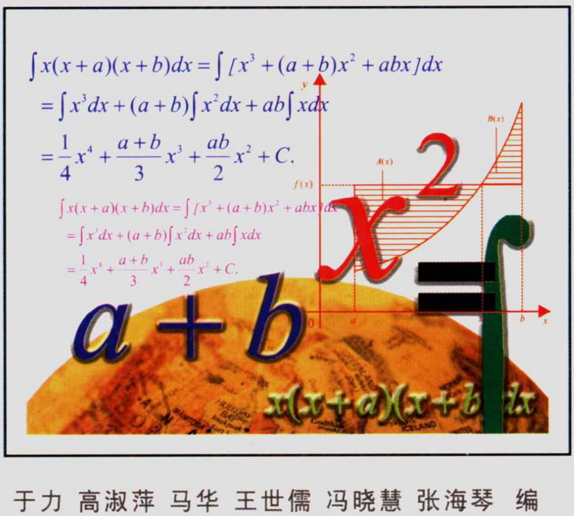
高等学校数学教材系列丛书

高等数学试题解析

（1989~2003）



于力 高淑萍 马华 王世儒 冯晓慧 张海琴 编

西安电子科技大学出版社 http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

高等数学试题解析

（1989～2003）

于　力　高淑萍　马　华
王世儒　冯晓慧　张海琴　编

西安电子科技大学出版社

2004

图书在版编目(CIP)数据

高等数学试题解析/于力等编. —西安：西安电子科技大学出版社，2001.1

高等学校数学教材系列丛书

ISBN 7-5606-0968-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. 于… Ⅲ. 高等数学-高等学校-解题 Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 57187 号

责任编辑 云立实

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电 话 (029)88227828 邮 编 710071

http://www.xduph.com E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印 刷 陕西画报社印刷厂

版 次 2001 年 1 月第 1 版 2004 年 9 月第 4 次印刷

开 本 850 毫米×1168 毫米 1/32 印张 13.125

字 数 321 千字

印 数 14 001～18 000 册

定 价 18.00 元

ISBN 7-5606-0968-6/O·0048

XDUP 1239021-4

前　言

高等数学是每个工科学生的必修课程，也是现代科学技术应用最广泛的一门学科．在高等数学的学习过程中，解题是一项运用所学的知识去解决问题和分析问题的重要技能，也是一种能力的训练过程．著名美籍匈牙利数学家、教育家波利亚在《数学的发现》一书中指出：“任何一门学问都是由知识和技能所组成”，“在数学中，技能比仅仅掌握一些知识重要得多”．我们编写本书的目的正鉴于此，即帮助大学一年级学生掌握和提高解决问题和分析问题的能力．

本书收集了部分高校 1989 年至 2003 年（即一九八九级至二〇〇三级）的考试试题和四届的数学竞赛题（第二试）．其中有基本题，也有难度较高的证明题．我们相信一年级大学生通过这些题目的训练，对掌握和提高高等数学的知识和技能都是十分有益的．为了便于学习，我们对这些试题和竞赛题都给出了参考答案．此外，为了与全国硕士研究生入学统一考试的数学考试大纲相一致，本试题中幂级数的收敛区间均指开区间，收敛域则包括区间的两个端点的收敛情形．

在编写本书的过程中，得到了西安电子科技大学理学院数学科学系的领导以及基础数学教研室教师的关心和大力支持，许多教师对历年的命题工作都付出了辛勤的劳动，在此我们表示衷心的感谢．

由于编写时间比较仓促及作者水平有限，本书定有疏漏和不妥之处，恳请读者批评指正，以便进一步修订．

编　者

2004 年 8 月 20 日

目　　录

试题部分

答案部分

试题部分

一、一九八九级高等数学试题

（一）第一学期期中试题

1. 设记号“$A\Rightarrow B$”表示“由命题 A 可推出命题 B”，试用“$\Rightarrow$”把下面 $f(x)$ 在点 x_0 的关系表示出来：

$f(x_0)$存在	$f'(x_0)$存在
$f(x)$在 x_0 连续	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在

2. 验证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+5}{2n+3}=2$.（用 ε—$N$ 语言）

3. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+n}{n}\right)^{-n}$.

4. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\cos x\sin^2 x}$.

5. 设 $y=(\cos x)^{\sin x}+(\sin x)^{\cos x}$，求 y'.

6. 设 $x^2-2xy+y^3=1$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

7. 设$\begin{cases} x=\cos t+\tan\dfrac{t}{2} \\ y=2^t+\arcsin t^2 \end{cases}$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

8. 设 $y=\sin^2 x$，求 $y^{(n)}$.

9. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(A+B)x+B}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}, & \text{当 } x\neq 1 \text{ 时} \\ 4, & \text{当 } x=1 \text{ 时} \end{cases}$

试确定 A，B 之值，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

10. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 点连续，$f(x)=|x-a|\varphi(x)$，试问：$f(x)$ 在 $x=a$ 处是否可导？并证明你的结论.

11. 确定函数 $f(x)=\mathrm{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$ 的间断点之类型.

12. 由原点 O 向三次曲线 $y=x^3-3ax^2+bx\,(a\neq 0)$ 引切线，切于 O 以外的点 $P_1(x_1,\ y_1)$，再由 P_1 引此曲线的切线，切于 P_1 以外的点 $P_2(x_2,\ y_2)$，如此继续下去，得到点列 $\{P_n(x_n,\ y_n)\}$，

(1) 求 x_1；

(2) 求 x_{n-1} 与 x_n 的关系；

(3) 求 x_n 的表示式；

(4) 当 $n\to\infty$ 时，求 P_n 极限位置的坐标.

（二）第一学期期末试题

1. 计算下列各题：

(1) 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$，试计算 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(995\boldsymbol{c})$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x^2\sin\dfrac{1}{x}}$.

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

(4) 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(5) 求由方程 $y=x+\arctan y$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数.

(6) 已知 $f(2)=\dfrac{1}{2}$，$f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=1$，求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

(7) 计算 $\int_{2}^{+\infty}\frac{1-\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

(8) 求 $\int\frac{\ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]}{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x$.

(9) 求过点(2, 1, 3)且与直线

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$$

垂直相交的直线方程.

(10) 已知 $\begin{cases}x-\mathrm{e}^x\sin t+1=0\\ y=\int_0^t(3u^2+2)\,\mathrm{d}u\end{cases}$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

2. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $y\geqslant 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定 a,b,c，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

3. 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，证明：

$$\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}$$

并推出：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-a\sin x}\,\mathrm{d}x<\frac{\pi}{2a}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^a}\right)$，其中 $a>0$.

（三）第二学期期中试题

1. 判断题(正确的打“√”，错误的打“×”)：

(1) 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处不连续，则 $f_x(x_0,y_0)$ 与 $f_y(x_0,y_0)$ 不存在. (　)

(2) $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 连续是 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微的充分条件. (　)

(3) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切平面方程是 $(z-z_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$. (　)

(4) 若函数 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$的偏导数都存在，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y), \psi(x,y)]$的偏导数也存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

( )

(5) 若$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 是 $z=f(x,y)$的偏导数，则 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

( )

(6) 若 $f(x,y)$连续，则

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad (\quad)$$

(7) 若$D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$，

$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$，

$f(x,y)$在 D 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (\quad)$$

(8) 设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_C P\,\mathrm{d}y-Q\,\mathrm{d}x$ 与路径无关的充要条件是 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$. ( )

2. 设 F 具有一阶连续偏导数，求由方程

$$F(x^2+y^2,\ y^2+z^2,\ z^2+x^2)=0$$

所确定的函数 $z=z(x,y)$的全微分.

3. 设 $z=f(x,\mathrm{e}^{xy})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4. 在曲面 $2x^2+y^2-z^2-2xy+1=0$ 上求点，使它到原点的距离最小.

5. 试计算

$$\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}z$$

6. 设矢量场 $\boldsymbol{A}=x^2\boldsymbol{i}$，试求 $\boldsymbol{A}$ 通过球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一卦限部分上侧的通量.

7. 计算

$$\int_C \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y-\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

其中 C 是沿曲线 $x^2=2(y+2)$ 从点 $(-2\sqrt{2},2)$ 到点 $(2\sqrt{2},2)$ 的一段.

8. 求

$$V(t)=\iint_D[(t-2)y+2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

在 $[4,6]$ 上的最大值，其中 D：

$$x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant-\frac{2}{t-2}$$

（四）第二学期期末试题

1. 填空题：

(1) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微的充分条件是____________________.

(2) 函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处的最大方向导数是________.

(3) 设函数 $f(x,y)$ 可微，则当 $f(x,y)$ 满足条件____________时，积分 $\int_C f(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$ 与路径无关.

(4) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R(0<R<+\infty)$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为__________.

(5) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=-f(-x)$，则

$f\left(3\sin\frac{t}{2}\right)$的周期是________；其傅氏系数为________________________.

2. 设 $z=x^2f(x+y,x-y)$，其中 $f(u,v)$ 有连续二阶偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 已知圆锥体 Ω：$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant a$，其上任一点的密度等于该点到 z 轴的距离的平方，求此圆锥体的质量.

4. 计算曲线积分

$$\int_C (e^x\sin y-8y)\,dx+(e^x\cos y-8)\,dy$$

其中 C 是由点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax(y\geqslant 0,a>0)$.

5. 求微分方程

$$y''+6y'+(9+a^2)y=1 \qquad (a>0)$$

满足初始条件 $y(0)=\frac{1}{9+a^2}$，$y'(0)=a$ 的特解.

6. 计算曲面积分

$$\iint_\Sigma y^2z^2\,dy\,dz+z\,dx\,dy$$

其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的下侧，$R>0$.

7. 求幂级数 $1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{2(n-1)2^{2n-4}}$ 的收敛域及和函数.

8. 在椭球面$\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ 上求距平面 $3x+4y+12z-288=0$ 为最近和最远的点.

9. 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$. 证明：若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 也收敛.