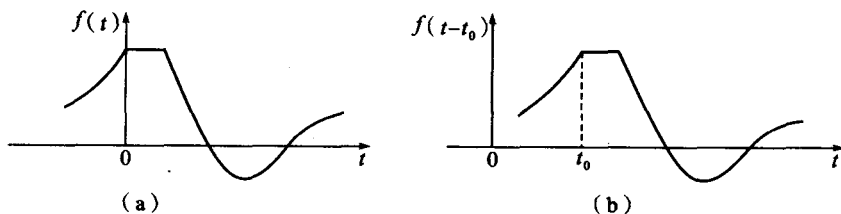


图 1-3 信号的延时

(a) 原始信号; (b) 延时信号

如果将信号的延时与反折相结合就可得到信号 $f(-t-t_0)$ 如图 1-4 所示。需要指出的是, 如果先延时 t_0 得 $f(t-t_0)$ 然后反折, 将 t 变为 $-t$, 则得到 $f(-t-t_0)$; 如果先反折后延时, 由于自变量为 $-t$, 故延时方向与前述相反。则得到信号为 $f(-t+t_0)$ 。

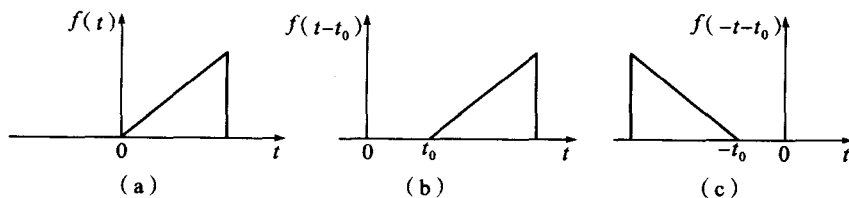


图 1-4 信号的延时与反折

(a) 原始信号; (b) 延时信号; (c) 延时反折信号

三、尺度变换

图 1-5 所示的三个信号 $f(t)$, $f(2t)$ 与 $f(t/2)$ 就是尺度变换的实例。如果把 $f(t)$ 表示为一盘录音磁带的记录信号, 则 $f(2t)$ 是这盘磁带以两倍的速度快速放音的信号, 等于信号在时间上进行压缩。而 $f(t/2)$ 则表示原磁带将放音速度降低一半时慢速放音的信号, 等于信号在时间上实现了扩展。

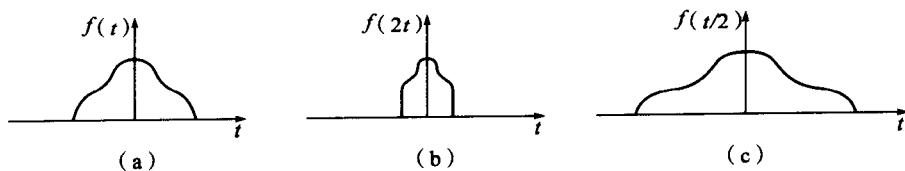


图 1-5 信号尺度变换

(a) 原始信号; (b) 信号时域压缩; (c) 信号时域扩张

第三节 典型信号的函数表示

一、斜坡信号

斜坡信号是从某一时刻开始随时间成正比例增加的信号, 其表达式为

$$R(t) = \begin{cases} at & \text{当 } t \geq 0 \\ 0 & \text{当 } t < 0 \end{cases} \quad (1-4)$$

式中, a 为常数。其波形如图 1-6(a) 所示。如果起始点由 0 点移至 t_0 点时, 则此信号称为延时斜坡信号, 如图 1-6(b) 所示。

当式 (1-4) 中的 a 等于 1 时, 则称为单位斜坡信号。

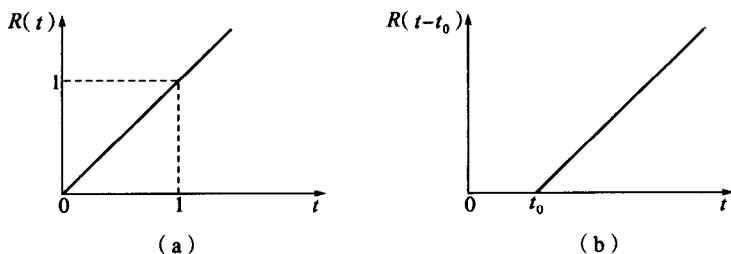


图 1-6 斜坡信号

(a) 波形图; (b) 延时斜坡信号

二、单位阶跃信号

单位阶跃信号的函数表达式为

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{当 } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{当 } t = 0 \\ 0 & \text{当 } t < 0 \end{cases} \quad (1-5)$$

其波形如图 1-7(a) 所示。在 $t=0$ 处, 信号的函数值发生跳变, 可以规定 $u(0) = \frac{1}{2}$, 这是由于在跳变点的函数值等于其左极限 $u(0^-)$ 和右极限 $u(0^+)$ 之和的 $\frac{1}{2}$ 。则

$$u(0) = \frac{1}{2} [u(0^-) + u(0^+)] = \frac{1}{2}$$

单位阶跃函数 $u(t)$ 与单位斜坡函数 $R(t)$ 的关系为

$$\frac{dR(t)}{dt} = u(t) \quad (1-6a)$$

$$\int_0^t u(\tau) d\tau = R(t) \quad (1-6b)$$

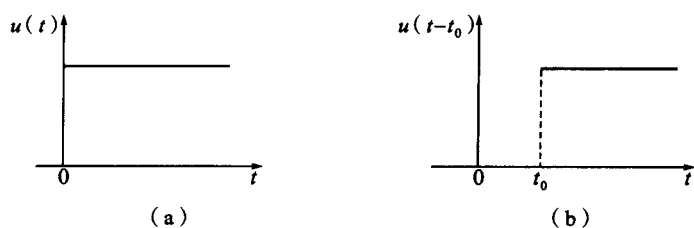


图 1-7 单位阶跃信号

如果函数值发生跳变的时刻延时至 $t = t_0$, 则此信号称为延时单位阶跃信号。波形图见图 1-7(b) 所示, 其表达式为

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{当 } t > t_0 \\ \frac{1}{2} & \text{当 } t = 0 \\ 0 & \text{当 } t < t_0 \end{cases} \quad (1-7)$$

三、单位脉冲信号

单位脉冲信号又称为 δ 函数, 常记为 $\delta(t)$ 。

1. 定义

有一对称矩形脉冲信号 $S_\epsilon(t)$, 其持续时间由 $-\frac{\epsilon}{2}$ 至 $\frac{\epsilon}{2}$, 其幅值为 $\frac{1}{\epsilon}$, 矩形脉冲面积为 1。则当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $S_\epsilon(t)$ 的极限就定义为 δ 函数。图 1-8 所示为矩形脉冲与 δ 函数。

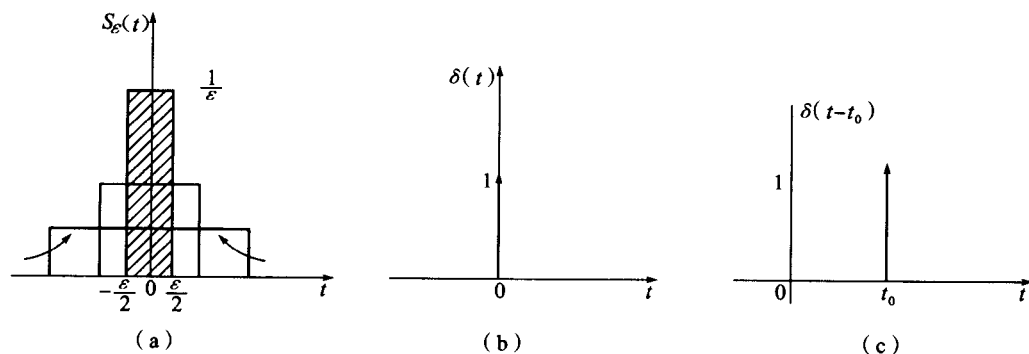


图 1-8 矩形脉冲与 δ 函数

δ 函数有如下特点:

从函数幅值的极限看

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{当 } t = 0 \\ 0 & \text{当 } t \neq 0 \end{cases} \quad (1-8)$$

从面积考虑

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\epsilon}(t) dt = 1 \quad (1-9)$$

从对称性考虑, δ 函数为偶对称信号, 即

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (1-10)$$

2. δ 函数的采样性质

如果 δ 函数与某一连续函数 $f(t)$ 相乘, 显然其乘积仅在 $t=0$ 处为 $f(0)\delta(t)$, 其余各点 ($t \neq 0$) 处之乘积皆为零。而 $f(0)\delta(t)$ 是一个强度为 $f(0)$ 的 δ 函数。如果其乘积 $f(0)\delta(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 区间内积分, 则有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(0) \delta(t) dt \\ &= f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = f(0) \end{aligned} \quad (1-11)$$

式 (1-11) 表明, $f(t)$ 与 $\delta(t)$ 相乘后, 在 $(-\infty, \infty)$ 区间内积分, 最终得到在 $t=0$ 点处的 $f(t)$ 的函数值 $f(0)$ 。这称为 δ 函数的采样性质。与此类似, 若 $f(t)$ 与一延时 t_0 的单位脉冲信号 $\delta(t-t_0)$ 相乘, 并在 $(-\infty, \infty)$ 区间内积分后, 即可得到 $t=t_0$ 点处的函数值 $f(t_0)$ 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (1-12)$$

δ 函数与单位阶跃函数间有如下关系:

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (1-13a)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{当 } t > 0 \\ 0 & \text{当 } t < 0 \end{cases} \quad (1-13b)$$

四、符号函数

符号函数 $\text{sgn}(t)$ 可表示为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{当 } t > 0 \\ -1 & \text{当 } t < 0 \end{cases} \quad (1-14)$$

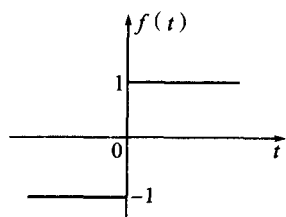


图 1-9 符号函数

其波形如图 1-9 所示。可以看出, 符号函数为一奇函数, 在跳变点 $t=0$ 处可规定为: $\text{sgn}(t) = 0$

$$\text{由于} \quad u(t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

$$\text{于是} \quad u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \quad (1-15)$$

$$\text{或者} \quad \text{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \quad (1-16)$$

式 (1-15), (1-16) 表示了单位阶跃函数与符号函数的关系。

五、实指数信号

实指数信号的函数表示式为

$$f(t) = Ae^{\alpha t} \quad (1-17)$$

式中, α 是实数, 其波形如图 1-10 所示。

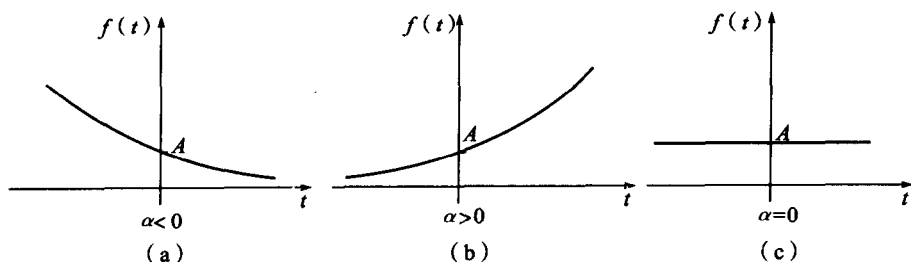


图 1-10 实指数信号

图 1-10(a) 中, $\alpha < 0$, 信号 $f(t)$ 随时间衰减;

图 1-10(b) 中, $\alpha > 0$, 信号 $f(t)$ 随时间递增;

图 1-10(c) 中, $\alpha = 0$, 信号 $f(t) = A$, 为一常数。

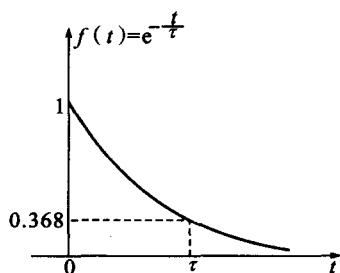


图 1-11 单边指数衰减信号

指数 α 的绝对值大小反映了实指数信号递增或衰减的速率。 $|\alpha|$ 值越大, 则变化速率越快。通常定义实指数信号的时间常数 τ 为 $|\alpha|$ 的倒数。即: $\tau = 1/|\alpha|$, 显而易见, τ 值越大则 $|\alpha|$ 值越小, 信号变化速率越慢。实际上, 比较常见的是单边指数衰减信号, 其波形图如图 1-11 所示。其函数表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } t < 0 \\ e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{当 } t \geq 0 \end{cases} \quad (1-18)$$

上述信号满足 $f(0) = 1$, $f(\tau) = e^{-1} = 0.368$ 。实指数信号是一种实信号, 它对时间的微分或积分仍是指数形式, 这是指数信号的重要特性之一。

六、虚指数信号

虚指数信号的函数表示式为

$$f(t) = e^{-j\omega_0 t} \quad (1-19a)$$

或

$$f(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (1-19b)$$

这种信号具有以下特点:

(1) 它是一个复数, 其实部为余弦函数, 虚部为正弦函数。

$$e^{-j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t - j\sin\omega_0 t \quad (1-20a)$$

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t \quad (1-20b)$$

(2) 虚指数信号是一个周期信号。

$$\text{基波周期} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1-21)$$

$$\text{由于} \quad e^{j2\pi} = 1 \quad (1-22)$$

$$\text{所以} \quad e^{j\omega_0(t+T_0)} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\omega_0 T_0} = e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j2\pi} = e^{j\omega_0 t} \quad (1-23)$$

(3) 虚指数信号是一个时间函数, 它可以用复数平面中的单位旋转向量来表示, 见图 1-12。向量旋转时规定以逆时针方向旋转时的角频率为正频率 ω_0 , 而以顺时针方向旋转时的角频率为负频率 $-\omega_0$ 。

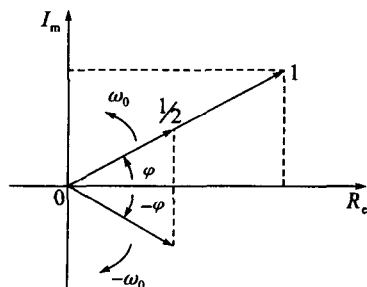


图 1-12 旋转向量的正负频率说明

该旋转向量在实轴上的投影即为信号的实部；在虚轴上的投影为信号的虚部。

七、正、余弦信号

正弦信号和余弦信号可统称为正弦信号，表示式为

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1-24)$$

式中， A 为信号振幅； φ 为初相位； ω 为角频率；当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时，即为余弦信号。

正弦信号的周期 T 与角频率 ω 的关系满足下式

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad (1-25)$$

正、余弦信号还可以用虚指数信号来描述

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}) \quad (1-26)$$

$$\sin \omega_0 t = j \frac{1}{2} (e^{-j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t}) \quad (1-27)$$

第四节 卷 积

一、卷积的定义

信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积定义为

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= f_2(t) * f_1(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (1-28)$$

式中， τ 是积分变量； t 是参变量，卷积的结果是 t 的函数。由定义式可知，卷积过程可分为四步：反折，平移，相乘和积分。

二、卷积积分的图形解释

式 (1-28) 只是一个一般性定义式。当信号中有不连续点（跳变点）。或者当信号只在某个时间域内不为零（称为时限信号）时，式 (1-28) 中卷积积分的上、下限要发生变化，这时上、下限不仅依赖于信号本身，还依赖于卷积过程中信号波形的相对位置。确定卷积积分中的上、下限是卷积的一个难点。以下通过图解方法来解释卷积过程中的上、下限的确定。

图 1-13 所示为信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的波形图。试计算 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积积分：

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

卷积积分可按以下步骤进行：

1. 反折

将 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的自变量 t 用 τ 替换，保持原来的波形。然后将信号 $f_1(\tau)$ 以纵坐

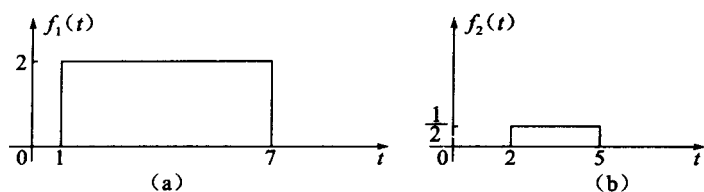


图 1-13 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 波形图

标轴为轴线反折, 得到与 $f_1(\tau)$ 对称的信号 $f_1(-\tau)$ 。如图 1-14(a) 所示。

2. 平移

将 $f_1(-\tau)$ 沿 τ 轴正方向平移 t , 而得到 $f_1[-(\tau-t)]$ 。这个过程实际上是引入参变量 t 。参变量 t 的绝对值 $|t|$ 反映了 $f_1(-\tau)$ 的波形在 τ 轴上的平移距离。当 $t > 0$ 时, $f_1(-\tau)$ 向右平移了 $|t|$ 值, 而当 $t < 0$ 时, 则 $f_1(-\tau)$ 向左平移了 $|t|$ 值。而 $t = 0$ 时, 就是 $f_1(\tau)$ 反折后不移动时的波形图 $f_1(-\tau)$ 。这一步的重要性在于给出了 $f_1(t-\tau)$ 的波形在 τ 轴上的上、下边缘值, 而这些边缘值是以含有参变量 t 的形式给出的。这一步是确定卷积积分上、下限的关键步骤。图 1-14(b) 给出了 $f_1(t-\tau)$ 的波形图, 其中 t 为参变量。而赋予 t 以不同数值时, 则 $f_1(t-\tau)$ 的波形图将位于不同位置上。如图 1-14(c), (d) 所示。

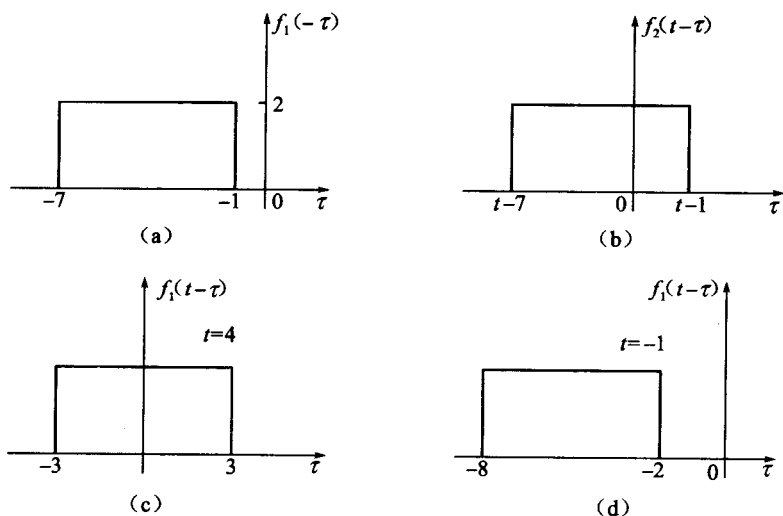


图 1-14 反折与平移

3. 分段相乘并积分

(1) 如图 1-15(a) 所示, 若 $t-1 < 2$, 即 $t < 3$ 时, 则 $f_1(t-\tau)$ 与 $f_2(\tau)$ 没有重叠部分, 因而卷积为零。

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

(2) 如图 1-15(b) 所示, 若 $2 < t-1 < 5$, 即 $3 < t < 6$ 时, 则 $f_1(t-\tau)$ 与 $f_2(\tau)$ 之间有重叠区域为 $[2, t-1]$, 因此

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_2^{t-1} 2 \cdot \frac{1}{2} d\tau = t - 3$$

(3) 如图 1-15(c) 所示, 若 $t-1 > 5$; $t-7 < 2$, 即 $6 < t < 9$, 则 $f_1(t-\tau)$ 与 $f_2(\tau)$

的重叠区域为 $[2, 5]$ 。这时的卷积积分为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_2^5 2 \cdot \frac{1}{2} d\tau = 3$$

(4) 如图 1-15(d) 所示, 若 $2 < t-7 < 5$, 即 $9 < t < 12$ 时, 则 $f_1(t-\tau)$ 与 $f_2(\tau)$ 的重叠区域为 $[t-7, 5]$, 因此有

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{t-7}^5 2 \cdot \frac{1}{2} d\tau = 12 - t$$

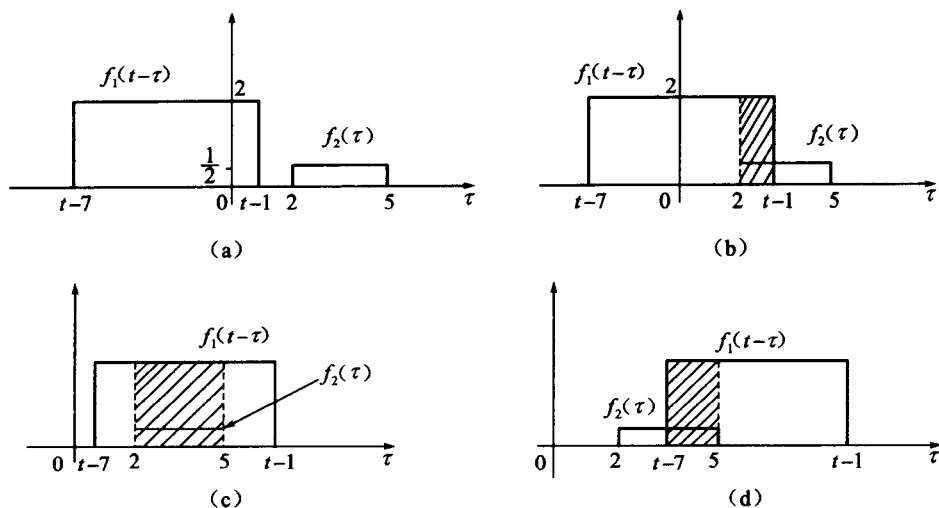


图 1-15 分段相乘

(5) 如果 $t-7 > 5$ 时, 即 $t > 12$ 时, 则 $f_1(t-\tau)$ 与 $f_2(\tau)$ 又无重叠区域。因此

$$f_1(t) * f_2(t) = 0$$

归纳以上的分析, 可得到 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积积分如下:

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } t < 3 \\ t-3 & \text{当 } 3 < t < 6 \\ 3 & \text{当 } 6 < t < 9 \\ 12-t & \text{当 } 9 < t < 12 \\ 0 & \text{当 } t > 12 \end{cases}$$

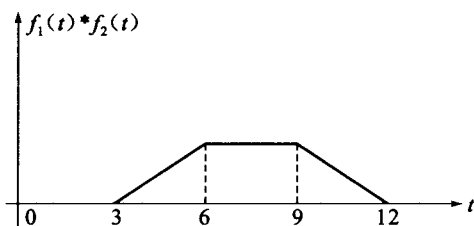


图 1-16 $f_1(t) * f_2(t)$

卷积积分的结果波形图如图 1-16 所示。

三、 δ 函数与其他函数的卷积

(1) 函数 $f_1(t)$ 与单位脉冲函数的卷积的结果是函数 $f(t)$ 本身。即

$$\begin{aligned} f(t) * \delta(t) &= \delta(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(t-\tau) d\tau \\ &= f(t) \end{aligned} \quad (1-29)$$

(2) 函数 $f(t)$ 与延时的单位脉冲函数 $\delta(t-t_0)$ 的卷积其结果是把原来的函数 $f(t)$, 平移至发生脉冲的地方。即 $f(t-t_0)$

$$f(t) * \delta(t - t_0) = \delta(t - t_0) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = f(t - t_0) \quad (1-30)$$

可见, 函数 $f(t)$ 和 δ 函数卷积的结果就是在发生 δ 函数的坐标位置上 (以此作为坐标原点) 简单地将 $f(t)$ 重新构图。

第五节 周期信号的频谱

一、傅里叶级数的三角形式

周期为 T_1 的周期信号 $f(t)$, 满足狄里赫利条件, 就可以展开为傅里叶级数三角形式, 即

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (1-31)$$

式中 ω_1 ——基波频率, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

$$a_0 \text{——直流分量, } a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt \quad (1-32a)$$

$$a_n \text{——余弦分量系数, } a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt \quad (1-32b)$$

$$b_n \text{——正弦分量系数, } b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (1-32c)$$

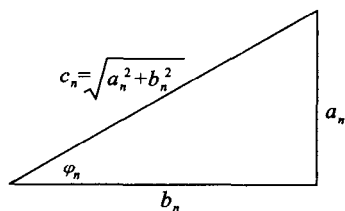


图 1-17 傅里叶级数的辅助三角形

利用图 1-17 所示辅助三角形, 则可得

$$\begin{aligned} & a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos n\omega_1 t + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin n\omega_1 t \right) \\ &= c_n (\sin \varphi_n \cos n\omega_1 t + \cos \varphi_n \cdot \sin n\omega_1 t) \\ &= c_n \cdot \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) \end{aligned}$$

式 (1-31) 可改写为

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (1-33a)$$

$$\text{式中 } c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (1-33b)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n} \quad (1-33c)$$

由式 (1-32) 和式 (1-33) 可以看出, 系数 a_n , b_n , c_n 及相位 φ_n 都是 $n\omega_1$ 的函数。

图 1-18(a) 表示了 c_n 与 $n\omega_1$ 的关系, 称为幅值谱;

图 1-18(b) 表示了 φ_n 与 $n\omega_1$ 的关系, 称为相位谱。

幅值谱与相位谱统称为频谱, 周期信号的频谱, 谱线只出现在 $0, \omega_1, 2\omega_1, \dots, n\omega_1$