2

第三版

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇

# 数学分析习题集题解

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

第三版

2

Б.П.吉米多维奇

# 数学分析习题集题解


费定晖　周学圣　编演

郭大钧　邵品琮　主审





山东科学技术出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

Б.П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (2)/费定晖 周学圣编演 .—3 版 .—济南:山东科学技术出版社,2005.1(2005.3 重印)
ISBN 7-5331-0100-6

Ⅰ.Б... Ⅱ.①费... ②周... Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43961 号

**Б.П. 吉米多维奇**
**数学分析习题集题解**
(2)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

**出版者:山东科学技术出版社**
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002 电话:(0531)2098088
网址:www.lkj.com.cn
电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn
**发行者:山东科学技术出版社**
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002 电话:(0531)2098071
**印刷者:济南申汇印务有限责任公司**
地址:济南市王官庄 12 号
邮编:250022 电话:(0531)7966822

开本:850mm×1168mm 1/32
印张:15
字数:364 千
版次:2005 年 3 月第 3 版第 19 次印刷
印数:274001-282000

**ISBN 7-5331-0100-6 O·6**
**定价:19.50 元**

# 第三版前言

DISANBANQIANYAN

这套书自 1979 年出版发行以来，20 余年一直畅销不衰，读者称其为学习数学分析"不可替代"之图书，我们对此倍感欣慰。

本次第三版主要做了如下改动：

第一，修正了部分题目的解法，使其更加注重了科学性、规范性和简明性。

第二，改正了第二版的个别印刷错误。

第三，在文字上进行了些润色，力求文字更加准确。

第四，对版面和开本进行了调整，突出了时代感。

这次的修改得到山东科学技术出版社的大力支持，责任编辑宋德万、胡新蓉等对该书的再版付出了艰辛的劳动，在此深表感谢。

在第三版修改过程中由费定晖逐章逐题予以校阅，不当之处恳请指正。

费 定 晖

2005.1

# 出版说明

CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自50年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,

特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有刘一鸣同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

# 目录

MULU

# 第二章　单变量函数的微分学

## §1.　显函数的导函数

1° 导函数的定义　若 $x$ 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值,则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 的增量.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

有意义,则称为导函数,而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微分的函数.

函数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y = f(x)$ 的图形在 $x$ 点切线的斜率 $[\tan\alpha = f'(x)]$(图 2.1).

2° 求导函数的基本法则　若 $c$ 为常数且函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ 都有导函数,则

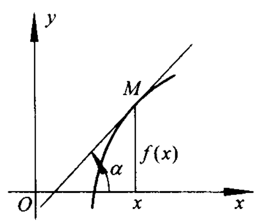


图 2.1

(1) $c' = 0$;　(2) $(cu)' = cu'$;

(3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

(4) $(uv)' = uv' + v'u$;

(5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$　$(v \neq 0)$;

(6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$　($n$ 为常数);

(7) 若函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导函数,则 $y'_x = y'_u u'_x$.

3° 基本公式　若 $x$ 为自变数*,则

Ⅰ. $(x^n)' = nx^{n-1}$($n$ 为常数);

Ⅱ. $(\sin x)' = \cos x$;　Ⅲ. $(\cos x)' = -\sin x$;

Ⅳ. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;　Ⅴ. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

Ⅵ. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　　Ⅶ. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

Ⅷ. $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；　　Ⅸ. $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$；

Ⅹ. $(a^x)'=a^x\ln a\quad(a>0)$；$(e^x)'=e^x$；

Ⅺ. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\quad(a>0$ 且 $a\neq1)$；　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

Ⅻ. $(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x$；　　ⅩⅢ. $(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x$；

ⅩⅣ. $(\operatorname{th}x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}$；　　ⅩⅤ. $(\operatorname{coth}x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2x}$.

4° 单侧的导函数　表示式

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

及

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta(x)}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 $x$ 点的左导函数或右导函数.

导函数 $f'(x)$ 存在的充分且必要的条件是

$$f'_-(x)=f'_+(x).$$

5° 无穷的导函数　若在某一点 $x$ 有

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x$ 点有无穷的导函数. 在此种情形下，函数 $y=f(x)$ 的图形上在 $x$ 点的切线与 $Ox$ 轴垂直.

**【821】** 若 $x$ 由 1 变到 1000，求自变量 $x$ 的增量 $\Delta x$ 和函数 $y=\lg x$ 的对应的增量 $\Delta y$.

**解**　$\Delta x=1000-1=999$；

$\Delta y=\lg1000-\lg1=3$.

---

* 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中，一些明显的定义域要求，例如，本节公式Ⅴ中要求 $x\neq k\pi$($k$ 整数)，Ⅵ中要求 $|x|<1$ 等等，以及例如尔后 §5 中相应的限制，一般地就不再一一声明.

《题解》作者注

**【822】** 若 $x$ 由 0.01 变到 0.001，求自变量 $x$ 的增量 $\Delta x$ 和函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的对应的增量 $\Delta y$.

**解** $\Delta x=0.001-0.01=-0.009$;

$$\Delta y=\frac{1}{(0.001)^2}-\frac{1}{(0.01)^2}=990000.$$

**【823】** 设：

(1) $y=ax+b$； (2) $y=ax^2+bx+c$； (3) $y=a^x$.

若变量 $x$ 得到增量 $\Delta x$，求增量 $\Delta y$.

**解** (1) $\Delta y=[(ax+a\Delta x)+b]-[ax+b]=a\Delta x$;

(2) $\Delta y=[a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c]-[ax^2+bx+c]$

$\qquad=(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2$;

(3) $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$.

**【824】** 证明：

(1) $\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x)$;

(2) $\Delta[f(x)g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

**证** (1) $\Delta[f(x)+g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]$

$=\Delta f(x)+\Delta g(x)$,

于是，

$$\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x);$$

(2) $\Delta[f(x)g(x)]=[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)]-[f(x)g(x)]$

$=[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x)+[g(x+\Delta x)-g(x)]f(x)$

$=\Delta f(x)g(x+\Delta x)+\Delta g(x)f(x)$,

于是，

$$\Delta[f(x)\ g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x).$$

同样,我们还可将(2)的结果写成

$$\Delta[f(x)g(x)]=f(x+\Delta x)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x).$$

**【825】** 过曲线 $y=x^2$ 上的二点 $A(2,4)$和 $A'(2+\Delta x,4+\Delta y)$引割线 $AA'$,求此割线的斜率,设:

(1) $\Delta x=1$;　　(2) $\Delta x=0.1$;

(3) $\Delta x=0.01$;　　(4) $\Delta x$ 为任意小.

在已知曲线上 $A$ 点的切线的斜率等于什么?

**解** 割线 $AA'$的斜率 $k_{AA'}=\dfrac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}=4+\Delta x$,

(1) $k_{AA'}=5$;　　(2) $k_{AA'}=4.1$;

(3) $k_{AA'}=4.01$;　　(4) $k_{AA'}=4+\Delta x$.

于是,在 $A$ 点的切线斜率为

$$k_A=\lim_{A'\to A}k_{AA'}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4.$$

**【826】** 把 $Ox$ 轴上的线段 $1\leqslant x\leqslant 1+h$ 利用函数关系 $y=x^3$ 映变到 $Oy$ 轴上.求其平均的伸长系数.设:

(1) $h=0.1$;　(2) $h=0.01$;　(3) $h=0.001$,

计算此系数的值.当 $x=1$ 时伸长的系数等于什么?

**解** 平均伸长系数 $\bar{l}=\dfrac{(1+h)^3-1^3}{h}=3+3h+h^2$,

(1) $\bar{l}=3+3(0.1)+(0.1)^2=3.31$;

(2) $\bar{l}=3+3(0.01)+(0.01)^2=3.0301$;

(3) $\bar{l}=3+3(0.001)+(0.001)^2=3.003001$.

于是,　　$l\Big|_{x=1}=\lim\limits_{h\to 0}\bar{l}=3.$

**【827】** 动点沿 $Ox$ 轴运动的规律由下式表出

$$x=10t+5t^2$$

式中 $t$ 以秒(s)计的时间,$x$ 为以米(m)计的距离.求在 $20\leqslant t\leqslant$

$20+\Delta t$ 时间内运动的平均速度. 设:(1) $\Delta t=1$;(2) $\Delta t=0.1$;(3) $\Delta t=0.01$,计算此速度的值. 当 $t=20$ 时运动的速度等于什么?

**解** 平均速度

$$\bar{v}=\{[10(20+\Delta t)+5(20+\Delta t)^2]-[10\times 20+5\times 20^2]\}\div\Delta t=210+5\Delta t(\mathrm{m/s}),$$

(1) $\bar{v}=210+5\times 1=215(\mathrm{m/s})$;

(2) $\bar{v}=210.5(\mathrm{m/s})$;

(3) $\bar{v}=210.05(\mathrm{m/s})$.

于是, $v\Big|_{t=20}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(210+5\Delta t)=210(\mathrm{m/s})$.

**【828】** 根据导函数的定义,直接求下列函数的导函数:

(1) $x^2$; (2) $x^3$; (3) $\dfrac{1}{x}$; (4) $\sqrt{x}$; (5) $\sqrt[3]{x}$;
(6) $\tan x$; (7) $\cot x$; (8) $\arcsin x$; (9) $\arccos x$;
(10) $\arctan x$.

**解** (1) $y=x^2$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

于是,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

(2) $y=x^3$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2,$$

于是,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2.$$

(3) $y=\dfrac{1}{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}=-\frac{1}{x(\Delta x+x)}.$$

于是,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{x(\Delta x+x)}\right]=-\frac{1}{x^2}.$$

(4) $y=\sqrt{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

于是,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad(x>0).$$

(5) $y=\sqrt[3]{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

于是,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\quad(x\neq 0).$$

(6) $y=\tan x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\tan x+\tan\Delta x}{1-\tan x\tan\Delta x}-\tan x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\tan\Delta x(1+\tan^2 x)}{\Delta x(1-\tan x\tan\Delta x)}=\frac{\tan\Delta x\sec^2 x}{\Delta x(1-\tan x\tan\Delta x)}.$$

于是，

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\tan\Delta x\sec^2 x}{\Delta x(1-\tan x\tan\Delta x)}=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(x\neq(2k-1)\frac{\pi}{2};\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots\right).$$

(7) $y=\cot x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cot(x+\Delta x)-\cot x}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\cot x\cot\Delta x-1}{\cot x+\cot\Delta x}-\cot x}{\Delta x}$$

$$=\frac{-1-\cot^2 x}{\Delta x(\cot x+\cot\Delta x)}=-\frac{\csc^2 x}{\Delta x(\cot x+\cot\Delta x)}.$$

于是，

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\csc^2 x}{\Delta x(\cot x+\cot\Delta x)}=-\csc^2 x$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}\qquad(x\neq k\pi;\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots).$$

(8) $y=\arcsin x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arcsin(x+\Delta x)-\arcsin x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin\left[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\,x\right]}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin\left[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x\Delta x)^2}\right]}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

$$\cdot\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$，从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}t=0$.

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{(x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}}$$

$$\cdot \lim_{t \to 0} \frac{\arcsin t}{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (|x| < 1).$$

其中$\lim\limits_{t \to 0} \frac{\arcsin t}{t} = \lim\limits_{u \to 0} \frac{u}{\sin u} = 1$.

(9) $y = \arccos x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arccos(x + \Delta x) - \arccos x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin[(x\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}) - (x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2}]}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin t}{t} \cdot \frac{-(2x + \Delta x)}{(x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}},$$

式中 $t = (x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}$, 从而 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} t = 0$.

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(2x + \Delta x)}{(x + \Delta x)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}}$$

$$\cdot \lim_{t \to 0} \frac{\arcsin t}{t} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1).$$

(10) $y = \arctan x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arctan(x + \Delta x) - \arctan x}{\Delta x} = \frac{\arctan \dfrac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arctan \dfrac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}} \cdot \frac{1}{1 + x(x + \Delta x)}.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\arctan\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)}\right]$$

$$=\frac{1}{1+x^2},$$

其中利用$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arctan t}{t} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\tan u} = 1$.

**【829】** 设:

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3,$$

求 $f'(1)$, $f'(2)$和 $f'(3)$.

**解** $f'(x) = (x-2)^2(x-3)^3 + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3$

$$+3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$$

$$=2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9).$$

于是,

$$f'(1) = -8;\quad f'(2) = f'(3) = 0.$$

**【830】** 设:

$$f(x) = x^2\sin(x-2),$$

求 $f'(2)$.

**解** $f'(x) = 2x\sin(x-2) + x^2\cos(x-2)$.

于是,

$$f'(2) = 4.$$

**【831】** 设:

$$f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}},$$

求 $f'(1)$.

**解** 解法 1:

若用复合函数求导法,可得

$$f'(x)=1+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

于是,

$$f'(1)=1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\pi}{4}.$$

解法 2:

若按定义作,注意到当 $x=1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}},$$

即得

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right)=1+\frac{\pi}{4}.$$

**【832】** 设函数 $f(x)$在 $a$ 点可微分,求

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

**解** 设 $\Delta x=x-a$,则当 $x\to a$ 时,$\Delta x\to 0$.于是,得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to a}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a).$$

**【833】** 证明:若函数 $f(x)$可微分及 $n$ 为自然数,则

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \tag{1}$$

反之,若对于函数 $f(x)$有极限(1)存在,则可否断定这个函数有导函数?研究迪里黑里函数的例子(参阅第一章第 734 题).

**证** $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]}{\frac{1}{n}}=f'(x).$$