考研图书全国知名品牌
全国十大考研辅导班指定辅导用书

JINBANG KAOYAN
金榜考研成功系列

2006年全国硕士研究生入学考试用书

概率论与数理统计辅导讲义

GAILULUN YU SHULITONGJI FUDAO JIANGYI

主编：龚兆仁

第二版

考研名师倾情巨献
决胜考场的宝典

新华出版社

考研图书全国知名品牌

全国十大考研辅导班指定辅导用书

JINBANG KAOYAN

金榜考研成功系列

2006年全国硕士研究生入学考试用书

概率论与数理统计辅导讲义

GAILULUN YU SHULITONGJI FUDAO JIANGYI

主编：龚兆仁

考研名师倾情巨献

决胜考场的宝典

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导讲义/龚兆仁主编. -北京:新华出版社,2004.5

(2006年全国硕士研究生入学考试用书)

ISBN 7-5011-6581-5

Ⅰ.概… Ⅱ.龚… Ⅲ.①概率论-研究生-自学参考资料②数理统计-研究生-自学参考资料

Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第016571号

敬告读者

本书封面粘有策划者专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

2006年全国硕士研究生入学考试用书

概率论与数理统计辅导讲义

主编:龚兆仁

*

新华出版社出版发行

(北京石景山区京原路8号 邮编:100043)

新华出版社网址:http://www.xinhuapub.com

中国新闻书店:(010)63072012

新华书店总经销

北京云浩印刷有限责任公司印刷

*

787毫米×1092毫米 16K 13.75印张 326千字

2005年3月第2版 2005年3月第1次印刷

ISBN 7-5011-6581-5/O·8 定价:18.00元

若有印装质量问题,请与印厂联系(010)82570299

前　言

这本讲义是为已经学过或者正在学习概率论与数理统计的学生编写的一本辅导讲义。全书共分八章,每章均由知识结构网络图、基本内容和重要结论归纳与评注、典型例题分析选讲、精选练习题与解答四部分组成。章节安排、内容取舍与教材的顺序略有不同,主要是为了便于总结、复习以及知识间的相互渗透与结合。力求在不多的篇幅内,以总结的形式有重点的讲述基本内容并给出必要的评注,以加深理解基本概念,掌握基本理论、公式,了解重点、难点并澄清一些常犯的错误。通过典型例题的分析以及较系统的归类、比较、总结、讲评,帮助我们学会分析解答概率统计问题,掌握解题的思路与常用的方法和技巧,特别是一法多用。练习题的解答会使我们更好的、较深刻的理解、掌握基本内容与基本解题方法,达到巩固、领悟与提高的目的。典型性、综合性、启发性是选取编制例题习题的原则;不同章节及题后的点评与评注,其目的在于指出重点、难点、知识结合点以及解题的基本方法和应注意的问题,概念性、理论性选择题的设置,常常是为了帮助理解、掌握基本概念、基本定理与公式,纠正容易发生的错误,解答存在的疑惑。

概率论是建立在随机事件这个概念基础上的。理解、掌握概率论的基本概念及其实际背景,正确分析给定随机试验中的随机事件、随机变量之间的关系,并选择合适的等价表示形式,是学好概率论的关键。而数理统计则应着重于掌握其统计思想,它是所有不同统计方法的依据。基于目前实际情况,我们用较多篇幅讲述数理统计的内容及解题方法。

本书是学习、复习概率论与数理统计的一本辅导讲义,也是一本较好的教学参考书。

由于编者水平有限,疏漏错误之处在所难免,欢迎批评指正。

编　者

2005 年 3 月

目　录

第一章 随机事件与概率

本章知识结构网络图

- 随机现象—随机试验—随机事件
  - 表达方式
    - 语言叙述
    - 点集—基本事件，样本空间，事件，必然事件，不可能事件
    - 关系
      - 包含、相等、互不相容、对立、完备事件组
      - 相互独立
        - 定义（描述性定义与严格定义）
        - 性质
    - 运算
      - 形式—加（并）、交（积）、减、逆
      - 法则—交换、结合、分配、对偶、吸收、分解
    - 随机变量取值范围*
  - 概率
    - 定义—描述性定义，统计定义，古典定义，几何定义，公理化定义
    - 性质
      - 非负，有界，单调不减、有限可加
      - 加法公式，减法公式，求逆公式
    - 条件概率
      - 定义
      - 三公式—乘法公式，全概公式，贝叶斯（Bayes）公式
    - 概型
      - 等可能概型
        - 古典概型
        - 几何概型
      - 独立试验序列概型（n 重贝努利概型）

学习札记：

【注释】 (1) 表中带 * 号部分是其它章节内容,在这里给出是为了完整(或叙述)的需要.

(2) 本章给出概率论中最基本、最重要的三个概念:事件、概率与独立性(事件独立性与试验独立性). 正确的理解这些概念及其实际背景,掌握并会应用这些概念是学好概率论的关键.

(3) 事件的表述,等价性表示以及事件之间关系的判别是本章重点,难点. 概率计算是本章重点.

(4) 计算概率的方法有:概型法(定义法),性质与公式法,分布法,近似估计法. 后两种方法在其它章节中介绍.

(5) 本章内容是概率论的基础,要求我们:了解样本空间(基本事件空间)的概念;理解随机事件、概率、条件概率、事件独立性与独立重复试验的概念。掌握事件的关系与运算,概率的基本性质、加法公式、乘法公式、全概公式以及贝叶斯公式。会计算古典概率、几何概率;掌握应用公式、事件独立性进行概率计算以及与 n 重贝努利试验有关的事件的概率计算。

基本内容、重要结论归纳与评注

一、随机试验与随机事件

1. 随机试验与随机事件

称一个试验为随机试验,如果

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 试验所有可能结果是明确可知道的,并且不止一个;

(3) 每一次试验会出现哪一个结果事先不能确定.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的,为方便起见,将随机试验简称为试验,并用字母 E 或 $E_1,E_2\cdots\cdots$ 表示.

在一次试验中可能出现,也可能不出现的结果称为随机事件,简称为事件,并用大字母 A,B,C 等表示,为讨论需要,将每次试验一定发生的事件称为必然事件,记为 Ω. 每次试验一定不发生的事件称为不可能事件,记为 ϕ.

随机试验每一最简单、最基本的结果称为基本事件或样本点,记为 ω. 每次试验能且只能发生一个基本事件. 基本事件(或样本点)的全体称为基本事件空间(或样本空间),记为 Ω,即 $\Omega=\{w\}$,随机事件 A 总是由若干个基本事件组成,即 A 是 Ω 的于集,$A\subset\Omega$. 事件 A 发生等价于构成 A 的基本事件有一个发生.

2. 随机事件的关系与运算

如果事件 A 发生必导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A(或 A 被 B 包含),

记为 $A \subset B$. 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

如果事件 A 与 B 不能同时发生,则称事件 A 与 B 互不相容(或互斥).

称"事件 A 与 B 至少有一个发生"的事件为事件 A 与 B 的并(或和),记为 $A \cup B$,称"有限个(或可列个)事件 $A_1, A_2, \cdots A_n \cdots$ 至少有一个发生"的事件为事件 $A_1, A_2 \cdots, A_n \cdots$ 的并(或和),记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$;称"事件 A 与 B 同时发生"的事件为事件 A 与 B 的交(或积),记为 $A \cap B$ 或 AB,称"有限个(或可列个)事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生"的事件为事件 $A_1, \cdots, A_n \cdots$ 的交(或积),记为 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$;或 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. 称"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件为事件 A 与 B 的差,记为 $A - B$;称"事件 A 不发生"的事件为事件 A 的逆事件或对立事件,记为 $\overline{A}$. 由定义易知 $A - B = A - AB = A\overline{B}$, $B = \overline{A} \Leftrightarrow AB = \phi$ 且 $A \cup B = \Omega$. 称可列个(或有限个)事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ 构成一个完备事件组(或 Ω 的一个不交分割),如果 $\bigcup_i A_i = \Omega$,且 $A_iA_j = \phi$(一切 $i \neq j$).

事件的关系、运算与集合的关系、运算相当,且具有相同的运算法则:

吸收律:若 $A \subset B$,则 $A \cup B = B, AB = A$;

交换律:$A \cup B = B \cup A, AB = BA$;

结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$;

分配律:$A(B \cup C) = AB \cup AC, A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C); A(B - C) = AB - AC$,

对偶律:$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

评注　(1)事件运算顺序约定为先进行逆运算,而后交运算,最后并或差.

(2)事件的关系、运算及其法则,在分析事件,化简事件运算以及对事件作必要的等价变换时常常要用到. 要学会用概率论语言来叙述事件,用简单的事件的运算,关系表示较复杂的事件.

(3)在分析和讨论事件关系时,常常借助于图示法,既直观又简便.

(4)正确的理解事件的关系:包含、相等、互不相容、对立、相互独立的概念、等价性条件、区别与联系.

【例 1.1】　选择题

(1)设 A、B、C、为三个事件,则事件"A、B、C 不多于一个发生"的逆事件是

(A)A、B、C 至少有一个发生.　　(B)A、B、C 至少有二个发生.

(C)A、B、C 都发生.　　(D)A、B、C 不都发生.　　[　　]

【分析与解答】　这是用概率论语言叙述的事件,由逆事件定义知"不多于一个发生"的反面是"至少有二个发生",因此选择(B). 我们也可以用事件的关系与运算来确定正确选项. 为此需要引入事件 D = "A、B、C 不多于一个发生" = "A、B、C 至少有二个不发生" $= \overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{C} \cup \overline{B}\,\overline{C}$,应用对偶法则及其他运算法则,得 $\overline{D} = \overline{(\overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{C} \cup \overline{B}\,\overline{C})} = (A \cup B)(A \cup C)(B \cup C) = (A \cup BC)(B \cup C) = AB \cup AC \cup BC$ = "A、B、C 至少有二个发生",选择(B).

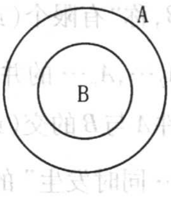
学习札记:

(2) 设 A,B 为随机事件,则与 A 包含 B 不等价的是

(A) $A \cup B = A$.　　(B) $B - A = \phi$

(C) $A - B = \phi$.　　(D) $AB = B$.　　[　]

【分析与解答】 这是判断事件关系的选择题,借助图形立即可以推断(A)、(B)、(D) 是事件 A 包含 B 的充要条件,因而选择(C). 事实上,A 包含 $B \Leftrightarrow B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$((A) 是充要条件),$\Leftrightarrow B\bar{A} = B - A = \phi$((B) 为充要条件),$\Leftrightarrow B = BA + B\bar{A} = BA$((D) 为充要条件). 对于(C) 而言,$A - B = \phi \Leftrightarrow A\bar{B} = \phi \Leftrightarrow A \subset B$,这与 $B \subset A$ 矛盾.



(3) 设事件 A 与 B 满足条件 $AB = \bar{A}\,\bar{B}$,则

(A) $A \cup B = \phi$.　　(B) $A \cup B = \Omega$.

(C) $A \cup B = A$.　　(D) $A \cup B = B$.　　[　]

【分析与解答】 由"对称性"知(C)、(D) 都不成立(否则一个成立另一个必成立),而(A) 成立 $\Leftrightarrow A = B = \phi$,此与已知矛盾,所以正确选项是(B). 事实上,由对偶法则及题设有 $AB = \bar{A}\,\bar{B} = \overline{A \cup B}$,根据吸收律得

$$A \cup B = A \cup B \cup AB = (A \cup B) \cup (\overline{A \cup B}) = \Omega$$

二、随机事件的概率及其性质

通常我们将随机事件 A 发生可能性大小的度量(非负值),称为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$. 这是概率的描述性定义,

1. 概率的统计定义

在不变的一组条件下,独立重复地进行 n 次试验,事件 A 发生的次数 μ_A 称为 A 发生的频数,比值 $f_n(A) \triangleq \frac{\mu_A}{n}$ 称为 A 发生的频率,随着 n 的增大,$f_n(A)$ 呈现出某种稳定性,即 $f_n(A)$ 在某一常数 p 附近摆动,n 增大时,摆动的幅度越来越小. 我们称频率的稳定值 p 为事件 A 的概率,即 $P(A) = p$.

点评　大数定律是概率统计定义的理论依据;在很多情况下,我们常常用频率值 $\frac{\mu_A}{n}$ 近似地估计概率 $P(A)$

2. 古典概率与几何概率

称随机试验(随机现象) 的概率模型为古典概型,如果其基本事件空间(样本空间) 满足(1) 只有有限个基本事件(样本点);(2) 每个基本事件(样本点) 发生的可能性都一样. 如果古典概型的基本事件总数为 n,事件 A 包含 k 个基本事件,即有利于 A 的基本事件 k 个. 则 A 的概率定义为

$$P(A) \triangleq \frac{k}{n} = \frac{\text{事件}A\text{所含基本事件的个数}}{\text{基本事件总数}}$$

学习札记：

由上式计算的概率称为 A 的古典概率.

称随机试验(随机现象)的概率模型为几何概型,如果(1) 样本空间(基本事件空间)Ω 是一个可度量的几何区域;(2) 每个样本点(基本事件) 发生的可能性都一样,即样本点落入 Ω 的某一可度量的子区域 A 的可能性大小与 A 的几何度量成正比,而与 A 的位置及形状无关.

在几何概型随机试验中,如果 S_A 是样本空间 Ω 一个可度量的子区域,则事件 A =“样本点落入区域 S_A” 的概率定义为

$$P(A) \triangleq \frac{S_A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}$$

由上式计算的概率称为 A 的几何概率

点评　基本事件有限、等可能的随机试验为古典概型;基本事件无限、等可能的随机试验为几何概型.

3. 概率的公理化定义

设随机试验的样本空间为 Ω, 如果对每一个事件 A 都赋于一个确定的实数 $P(A)$,且事件函数 $P(\cdot)$ 满足(1) 非负性:$P(A) \geqslant 0$;(2) 规范性:$P(\Omega) = 1$;(3) 可列可加性:对任意可列个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$(即 $A_iA_j = \phi, i \neq j$) 有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$,则称 $P(\cdot)$ 为概率,$P(A)$ 为事件 A 的概率.

点评　概率 $P(\cdot)$ 是事件的函数.

4. 概率的基本性度

(1) 有界性　$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$,　$P(\phi) = 0$,　$P(\Omega) = 1$.

(2) 单调性　若 $A \subset B$,则 $P(A) \leqslant P(B)$.

(3) 有限可加性　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件,则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$

(4) 加法公式　$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

一般地　$P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum\limits_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) \cdots + (-1)^n P(A_1A_2\cdots A_n)$.

(5) 减法公式　$P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

(6) 求逆公式　$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

(7) 半可加性　$P(\bigcup\limits_{i} A_i) \leqslant \sum\limits_{i} P(A_i)$.

点评　$P(A) = 0$,不能断言 $A = \phi$;$P(B) = 1$,不能断言 $B = \Omega$

学习札记：

三、条件概率及与其有关的三公式：乘法公式、全概公式、贝叶斯(Bayes)公式

1. 条件概率

设A、B为任意两个事件，若$P(A)>0$，我们称在已知事件A发生的条件下，事件B发生的概率为条件概率，记为$P(B\mid A)$，并定义

$$P(B\mid A)\triangleq\frac{P(AB)}{P(A)}\quad(P(A)>0).$$

点评　条件概率$P(\cdot\mid A)$是概率，概率的一切性质和重要结果对条件概率都适用，例如：

$$P(\bar{B}\mid A)=1-P(B\mid A),$$
$$P(B-C\mid A)=P(B\mid A)-P(BC\mid A),\text{等等}.$$

2. 乘法公式

如果$P(A)>0$，则$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$. 一般地，如果$P(A_1\cdots A_{n-1})>0$，则$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1})$

点评　A_i先于A_{i+1}发生时用此公式.

3. 全概公式

如果$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega,A_iA_j=\phi(i\neq j),P(A_i)>0$，则对任一事件$B$，有$B=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_iB$，$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$.

4. 贝叶斯(Bayes)公式(逆概公式)

如果$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega,A_iA_j=\phi(i\neq j),P(A_i)>0$，则对任一件事$B$，只要$P(B)>0$，有

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)(B\mid A_i)}(i=1,2,\cdots,n)$$

点评　(1) 要注意$P(AB)$与$P(B\mid A)$的区别：

$P(AB)$是在样本空间为Ω时，A与B同时发生的可能性，而$P(B\mid A)$则是表示在A已经发生的条件下，B发生的可能性，此时样本空间已由Ω缩减为A，只要题目中有前提条件："在A发生的条件下"或"已知A发生"等等，均要考虑条件概率.

学习札记：

(2) 全概公式是用于计算某个"结果"B 发生的可能性大小. 如果一个结果 B 的发生总是与某些前提条件(或原因、因素)A_i 相联系,那么在计算 $P(B)$ 时,我们总是将 B 对 A_i 作分解:$B = \bigcup_i A_iB$,应用全概公式计算 $P(B)$. 如果在 B 发生的条件下探求导致这一结果的各种"原因"A_i 发生的可能性大小 $P(A_i \mid B)$,则要应用 Bayes 公式.

【例 1.2】　选择题

(1) 设 A、B 为随机事件,则

(A)$P(A \cup B) \geqslant P(A) + P(B)$.

(B)$P(A - B) \geqslant P(A) - P(B)$.

(C)$P(AB) \geqslant P(A)P(B)$.

(D)$P(A \mid B) \geqslant \dfrac{P(A)}{P(B)}(P(B) > 0)$.　　[　]

【分析与解答】　这是一道考查概率性质的选择题,只要正确的记住相应的公式就不难推导出正确的选项. 事实上,由概率性质知,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leqslant P(A) + P(B)$,选项(A)不成立;$P(A - B) = P(A) - P(AB) \geqslant P(A) - P(B)$,(因为 $P(AB) \leqslant P(B)$),故正确选项是(B). 而 $P(A \mid B). = \dfrac{P(AB)}{P(B)} \leqslant \dfrac{P(A)}{P(B)}$,故(D)不成立;而选项(C)可能成立也可能不成立,例如 $AB = \phi$,则 $P(AB) = 0 \leqslant P(A)P(B)$,若 $B \subset A$,则 $P(AB) = P(B) \geqslant P(A)P(B)$.

(2) 设 A 为随机事件且 $P(A) = 1$,则对任意的随机事件 B,必有

(A)$P(A \cup B) = P(B)$.　　(B)$P(A - B) = P(B)$.

(C)$P(B - A) = P(B)$.　　(D)$P(AB) = P(B)$.

[　]

【分析与解答】　这是一道应用概率性质及事件关系计算概率的选择题,已知 $P(A) = 1$,故 $P(\bar{A}) = 0$,由于 $A \subset A \cup B$,所以 $P(A \cup B) = 1 \neq P(B)$,$P(B - A) = P(B\bar{A}) = 0 \neq P(B)$,(A)、(C)不成立. 又对任意事件 C,由分解律得 $C = AC + \bar{A}C$,故 $P(C) = P(AC) + P(\bar{A}C) = P(AC)$,取 $C = B$,得 $P(AB) = P(B)$,(D)成立,选择(D). 若取 $C = \bar{B}$,得 $P(A\bar{B}) = P(A - B) = P(\bar{B}) \neq P(B)$,(B)不成立.

点评　$P(A) = 1$,则 A 与任意事件 B 独立,故 $P(AB) = P(A)P(B) = P(B)$,选择(D). $P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = P(\bar{B}) \neq P(B)$,(B)不成立.

(3) 已知事件 A 与 B 同时发生,事件 C 必发生,则

(A)$P(C) \leqslant P(A) - P(B)$.　　(B)$P(C) \geqslant P(A) - P(B)$.

(C)$P(C) \leqslant P(A) - P(\bar{B})$.　　(D)$P(C) \geqslant P(A) - P(\bar{B})$.

[　]

学习札记：

【分析与解答】 显然我们必须由已知条件通过计算才能确定正确选项. 由题设知 $AB \subset C$，所以 $P(C) \geqslant P(AB)$. 由于各选项右式均有 $P(A)$，为此考虑分解式：$A = AB \cup A\bar{B}$，从而得 $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$，$P(AB) = P(A) - P(A\bar{B}) \geqslant P(A) - P(\bar{B})$，$P(C) \geqslant P(AB) \geqslant P(A) - P(\bar{B})$，选择(D).

四、随机事件相互独立与独立试验序列概型

1. 事件的独立性

(1) 独立性定义

描述性定义(直观性定义) 设 A、B 为两个事件，如果其中任何一个事件发生的概率不受另外一个事件发生与否的影响，则称事件 A 与 B 相互独立. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，如果其中任何一个或几个事件发生的概率都不受其余的某一个或某几个事件发生与否的影响，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

数学定义 设 A、B 为事件，如果 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立，简称为 A 与 B 独立.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件，如果对其中任意有限个事件 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{ik}$ $(k \geqslant 2)$，有

$P(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik})$ 则称 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

(2) 独立性性质

1° n 个事件相互独立必两两独立，反之不然.

2° n 个事件相互独立的充要条件是，它们中任意一部分事件换成各自的对立事件所得到的 n 个事件相互独立.

3° n 个事件相互独立，则不含相同事件的事件组经某种运算后所得的事件是相互独立的. 例如，A、B、C、D 相互独立，则 AB 与 $C \cup D$ 相互独立，A 与 $BC - D$ 相互独立，等等.

4° 概率为 1 或零的事件与任何事件都相互独立. 如果 $0 < P(A) < 1$，$0 < P(B) < 1$，A 与 B 互不相容或存在包含关系，则 A 与 B 不相互独立.

5° 如果 $0 < P(A) < 1$，则 A 与 B 独立的充要条件是 $P(B \mid A) = P(B \mid \bar{A}) = P(B)$.

2. 试验的独立

如果各个试验结果是相互独立的，则称这些试验是相互独立的. 例如，称随机试验 E_1 和 E_2 是相互独立的，如果对 E_1 的任一结果 A_1，E_2 的任一结果 A_2，事件 A_1 与 A_2 独立，即 $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)$. 称 n 个试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是相互独立的，如果对试验 E_i 中的任一结果 A_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立. 即对其中任意 k 个事件有

学习札记：

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{ij}) \qquad (k \geqslant 2)$$

3. **独立试验序列概型与 n 重贝努利概型**

在同样条件下重复独立地进行一系列完全相同的试验，即每次试验结果发生的概率都不变，各次试验是相互独立的，称这种重复试验序列的数学模型为独立试验序列概型. 如果每次试验只有两个结果 A 与 $\bar{A}$，且在每次试验中 A 发生的概率都相等（即 $P(A) = p$），将这种试验独立重复 n 次，则称这种试验为 n 重贝努利概型.

在 n 重贝努利概型中，事件 A 发生 k 次的概率为 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k = 0,1,\cdots,n)$，如果用 X 表示 n 重贝努利概型中事件 A 发生的次数，则 X 服从二项分布 $B(n,p)$.

点评　(1) 事件相互独立的概念是概率论中一个重要的概念，它是定义随机试验独立性，随机变量独立性的基础. 我们总是由试验的方式来判定试验的独立性，进而判定事件的相互独立性，再应用事件独立性定义中所揭示的概率关系计算与之有关的事件的概率.

(2) 要善于判定独立试验序列概型，只要题目中出现“将… 重复进行 n 次”，“对… 重复观察 n 次”等字样，或可以转换为 n 次独立重复试验概型的问题，都是要考虑应用二项分布计算与之有关的事件的概率.

【例 1.3】　选择题

(1) 设 A、B 为任意随机事件，已知 $0 < P(A) < 1$，则

(A) 若 $A \subset B$，则 A、B 一定不独立.

(B) 若 $B \subset A$，则 A、B 一定不独立.

(C) 若 $AB = \phi$，则 A、B 一定不独立.

(D) 若 $A = \bar{B}$，则 A、B 一定不独立.　　[　　]

【分析与解答】　这是一道判定事件关系的选择题. 我们知道在条件”$0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$”下，$A$ 与 B 互不相容或存在包含关系，则 A、B 一定不独立，本题仅假设 $0 < P(A) < 1$，而对 $P(B)$ 未作任何假设，因此(A)、(B)、(C)都不成立，正确选项是(D). 事实上，当 $P(B) = 1$ 时，如果 $A \subset B$，则 $P(AB) = P(A) = P(A)P(B)$，A 与 B 独立，(A)不成立；当 $P(B) = 0$ 时，若 $B \subset A$，则 $P(AB) = P(B) = 0 = 0P(A) = P(B)P(A)$，$A$ 与 B 独立，故(B)不成立；若 $AB = \phi$，$P(B) = 0$，则 $P(AB) = 0 = P(B)P(A)$，A 与 B 独立，故(C)不成立. 所以选择(D)，事实上若 $A = \bar{B}$，则 $\bar{A} = B$，由题设知 $0 < P(A) = P(\bar{B}) < 1, 0 < P(\bar{A}) = P(B) < 1$，故 $P(AB) = P(\bar{B}B) = 0 \neq P(A)P(B)$，$A$ 与 B 不独立.

(2) 设 A，B 为随机事件，$0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$，则 A 与 B 相互独立的充要条件是

(A) $P(A \mid B) + P(\bar{A} \mid B) = 1$.

学习札记：

(B) $P(A \mid B) + P(A \mid \bar{B}) = 1.$

(C) $P(A \mid B) + P(\bar{A} \mid \bar{B}) = 1.$

(D) $P(A \mid \bar{B}) + P(\bar{A} \mid \bar{B}) = 1.$ [ ]

【分析与解答】 这是一道由条件概率推导事件A、B独立充要条件的选择题. 我们可以从两个不同方面去考虑选择正确选项. 一是从选项入手，由于条件概率是概率，它具有概率的一切性质，因此(A)、(D)对任意事件都成立，是A、B独立的必要条件但不充分. 又如果A、B独立，则$P(A \mid B) = P(A \mid \bar{B}) = P(A)$，从而有$P(A \mid B) + P(A \mid \bar{B}) = 2P(A) \neq 1$，选项(B)不成立. 因而正确选项是(C).

另一方面我们也可以从独立性充要条件入手确定正确选项，由于$0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$，故$A$与$B$独立$\Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A \mid \bar{B}) = 1 - P(\bar{A} \mid \bar{B}) \Leftrightarrow P(A \mid B) + P(\bar{A} \mid \bar{B}) = 1$，选择(C).

(3) 将一枚硬币独立地掷两次，引进事件A_1 = "掷第一次出现正面"，A_2 = "掷第二次出现正面"，A_3 = "正、反面各出现一次"，A_4 = "正面出现两次" 则事件

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立. (B) A_2, A_3, A_4 相互独立.

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立. (D) A_2, A_3, A_4 两两独立. [ ]

【分析与解答】 由于"相互独立"必"两两独立"，故选项(A)、(B)都不成立，否则(C)或(D)亦成立，此与单项选择相矛盾，由题设知$A_4 \subset A_2$，$0 < P(A_i) < 1$，所以A_2与A_4不独立，(D)不成立，正确选项是(C). 事实上，由于$P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$，$P(A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$，$P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$，$P(A_4) = \frac{1}{4}$，故$P(A_1A_2) = P(A_4) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A_1)P(A_2)$

$$P(A_1A_3) = P\{第一次正面，第二次反面\} = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_2A_3) = P\{第一次反面，第二次正面\} = \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3)$$

A_1, A_2, A_3 两两独立，然而

$P(A_1A_2A_3) = P(\phi) = 0 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

因此A_1, A_2, A_3不相互独立.

点评 选择题分为概念性、理论性选择题与计算性选择题两种题型。如果能确定某个选项是正确的，无需对它进行验证，也无需验证或举反例说明其它选项是不正确的，解答概念性、理论性选择题时常常是这样的. 在例题中我们做了必要的证明或举反例，是为了说明问题的需要.

对计算性选择题则必须通过计算才能确定正确选项.

学习札记：

典型例题分析选讲

事件的关系与运算

随机事件是概率论最重要、最基本的一个概念.正确的理解、认识随机事件是对随机试验认识的出发点：要学会并掌握用概率论语言叙述事件，用符号表示事件以及它们之间的等价性转换；要会分析事件的结构，化简、分解事件，用简单的事件表示较复杂的事件，并进行必要的事件间的等价变换；确定随机试验的基本事件并用它去表示其他事件，等等.这是学好概率论的基础和关键.

【例1.4】 (1) 对一箱产品进行随意抽查检验，如果查出2个次品就停止检查，最多检查3个产品.写出该试验的基本事件(样本)空间Ω，并用基本事件(样本点)表示下列事件：A = "有2个产品是次品"，B = "至少有2个正品".

(2) 用事件A、B、C的运算关系表示下列事件：1^0 A、B、C都不发生；2^0，A、B、C不都发生；3^0 A、B、C不多于一个发生.

【分析与解答】 (1) 依题意，检查是有序的逐个进行，至少检查2个，最多检查3个.因此，如果以"0"表示查出次品，以"1"表示查出正品，那么基本事件至少是一个二位数至多是一个三位数的有序数列.基本事件空间$\Omega = \{00,010,011,100,101,110,111\}$，事件$A = \{00,010,100\}$，$B = \{011,101,110,111\}$.

(2) 这是一个道要求由概率论语言叙述的事件用事件关系来表示的题目，只要知道各种运算所描述的事件关系是不难解答的.

1° "A、B、C都不发生" = "A不发生，且B不发生，且C不发生" $= \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$

2° "A、B、C不都发生" = "A、B、C至少有一个不发生" = "A、B、C都发生"的逆事件 $= \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \overline{ABC}$

3° "A、B、C不多于一个发生" = "A、B、C至多有一个发生" = "A、B、C至少有二个不发生" $= \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}\bar{C} \cup \bar{B}\bar{C} = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

【例1.5】 (1) 已知事件A与B互不相容，则$A \cup \bar{B} =$ ________；$A - \bar{B} =$ ________；$A\bar{B} =$ ________.

(2) 已知事件A、B都发生，C必发生，A、B都不发生C必不发生，求证：$AC = AB \cup C\bar{B}$.

【分析与解答】 (1) 写出已知条件的各种等价形式再应用运算法则.

已知A与B互不相容$\Leftrightarrow AB = \phi \Leftrightarrow A \subset \bar{B} \Leftrightarrow B \subset \bar{A}$，所以由吸收律得：$A \cup \bar{B} = \bar{B}$，$A - \bar{B} = AB = \phi$，$A\bar{B} = A$.

(2) 将已知条件数量关系写出，再分析要证明的等式，应用运算法则即可证得结果.