SHUXUE

AOLINPIKE

数学奥林匹克

高中版新版 基础篇

主编／单墫

北京大学出版社

数学奥林匹克

高中版新版·基础篇

单 墫 主编

王巧林 刘亚强 编撰

北京大学出版社

·北 京·

数学奥林匹克

高中版新版·基础篇

单　墫　主编

王巧林　刘亚强　编撰

责任编辑：王明舟

*

北京大学出版社出版发行

(北京大学校内)

北京大学印刷厂印刷

新华书店经售

*

787×1092　32开本　18.75印张　400千字

1993年4月第一版　1999年9月第八次印刷

ISBN 7-301-02055-4/G·146

定价：16.00元

凡北大出版社出版的图书，发现漏页、错页，

本社一律负责退换。本社邮编：100871

序

数学竞赛在我国普遍开展，成绩斐然。不少出版社出版了与竞赛有关的图书，起到良好的推动作用。北京大学出版社出版的这套《数学奥林匹克系列图书》就是其中的一种，它能受到广大读者的欢迎我们非常高兴。

这是我国出版的第一套数学竞赛的系列图书。系列中有高中册，也有初中册与小学册；有普及，也有提高；有最新的资料，也有经过系统整理的题解辞典。目前已出 16 册，近两年内还将推出 10 多种。各地奥林匹克学校采用，普遍反映效果很好。一个突出的例子是国家教委所办的理科实验班使用这套图书，每年都为参加国际数学奥林匹克的我国国家集训队、国家代表队输送约 2/3 的队员。

根据各地提出的意见与建议，这套图书作了不少改进，小学册与初中册均出了新版，并编写了高中版。新版致力于“浅”(即深入浅出)、“趣”(生动有趣)。注意普及，面向广大中小学生，避免过深、过难；注意教学原则的运用，循序渐进，适当重复；注意数学思想的启蒙与打好扎实的基础。我们相信这对于发展智力，对于参加竞赛，对于升学考试均有益处。

系列的另一个特点是“新”。有不少新鲜的资料，如《第 31 届国家集训队资料》、《第 31 届国际数学竞赛预选题》、《苏联数学奥林匹克试题汇编》、《美国数学奥林匹克试题汇编》等都及时整理推出。这套系列中，有关国际竞赛的若干册，可以说代表了当前竞赛的最高水平。这些属于提高的分册，已成为我

国集训队人人必备的材料。

除“浅”、“趣”、“新”等特点外，我们还尽力做到“准”，即科学性方面没有错误。各册作者与编者为此付出不少心血，但由于水平与时间等原因，错误与不妥之处仍难完全避免，敬请广大读者不吝指正。

参加编写工作的有教育家，高级教练及有丰富实践经验的中学教师，更有著名数学家丁石孙、王元、王梓坤、龚升诸位先生担任顾问，保证了这套系列图书的质量。

北京大学出版社，重视社会效益，以最快的速度出版这套系列图书，我们表示衷心的感谢。

单 墫

1992 年 9 月

编辑说明

数学奥林匹克事业在中国大地迅猛发展,并得到了党和政府的大力扶持,各级教育行政部门及社会各界也都积极支持这项事业,为中国在国际竞赛中取得优异成绩提供了强有力的保证。

但是,我国正式参加国际竞赛的时间较短,与长期普遍开展这一活动的国家相比,在一些方面还有差距,特别是高水平的基层教练人员不多,可供培训使用的科学性、系统性、针对性都较强的材料贫乏,这些已成为阻碍我国数学竞赛向更高层次、更广范围发展的重要因素。基于此,北京大学出版社从1988年开始,着手组织编写了一套供小学学生到高中学生使用的《数学奥林匹克》系列图书,著名数学家丁石孙、王元、王梓坤、龚升诸先生任顾问,在国内外享有盛誉的数学奥林匹克专家、前国家教练组组长、第31届国际数学竞赛中国国家队领队兼主教练单墫教授任主编,编委及主要作者均为在国内外有一定影响的数学奥林匹克专家。

《数学奥林匹克》系列图书包括三个部分:从小学到高中的培训教材、国内外高水平竞赛材料、国家集训队集训资料;在近期内还将出版竞赛题解辞典。本系列图书自正式出版发行以来,行销全国各地,普遍反映效果很好。国家教委理科实验班及国家集训队、国家代表队都将本系列中的部分图书作为主要培训材料之一。在此,北京大学出版社及系列图书编委会向广大新老读者表示衷心的感谢!

根据各地读者提供的意见与建议，我们在继续及时出版有关国内外竞赛材料的同时，重新组织编写了小学版、初中版、高中版。新版广泛吸取了读者的建议，熔入了国内外各级竞赛的最新材料，特别参照国家教委新颁教学大纲，有层次，有梯度，有特点，旨在使程度不同的学生都可以学有所获。

高中版新版由单墫教授主编，写作提纲由编委会讨论并征求了部分专家、中小学教师及学生的意见。《基础篇》由南京师范大学数学系王巧林、刘亚强撰写，《知识篇》由武钢三中特级教师、武汉市数学教研会副理事长钱展望撰写，《竞赛篇》由中国科技大学数学系教授、第 33 届国际数学竞赛中国队领队苏淳、严镇军撰写。全书由主编单墫教授审定。

为了使这套图书更好地发挥作用，热忱希望读者朋友及社会各界人士提出改进意见。

北京大学出版社将一如既往地为数学奥林匹克事业服务，为振兴中国的数学尽我们的力量。

最后，再次向读者朋友表示衷心的感谢！

1992 年 12 月

目　录

第一讲 几 何 变 换

在众多的几何问题解决方法中，几何变换可算得上是一类独特的方法．其独特之处首推观点上的与众不同：用“运动”的方法去处理几何对象——通过平移、旋转、反射、相似、反演的手法把几何对象“变换”到所需的位置或变为所需的图形，进而获得解决；其次，通过巧妙地运用运动(变换)不变性，可以得到许多令人惊叹的结论．

这里，我们主要运用的变换有合同变换、相似变换．

1．合同变换

合同变换是指不改变两点间距离的变换，即：若 A,B 两点经变换后分别成为 A',B' 点，那么，$AB=A'B'$．由此可知：合同变换亦不改变角度的大小，即：若 $\alpha \xrightarrow{f} \alpha'$（$f$ 是合同变换），则 $\alpha=\alpha'$．进而，合同变换不改变图形的形状和大小，只变更其位置．

合同变换有以下几类：

(1) 平移变换：将图形 F 上各点向同一方向移动同一距离，得到图形 F' 的一种变换．或者说，有一个确定的向量 $\vec{a}$，使得 $\overrightarrow{PP'}=\vec{a}$，$P$ 是平面上任一点，P' 是 P 经变换后的对应点．

显然，平移变换前后的对应线段平行且相等，对应角的两边分别平行且方向一致．

(2) 反射变换：若图形 F 与 F' 关于定直线 l 对称（图

1-1)，则按此方式使得F变到F'的合同变换称为反射变换（或称“轴对称变换”），直线l称为“反射轴”（或“对称轴”）。

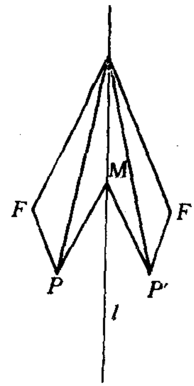

图 1-1

显然，反射变换前后的对应线段、对应角均相等；其反射轴是连接各对应点线段的垂直平分线；各对应点(如P与P')到反射轴l上任一点M的距离相等。

(3) 旋转变换：若将图形F绕定点O旋转一个定角α，得到图形F'，则这种把图形F变为图形F'的合同变换称为“旋转变换”。或者说，平面上有一个定点O，定角α，使得平面上任两点P，Q，有：$PQ=P'Q'$，$\angle POP'=\angle QOQ'=\alpha$，其中，定点$O$称为旋转中心(它的对应点即为自身)，定角$\alpha$称为旋转角(图1-2)。

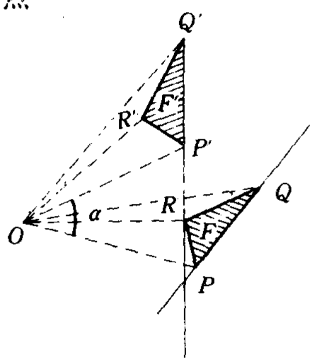

图 1-2

显然，变换前后的图形是全等的，且顺序不变。即：F与F'间对应线段长度相等，各点的位置顺序不变(PQR与$P'Q'R'$均为逆时针排列)，对应角亦相等。

2. 相似变换

相似变换是指：若在两个图形F与F'之间，满足：F上任意两点A，B的距离与其在F'上的对应点A'，B'的距离之比

$\frac{A'B'}{AB}=k$（$k>0$为常数），则称图形F与F'为相似形，而把F变为F'的这种变换就称为“相似变换”。

在相似变换之下，共线点对应于共线点，射线对应于射线，角对应于角，三角形对应于三角形，且对应角相等，对应三角形相似。

特别地，若对应图形F与F'上的任一双对应点P与P'的连线均通过平面上同一定点O，且$\frac{OA'}{OA}=k$（k为非零常数），则称F与F'为位似图形，定点O称为位似中心，常数k称为位似比。其中，当F与F'的对应点的排列顺序相同时，F与F'称为外位似图形($k>0$,O为外位似中心)；当F和F'上对应点的排列顺序相反时，F和F'称为内位似图形($k<0$,O为内位似中心)。

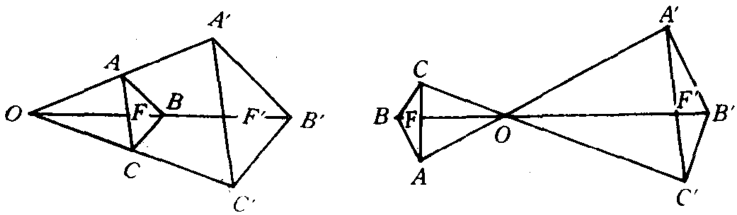

图 1-3

位似变换是一种特殊的相似变换，它除了具备相似变换之各种性质以外，最为明显的性质是变换前后不经过位似中心的对应线段平行。这一性质常被用来证明线段平行。

例1 A,B两村之间有两条平行的河(一河宽为a，另一河宽为b)。从A到B要修两条垂直于河岸的桥，使路程最

近．请你设计修桥地点，并说明根据。

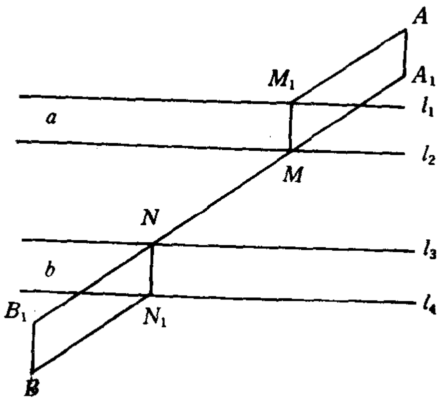

图 1-4

分析 设河岸分别为 l_1,l_2,l_3,l_4。若桥分别为 M_1M，N_1N，从 A 到 B 需走的路线是 AM_1MNN_1B。而 $M_1M=a$，$N_1N=b$，要使道路最近，只需 AM_1+MN+N_1B 最短即可，此时三线段应在同一平行方向上。不妨设想先"过桥"，即平移 M_1M 于 AA_1，平移 N_1N 于 BB_1。从 A_1 到 B_1 应是余下的路程，连 A_1B_1 的线段是最短的。此时不难证明线段 A_1B_1 与河岸 l_2,l_3 的交点 M,N 就是应修桥的位置。

例2 在一个任意给定的三角形的每一边上，向形外作一个正方形，这三个正方形中不与这三角形顶点重合的六个顶点构成一个六边形。这个六边形显然有三条边等于这三角形的边。试证：其余三边中每一边等于这个三角形相应中线的两倍。

证 如图1-5，将 AC 平移到 BC'，则 $AC \perp\!\!\!= BC'$．连 AC' 交 BC 于 M，则 AM 为 BC 边上的中线，且 $AC'=2AM$。

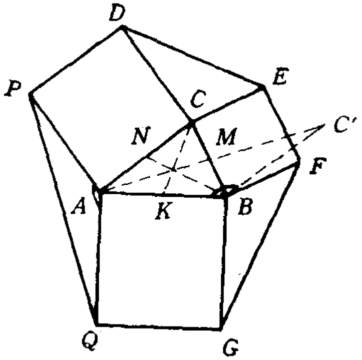

图 1-5

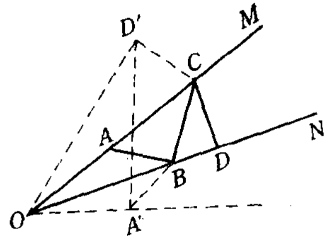

图 1-6

在 $\triangle AQP$ 和 $\triangle BAC'$ 中，$AB=AQ$，$BC'=AP$，$\angle PAQ$，$\angle C'BA$ 均为 $\angle CAB$ 的补角，故 $\angle PAQ=\angle ABC'$。所以

$$\triangle AQP \cong \triangle BAC',\quad PQ=AC'=2AM.$$

同理可证

$$FG=2BN,\ DE=2CK.$$

例3 如图 1-6，设 $\angle MON=20°$，A 为 OM 上一点，$OA=4\sqrt{3}$，D 为 ON 上一点，$OD=8\sqrt{3}$，C 为 AM 上任意一点，B 是 OD 上任意一点，那么折线 $ABCD$ 的长 $AB+BC+CD$ 的最小值是多少？

解 欲求折线 $ABCD$ 长的最小值，只要它们能通过变换成为一条直线段即可。

作 A 点关于 ON 的对称点 A'，D 关于 OM 的对称点 D'，连 $A'B$，CD'，则 $A'B=AB$，$CD'=CD$。故

$$AB+BC+CD=A'B+BC+CD'.$$

显然 $$A'B+BC+CD'\geqslant AD'.$$

因为 $\angle A'ON=\angle NOM=\angle MOD'=20°$，所以

$$\angle D'OA'=60°.$$

又$OA'=OA=4\sqrt{3}$，$OD'=OD=8\sqrt{3}$，所以

$$OD'=2\cdot OA',$$

即$\triangle OD'A'$为直角三角形，且$\angle OA'D'=90°$，因此

$$A'D'=\sqrt{(8\sqrt{3})^2-(4\sqrt{3})^2}=12.$$

故折线$ABCD$的长的最小值是12。

例4 如图1-7，$\triangle ABC$和$\triangle ADE$是两个不全等的等腰直角三角形，现固定$\triangle ABC$而将$\triangle ADE$绕A点在平面上旋转。试证：不论$\triangle ADE$旋转到什么位置，线段EC上必存在点M使$\triangle BMD$为等腰直角三角形。

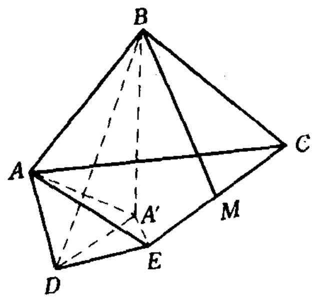

图 1-7

证 可设$\triangle BMD$为等腰直角三角形。而证明点M在线段EC上。作A关于BD的对称点A'，则$\angle A'DB=\angle ADB$。因为$\angle ADE=90°=2\angle BDM$，所以

$$\angle EDM=\angle A'DM=45°-\angle A'DB=45°-\angle ADB.$$

又$DA'=DA=DE$，所以A'又是E关于DM的对称点。

同理，A'也是C关于BM的对称点。所以

$$\angle EMD=\angle A'MD,\ \angle CMB=\angle A'MB.$$

因为$\angle BMD=90°$，所以$\angle CME=180°$，即M在EC上。

例5 如图1-8，O是锐角$\triangle ABC$内一点，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$。$P$是$\triangle ABC$内任意一点。求证：

$$PA+PB+PC\geqslant OA+OB+OC。$$

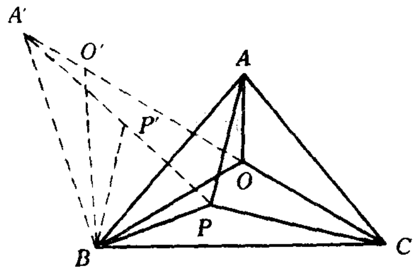

图 1-8

分析　由于$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$，故将$\triangle AOB$绕点$B$旋转$60°$（$120°$的补角）得$\triangle A'O'B$。容易看到$\triangle BOO'$为正三角形，所以$C,O,O',A'$四点共线，即将$CO$，$BO,AO$转化为一直线段$CA'$。欲证

$$PA+PB+PC\geqslant OA+OB+OC,$$

只需证　　$$PA+PB+PC\geqslant CA'。$$

还可看到作上述旋转时，点P变为P'，则$\triangle PBP'$也是正三角形，且$\triangle A'P'B\cong\triangle APB$，故

$$PA+PB+PC=A'P'+P'P+PC。$$

显然，$A'P'+P'P+PC\geqslant A'C$，即

$$AP+BP+CP\geqslant AO+BO+CO。$$

例6 如图1-9，P为正方形$ABCD$内一点，若$PA=a$，$PB=2a,PC=3a(a>0)$，求

（1）$\angle APB$的度数；

（2）正方形的边长。

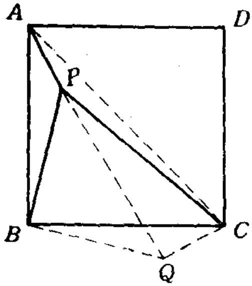

图 1-9

解 （1）将$\triangle APB$绕B旋转$90°$得$\triangle CQB$．显然

$$\triangle CQB \cong \triangle APB.$$

连PQ，因为$\angle PBQ = 90°, PB = QB = 2a$，所以

$$\angle PQB = \angle QPB = 45°, PQ = 2\sqrt{2}a.$$

在$\triangle PQC$中，$CP = 3a, CQ = a, PQ = 2\sqrt{2}a$，故 $PC^2 = CQ^2 + PQ^2$．所以$\angle PQC = 90°$，即

$$\angle CQB = 90° + 45° = 135° = \angle APB.$$

（2）因为$\angle APB + \angle BPQ = 135° + 45° = 180°$，所以$A$，$P$，$Q$三点共线，从而

$$AQ = 2\sqrt{2}a + a = (1 + 2\sqrt{2})a.$$

在$\mathrm{Rt}\triangle AQC$中，

$$AC = \sqrt{a^2 + (1 + 2\sqrt{2})^2 \cdot a^2} = \sqrt{10 + 4\sqrt{2}}a.$$

所以 $AB = \sqrt{10 + 4\sqrt{2}}a/\sqrt{2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}a.$

例7 正方形$ABCD$与$AB'C'D'$同向，B与B'不重合．证明：直线BB'，CC'，DD'共点．

证 将正方形$ABCD$与$AB'C'D'$绕A（逆时针）旋转$90°$时，B成为D，B'成为D'，所以BB'成为DD'．从而在图1-10中$BB' \perp DD'$．