

概率论 与数理统计方法

YU SHULI TONGJI FANGFA

(第二版)

刘剑平 陆元鸿 曹宵临 编著



华东理工大学出版社

EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

概率论与数理统计方法

(第二版)

刘剑平 陆元鸿 曹宵临 编著



华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计方法/刘剑平等编著. —2版. —上海:华东理工大学出版社,2004.8

ISBN 7-5628-1560-7

I. 概... II. 刘 III. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 057124 号

**概率论与数理统计方法
(第二版)**

刘剑平 陆元鸿 曹宵临 编著

出版	华东理工大学出版社	开本	787×1092 1/16
社址	上海市梅陇路 130 号	印张	22
邮编	200237 电话(021)64250306	字数	504 千字
网址	www.hdlgpress.com.cn	版次	2004 年 8 月第 2 版
发行	新华书店上海发行所	印次	2004 年 8 月第 5 次
印刷	上海崇明裕安印刷厂	印数	14591-18640 册
ISBN 7-5628-1560-7/O·107		定价:33.00 元	

内 容 提 要

本书是根据高等学校工科数学课程教学指导委员会于1993年审定的“概率论与数理统计课程教学基本要求”,结合作者多年的教学实践经验编写而成的。全书由概率论、数理统计和随机过程三部分组成,包括了高等院校非数学专业的概率论和数理统计课程的全部内容。本书可作为高等院校工科各专业及理科非数学专业本科生、专科生、研究生的教材,也可供科技工作者和工程技术人员阅读、参考。

本书由10章组成,内容有:随机事件及其概率,一维随机变量,多维随机变量,随机变量的数字特征,极限定理初步,数理统计的基本概念,假设检验和区间估计,回归分析,方差分析和正交试验设计,随机过程初步等。

本书力求简明扼要,避免繁琐,突出通俗性、直观性,通过配备涉及多种领域的例题,强调其应用性。为了便于教学,每章后配有精选的习题,书末还附有习题参考答案。书末附有每章自测题及参考答案和期末考试卷六套及参考答案。

本书编委会

刘剑平 陆元鸿 曹宵临 倪中新
李红英 方 民 孙 军 秦 衍

前 言

概率论和以概率论为基础的数理统计及作为现代概率论的随机过程都是研究随机现象的数学学科。本学科的产生与发展源自于实际工作的需要,因此相对来讲,过去已出版的概率论与数理统计教材,由于出版较早,已不能很好地适用于当前计算技术的日益发展。随着科学技术的高速发展,知识体系的不断更新,概率统计与随机过程已广泛应用于天文气象、雷达通讯、地质勘探、生物工程、自动化控制、动态可靠性等工程科学技术中,并已成为许多新兴学科的理论基础。基于这样的背景,为适应 21 世纪的教学,我们编写了这本《概率论与数理统计方法》奉献给广大读者,为教育改革献上微薄之力。

本书由概率论、数理统计和随机过程初步构成,共分为 10 章,包括了高等院校非数学专业概率论和数理统计课程的全部基本内容,可作为高等院校工科各专业及理科非数学专业本科生、专科生、研究生的教材,也可供科技工作者和工程技术人员阅读、参考。

工科及理科非数学专业学习本课程的目的,主要在于实际应用。考虑到这一点,我们着重讲清基本概念、原理和计算方法,避免烦琐的理论推导证明,力求简明、准确;在内容安排上注重系统性、逻辑性;在内容编排上力求由浅入深,循序渐进。为了培养学生解决实际问题的能力,通过配备较多的涉及各领域的例题,开拓学生思路,侧重应用性;通过将统计推导,数值计算与计算机实现互相结合,激发学生的学习动力,培养学生的综合素质;书末附有每章自测题及参考答案,另有 6 套期终考试卷及参考答案可供学生复习自测使用。

根据编著者多年的教学实践经验,在本书中,对一些具体问题的处理,例如,概率论中的求一维随机变量函数的分布,数理统计中推导各种假设检验的方法,方差分析、正交试验设计中的各种计算等,都给出了若干新的处理方法和计算公式。

考虑到某些专业的特殊需要,本书还包括了一些超出高等学校工科数学课程指导委员会审定的《概率论与数理统计课程教学基本要求》的内容,如数理统计中的独立性检验和正交试验设计,随机过程初步等等,教师可根据不同专业的要求,进行取舍,灵活掌握。

本书由刘剑平、陆元鸿、曹宵临主编,倪中新、李红英、方民等同志参加编写了部分章节。在编写的过程中,得到了华东理工大学教材建设委员会和教务处的刘百祥老师以及华东理工大学出版社的领导朱广忠、荣国斌、张辉、姚璵的大力支持,得到了俞文鲑教授、王宗尧教授、谢国瑞教授、鲁习文教授的支持和关心,在此表示衷心的感谢。对修订过程中提供过宝贵建议的夏宁茂教授、施劲松、黄秋生、张新发、林爱红、黄文亮、曹宇烨、苏德中等老师表示感谢。

限于编者的水平,本书中难免存在一些缺陷和疏漏之处,恳切希望专家、读者予以指正,以便我们今后进一步改进、提高。

作者的 e-mail 地址为:Liujianping60@163.com.

作者

2004 年 3 月

目 录

1 随机事件及其概率

1.1 随机事件	(1)
1.2 事件的关系和运算	(3)
1.3 概率与频率	(7)
1.4 概率的古典定义	(9)
1.5 概率的性质	(14)
1.6 条件概率、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式	(17)
1.7 事件的独立性	(24)
1.8 独立试验序列	(27)
习题一	(29)

2 一维随机变量

2.1 随机变量的概念	(33)
2.2 离散型随机变量及其概率分布	(34)
2.3 随机变量的分布函数	(43)
2.4 连续型随机变量及其概率密度	(45)
2.5 随机变量函数的分布	(55)
习题二	(61)

3 多维随机变量

3.1 多维随机变量及其分布	(65)
3.2 二维随机变量的边缘分布	(71)
3.3 条件分布	(73)
3.4 随机变量的独立性	(78)
3.5 多维随机变量函数的分布	(80)
习题三	(88)

4 随机变量的数字特征

4.1 一维随机变量的数学期望	(92)
4.2 一维随机变量的方差	(99)
4.3 若干重要分布的数学期望和方差	(104)
4.4 二维随机变量的数字特征	(106)
4.5 矩、协方差与相关系数	(112)

习题四.....	(121)
5 极限定理初步	
5.1 大数定理	(125)
5.2 中心极限定理	(129)
习题五.....	(137)
6 数理统计的基本概念	
6.1 总体与样本	(139)
6.2 用样本估计总体的分布	(140)
6.3 统计量	(141)
6.4 点估计	(142)
6.5 衡量点估计好坏的标准	(148)
6.6 数理统计中几个常用的分布	(150)
6.7 正态总体统计量的分布	(152)
习题六.....	(155)
7 假设检验和区间估计	
7.1 假设检验的基本思想	(158)
7.2 正态总体参数的假设检验	(161)
7.3 正态总体参数的区间估计	(170)
7.4 总体分布的检验	(174)
7.5 独立性的检验	(179)
习题七.....	(181)
8 回归分析	
8.1 回归分析的基本概念	(186)
8.2 一元线性回归	(186)
8.3 多元线性回归	(191)
8.4 非线性回归	(195)
习题八.....	(200)
9 方差分析和正交试验设计	
9.1 单因子方差分析	(203)
9.2 不考虑交互作用的双因子方差分析	(207)
9.3 考虑交互作用的双因子方差分析	(213)
9.4 正交试验设计的基本思想	(220)
9.5 不考虑交互作用的正交试验设计	(222)
9.6 考虑一级交互作用的正交试验设计	(225)
9.7 正交试验设计中一些特殊问题的处理	(230)

习题九.....	(234)
10 随机过程初步	
10.1 随机过程的概念.....	(238)
10.2 几个重要的随机过程.....	(245)
10.3 平稳过程的概念及例子.....	(251)
10.4 平稳过程的相关函数性质.....	(255)
10.5 平稳过程的均方微积分及各态历经性.....	(256)
10.6 平稳过程的功率谱密度.....	(263)
习题十.....	(271)
习题参考答案及试题	
习题参考答案.....	(275)
自测题.....	(294)
自测题参考答案及提示.....	(304)
期终考试卷.....	(309)
试卷参考答案及提示.....	(320)
附录	(324)
参考文献	(341)

随机事件及其概率

1.1 随机事件

1.1.1 随机现象及其统计规律性

自然界和人类社会中存在着许多现象,其中有一些现象,只要满足一定的条件,就必然会发生.例如,在标准大气压下,纯水加热到 100°C 必然沸腾;向空中抛掷一枚硬币,硬币必然会下落;在没有外力作用的条件下,物体必然静止或作匀速直线运动;10 件产品中有 2 件次品,从中任意抽取 3 件,其中至少一件不是次品;等等.所有这些现象,有一个共同特点:事前人们完全可以预言会发生什么结果.我们称这类现象为**确定性现象**或**必然现象**.

但是在自然界和人类社会中,还存在着与必然现象有着本质差异的另一类现象.例如,向地面投掷一枚硬币,硬币可能正面向上也可能反面向上;一门炮对一个目标进行远距离射击,可能击中也可能击不中;从含有 5 件次品的一批产品中抽取 3 件产品,取到次品的件数可能是 0,1,2,3 等等.这些现象的一个共同特点是:在同样的条件下进行同样的观测或实验,有可能发生多种结果,事前人们不能预言将出现哪种结果.这种在同样条件下进行同样的观测或实验,却可能发生种种不同结果的现象,称为**随机现象**或**偶然现象**.

表面上看来,随机现象的发生,完全是随机的、偶然的,没有什么规律可循,但事实上并非如此.对一次或少数几次观测或实验而言,随机现象的结果,确实是无法预料的,是不确定的.但是,如果我们在相同的条件下进行多次重复的实验或大量的观测,就会发现,随机现象结果的出现,具有一定的规律性,因而在某种程度上也是可以预言的.例如,各个国家各个时期的人口统计资料显示,新生婴儿中男婴和女婴的比例大约总是 1:1.又如,向水平、光滑的地面多次重复投掷一枚均匀的硬币,就会发现“正面向上”与“反面向上”大约各占总次数的一半.

在自然界和人类社会中,这种现象是普遍存在的,看起来好像是毫无规律的随机现象,却有着某种规律性的东西隐藏在它的后面.正如恩格斯所说:“在表面上是偶然性在起作用的地方,这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的,而问题只是在于发现这些规律.”(《马克思恩格斯选集》中译本第四卷 243 页,1972 年版).我们称这种规律性为随机现象的**统计规律性**.概率统计理论,就是研究随机现象统计规律性的一门学科.

1.1.2 随机试验与事件

为了方便起见,我们把对某种自然现象进行的一次观测或作的一次实验,统称为一个试验. 如果一个试验具有下列三个特性:

- (1) 试验可以在相同条件下重复进行;
- (2) 每一次试验,可能出现多种结果,总共有可能出现哪几种结果,是可以事先明确知道的;
- (3) 每一次试验,实际只出现一种结果,至于出现哪一种结果,在这一次试验结束之前,是无法预知的.

就称这种试验为**随机试验**. 我们常用字母 E 来表示随机试验. 一般把随机试验简称为**试验**.

进行试验的目的在于研究试验结果出现的规律. 对于一个试验 E , 它的每一种可能出现的最简单的结果,称为**基本事件**或**样本点**,习惯上用 ω 表示.

对于一个试验 E , 它所有的基本事件组成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**,记为 Ω .

例 1 设试验 E 为:掷一颗骰子并观察向上那面的点数,则有样本点:

$$\omega_i = \{\text{出现 } i \text{ 点}\} \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

于是样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

例 2 设试验 E 为:抛掷两枚均匀的硬币. 可以有下列两种不同的考虑方法:

- (1) 两枚硬币分别考虑,分别看它们是“正面向上”还是“反面向上”,则有样本点:

$$\omega_1 = \{\text{第一枚为正面,第二枚为正面}\},$$

$$\omega_2 = \{\text{第一枚为正面,第二枚为反面}\},$$

$$\omega_3 = \{\text{第一枚为反面,第二枚为正面}\},$$

$$\omega_4 = \{\text{第一枚为反面,第二枚为反面}\},$$

于是样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

- (2) 两枚硬币一起考虑,看两枚硬币中总共出现几个“正面向上”,则有样本点:

$$\omega_1 = \{\text{两个正面}\}, \omega_2 = \{\text{一个正面,一个反面}\}, \omega_3 = \{\text{两个反面}\},$$

于是样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

这个例子说明:样本点的选取和样本空间的构造不是唯一的,同一个试验,随着考虑角度的不同,样本点的选取和样本空间的构造可以是不一样的.

例 3 设试验 E 为:在相同条件下接连不断地向同一个目标射击,直到第一次击中为止,观察直到击中为止所需要的射击次数. 则有样本点:

$$\omega_i = \{\text{到击中为止需要射击 } i \text{ 次}\} \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

于是样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.

例 4 设试验 E 为:在一批显像管中,任意取一只,测试它的使用寿命 t ,则样本空间为 $\Omega = \{t | t > 0\}$, Ω 中的每一点都是样本点.

例 5 设试验 E 为:观察某地每日的最低气温 x 和最高气温 y , 已知当地每日气温最低不低于 -20°C , 最高不高于 50°C . 以 (x, y) 表示一次观察结果, 显然有 $-20 \leq x \leq y \leq 50$, 则样本空间可表示为 $\Omega = \{(x, y) | -20 \leq x \leq y \leq 50\}$, Ω 中的每一点都是样本点.

以上各例说明随机试验的样本空间有三种情况:

- (1) 有有限个可能的结果;
- (2) 有可列无穷个(即无穷多个, 但可依某种次序排成一列)可能的结果;
- (3) 有不可列无穷个(例如像一条线段上的点数那么多个)可能的结果.

在一次随机试验中, 通常关心的是带有某些特征的基本事件是否发生. 比如在例 1 中, 可以研究下列这些事件是否发生:

$$A = \{\text{出现 4 点}\}, B = \{\text{出现点数为偶数}\}, C = \{\text{出现点数为} \leq 4\}.$$

其中, A 是一个基本事件, 而 B 和 C 则由多个基本事件组成(事实上, $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$), 相对于基本事件, 就称它们为**复合事件**. 无论基本事件还是复合事件, 它们在试验中发生与否, 都带有随机性, 所以都称作**随机事件**, 简称**事件**. 习惯上, 常用大写字母 A, B, C 等表示. 在试验中, 如果事件 A 中包含的某一个基本事件 ω 发生, 则称 A 发生, 记为 $\omega \in A$.

样本空间 Ω 包含了全体基本事件, 而随机事件是由具有某些特征的基本事件所组成. 由此可见, 任一**随机事件都是样本空间 Ω 的一个子集**.

在每次随机试验中一定会发生的事件, 称为**必然事件**. 相反地, 如果某事件一定不会发生, 则称为**不可能事件**.

因为 Ω 是由所有基本事件所组成的, 所以在每一次试验时, 对任何一个基本事件 ω 来说, 必定有 $\omega \in \Omega$, 也就是说, 在试验中 Ω 必然要发生, 因此我们用 Ω 表示必然事件; 空集 $\emptyset$ 是不包含任何基本事件的集合, 它可以看作是 Ω 的子集, 在每一次试验时, 对任何一个基本事件 ω 来说, 不可能有 $\omega \in \emptyset$, 即 $\emptyset$ 永远不可能发生, 因此, 我们用 $\emptyset$ 表示不可能事件.

必然事件与不可能事件没有“不确定性”, 因而严格地说, 它们已经不属于“随机”事件了. 但是, 为了今后讨论方便起见, 我们还是把它们包括在随机事件中, 作为特殊的随机事件来处理.

1.2 事件的关系和运算

一个样本空间 Ω 中, 可以有很多随机事件. 人们通常需要研究这些事件间的关系和运算, 以便通过较简单的事件的统计规律去探求较复杂的事件的统计规律.

在讨论事件的关系和运算时, 我们总是假定它们是同一个随机试验的事件, 即它们是同一个样本空间 Ω 的子集. 因为只有在这样的假定下, 讨论它们之间的关系和运算才有意义.

1. 事件 B 包含事件 A

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生, 则称事件 B **包含** 事件 A , 或称事件 A **包含在**

事件 B 中, 记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

英国逻辑学家约翰·文(John Venn, 1834—1923)发明了一种“文氏图”, 可以将事件间的关系直观地表示出来. 它用一矩形表示样本空间 Ω , 矩形内的点表示样本点, 矩形中的区域表示事件, 代表事件 A 的区域包含在代表事件 B 的区域中, 表示 $A \subset B$ (图 1-1).

由事件的包含关系容易得到如下的性质:

- (1) 任何一个事件 A 都包含它自身, 即 $A \subset A$;
- (2) 多个事件 $A, B, C, \dots$ 的包含关系具有传递性, 即如果 $A \subset B, B \subset C$, 就有 $A \subset C$;
- (3) 任何事件 A 都包含在必然事件 Ω 中, 即 $A \subset \Omega$;
- (4) 任何事件 A 都包含不可能事件 $\emptyset$, 即 $A \supset \emptyset$.

2. 事件 A 与 B 相等

如果事件 A 包含事件 B , 而且事件 B 又包含事件 A , 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

显然, 事件的相等关系具有性质:

- (1) 反身性 $A = A$;
- (2) 传递性 若 $A = B, B = C$, 则 $A = C$;
- (3) 对称性 若 $A = B$, 则 $B = A$.

3. 事件 A 与 B 的和

“两个事件 A 与 B 中至少有一个发生”也是一个事件, 称此事件为事件 A 与 B 的和, 记作 $A + B$ 或 $A \cup B$.

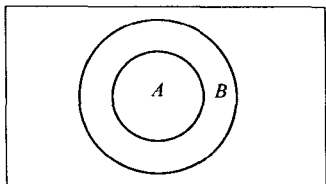


图 1-1

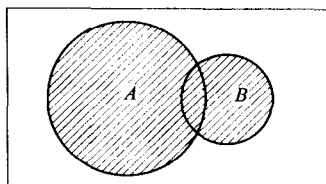


图 1-2

图 1-2 中的阴影部分就是事件 A 与 B 的和事件 $A + B$. 显然, $A \supset B$ 时, $A + B = A$; $A \subset B$ 时, $A + B = B$; $A = B$ 时, $A = A + B = B$.

“ n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生”这一事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和, 记作 $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ (或 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$), 简记为 $\sum_{i=1}^n A_i$ (或 $\bigcup_{i=1}^n A_i$).

“可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中至少有一事件发生”也是一事件, 我们称之为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和, 记作 $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ (或 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$), 简记为 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ (或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$).

4. 事件 A 与 B 的积

“两个事件 A 与 B 同时发生”也是一个事件, 称此事件为 A 与 B 的积, 记作 AB 或 $A \cap B$.

图 1-3 中的阴影部分就是事件 A 与 B 的积事件 AB . 不难看出, 当 $A \supset B$ 时, $AB = B$;

当 $B \supset A$ 时, $AB = A$. 如果 $A = B$, 则有 $A = AB = B$.

“ n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生”这一事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积, 记作 $A_1 A_2 \cdots A_n$ (或 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$), 简记为 $\prod_{i=1}^n A_i$ (或 $\bigcap_{i=1}^n A_i$).

“可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 同时发生”这一事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积, 记作 $A_1 A_2 \cdots A_n \cdots$ (或 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$), 简记为 $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ (或 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$).

5. 事件 A 与 B 互不相容

如果事件 A 与 B 不可能同时发生, 则称事件 A 与 B 互不相容或互斥. 此时必有 $AB = \emptyset$.

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意两个事件都互不相容, 即

$$A_i A_j = \emptyset \quad (1 \leq i < j \leq n),$$

则称这 n 个事件是互不相容的或互斥的.

显然任一个随机试验 E 的所有基本事件都是互斥事件. 并且, 不可能事件 $\emptyset$ 与任何事件都互斥.

6. 事件 A 与 B 相互对立

如果两个事件 A 与 B 满足

$$A + B = \Omega, AB = \emptyset,$$

则称事件 B 是事件 A 的逆事件或对立事件. 容易看出, 当 B 是 A 的逆事件或对立事件时, A 也是 B 的逆事件或对立事件, 所以, 这时也称 A 与 B 是相互对立 (或互逆) 的事件, 记为 $B = \bar{A}$ 或 $A = \bar{B}$.

图 1-4 中的阴影部分就代表 A 的对立事件 $\bar{A}$.

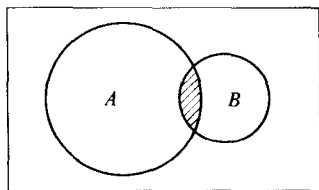


图 1-3

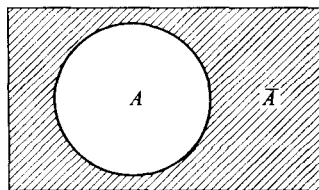


图 1-4

显然, $\bar{\Omega} = \emptyset, \bar{\emptyset} = \Omega, \bar{\bar{A}} = A$, 并且 $A \subset B$ 的充要条件是 $\bar{A} \supset \bar{B}$.

注意 对立事件一定是互斥事件, 但互斥事件未必是对立事件. 例如, 掷一颗骰子, 若 $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 6\}$, 则有 A 与 B 互斥, 但 A 与 B 不是对立事件.

7. 事件 A 与 B 的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件称为 A 与 B 的差, 记为 $A - B$.

在图 1-5 中, A 与 B 相交; 在图 1-6 中, $A \supset B$. 两个图形里的阴影部分都表示事件 $A - B$.

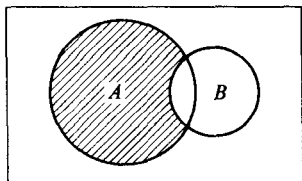


图 1-5

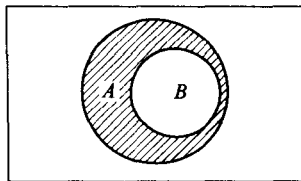


图 1-6

从图中不难看出: $A - B = A - AB$ 或 $A - B = A\bar{B}$.

例 1 设一个工人生产了 4 个零件. A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品 ($i = 1, 2, 3, 4$), 试用 A_i 表示下列事件:

- (1) 没有一个是次品; (2) 至少有一个是次品;
(3) 只有一个是次品; (4) 至少有三个不是次品.

解 (1) $A_1 A_2 A_3 A_4$; (2) $\overline{A_1 A_2 A_3 A_4}$;
(3) $\bar{A}_1 A_2 A_3 A_4 + A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 + A_1 A_2 \bar{A}_3 A_4 + A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4$;
(4) $\bar{A}_1 A_2 A_3 A_4 + A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 + A_1 A_2 \bar{A}_3 A_4 + A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 + A_1 A_2 A_3 A_4$.

关于事件的运算有如下的规律:

- (1) 交换律 $A + B = B + A$, $AB = BA$;
(2) 结合律 $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(AB)C = A(BC)$;
(3) 分配律 $(A + B)C = AC + BC$, $AB + C = (A + C)(B + C)$;
(4) 德摩根定律(对偶原理)

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n \quad (1.2.1)$$

$$\overline{A_1 A_2 \cdots A_n} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \cdots + \bar{A}_n. \quad (1.2.2)$$

事实上, (1.2.1) 式左端表示事件 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 中至少有一个发生的对立事件, 恰是右端为所有的事件 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都不发生. 即若干个事件的和的对立事件就是各个事件的对立事件的积. 同样, (1.2.2) 式说明若干个事件的积的对立事件就是各个事件的对立事件的和.

我们知道, 任一随机事件都是样本空间的一个子集, 所以事件之间的关系与运算和集合之间的关系与运算是完全类似的. 因而, 可以借助于集合的知识来证明事件的运算律. 作为例子, 下面仅证明一个关系式:

$$(A + B)C = AC + BC.$$

证 若 $(A + B)C$ 发生, 即 $\omega \in (A + B)C$, 此时有 $\omega \in A + B$ 且 $\omega \in C$, 即 $\omega \in A$ 或 $\omega \in B$, 而且 $\omega \in C$. 从而有 $\omega \in A$ 且 $\omega \in C$, 或者 $\omega \in B$ 且 $\omega \in C$, 即 $\omega \in AC + BC$. 因此 $(A + B)C \subset AC + BC$.

反之, 若 $AC + BC$ 发生, 即 $\omega \in AC + BC$, 此时有 $\omega \in AC$ 或 $\omega \in BC$. 即有 $\omega \in A$ 且 $\omega \in C$, 或者 $\omega \in B$ 且 $\omega \in C$, 从而有 $\omega \in A$ 或 $\omega \in B$, 而且 $\omega \in C$, 即 $\omega \in (A + B)C$. 因此

$$AC + BC \subset (A + B)C.$$

综上所述,有: $(A + B)C = AC + BC$.

例 2 在某系学生中任选一名学生,设 A 表示被选出的是一名男生, B 表示该生是一名二年级学生, C 表示该生是一名系学生会的成员.

- (1) 说明事件 ABC 的意义;
- (2) 在什么条件下有恒等式 $ABC = C$;
- (3) 什么时候成立关系式 $C \subset A$.

解 (1) 事件 ABC 表示该生是二年级男生,但不是系学生会成员.

(2) $ABC = C$ 等价于 $C \subset AB$, 故系学生会的成员都是二年级男生时, 成立 $ABC = C$.

(3) 当系学生会的成员都是男生时, 成立 $C \subset A$.

例 3 设 A, B 是随机事件, 试证: $\overline{AB} + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{B} = \overline{AB}$.

证 由德摩根定律、分配律及对立事件的定义可知:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{A} + \overline{B} = \overline{A}\Omega + \Omega\overline{B} = \overline{A}(B + \overline{B}) + (A + \overline{A})\overline{B} = \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} + A\overline{B} + \overline{A}\overline{B} \\ &= \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{B},\end{aligned}$$

故

$$\overline{AB} + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{B} = \overline{AB}.$$

例 4 设 A, B, C 是随机事件, 试证: $(A + B) - AB = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B$.

证 由事件差的定义、对偶原理及分配律可知:

$$\begin{aligned}(A + B) - AB &= (A + B)\overline{AB} = (A + B)(\overline{A} + \overline{B}) = A\overline{A} + A\overline{B} + B\overline{A} + B\overline{B} \\ &= \emptyset + \overline{A}B + B\overline{A} + \emptyset = \overline{A}B + B\overline{A},\end{aligned}$$

故

$$(A + B) - AB = \overline{A}B + \overline{A}B.$$

1.3 概率与频率

对于随机现象, 仅仅考虑它的所有可能结果是没有意义的. 我们所关心的是各种可能结果在一次试验中出现的可能性究竟有多大, 从而就可以在数量上研究随机现象.

前面讲过随机现象具有偶然性的一面, 在一次试验中的(某个)随机事件可能发生, 也可能不发生. 但是, 经过长期的实践与探索, 人们发现, 在多次重复试验中, 某个事件的发生却呈现出明显的规律性. 这种规律性为我们用数来表示事件发生的可能性提供了客观的依据. 为此, 我们首先从事件发生的频率谈起.

定义 1 对于随机事件 A , 若在 n 次试验中发生了 μ_n 次, 则称比值 $\frac{\mu_n}{n}$ 为随机事件 A 在 n 次试验中发生的频率, 记为 $f_n(A)$, 即

$$f_n(A) = \frac{\mu_n}{n}, \quad (1.3.1)$$

其中 μ_n 称为**频数**. 易知频率 $f_n(A)$ 具有下述性质:

- (1) 非负性 $0 \leq f_n(A) \leq 1$;
- (2) 规范性 $f_n(\Omega) = 1$;
- (3) 有限可加性 若事件 A, B 互不相容(即 $AB = \emptyset$), 则

$$f_n(A+B) = f_n(A) + f_n(B).$$

例如: 试验 E 为抛掷一枚质地匀称的硬币. 若抛掷 20 次硬币出现了 11 次“正面向上”(记为事件 A), 即 $n = 20, \mu_n = 11$. 此时, 事件 A 在 20 次试验中出现的频率为:

$$f_{20}(A) = \frac{11}{20} = 0.55;$$

再重复进行 40 次试验, 事件 A 出现的频数为 20, 则

$$f_{40}(A) = \frac{20}{40} = 0.5,$$

就是事件 A 在 40 次试验中发生的频率.

当然, 我们还可以重复上千次、上万次的试验, 分别记录事件 A 发生的频数, 计算出其频率, 就会发现, 尽管重复试验的次数不同, 事件 A 发生的频数也各有差异, 但其频率却稳定在一个固定的数值 0.5 左右, 而且随着试验次数的增多, 这种稳定性愈加明显. 为了验证这种频率的稳定性, 历史上有不少统计学家曾做过“抛掷硬币”的试验, 试验结果如下:

实验者	掷硬币次数	出现正面次数	频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

又如, 在英语中, 某些字母出现的频率远远高于另外一些字母, 在进行了更深入的研究之后, 人们还发现每个字母被使用的频率相当稳定, 下面即为一份英文字母使用频率的统计表:

字母	空格	E	T	O	A	N	I	R	S
频率	0.2	0.105	0.072	0.0654	0.063	0.055	0.055	0.054	0.052
字母	H	D	L	C	F	U	M	P	Y
频率	0.047	0.035	0.029	0.023	0.0225	0.0225	0.021	0.0175	0.012
字母	W	G	B	V	K	X	J	Q	Z
频率	0.012	0.011	0.0105	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001