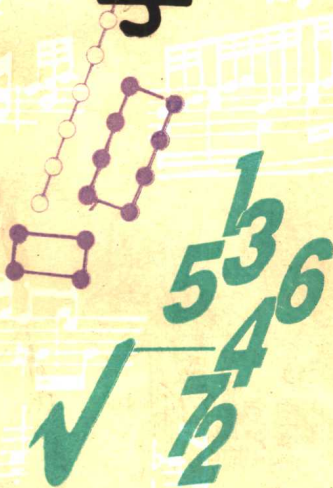


音乐文化小丛书

音乐与数学

童忠良 王忠人 王斌清 编著

人民音乐出版社

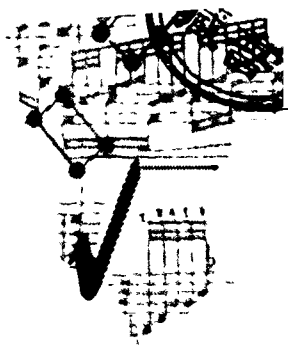


音乐文化小丛书

音乐与数学

董忠良 王忠人 王斌清 编著

人民音乐出版社



责任编辑：吴 朋

音乐文化小丛书

音乐与数学

童忠良 王忠人 王斌清编著

*

人民音乐出版社出版

(北京翠微路2号)

新华书店北京发行所经销

北京朝阳隆昌印刷厂印刷

787×965毫米 32开 100千字 5.25印张

1993年12月北京第1版 1993年12月北京第1次印刷

印数：00,001—1,965册

ISBN 7-103-01126-5/J·1127 定价：3.45元

目 录

■ 河洛数理与中国古代十二律	(1)
数之起源的传说	(1)
《河图》、《洛书》之谜	(5)
《河图》与五音	(8)
《河图》、《洛书》与十二律	(13)
■ 西方的发现与东方的智慧	(20)
西方乐圣——毕达哥拉斯	(20)
古希腊音阶的数理奥秘	(23)
三分损益法的演算	(27)
六十律与三百六十律	(31)
■ 音乐中的旧的全书与百科全书式的巨人	(33)
音乐中的奇书	(33)
插进“迷宫”的第一把钥匙	(36)
数学上另辟新径	(43)
■ 黄钟律度与数学进制	(53)
历代的黄钟律度	(53)
黍尺的变迁	(56)
不同的数制	(59)
黄钟律的换算	(63)
■ 数列结构与乐曲格式	(71)
奇妙的数列	(71)
等差数列：《十八六四二》	(78)
黄金分割与巴托克曲式体系	(89)

■ 音乐定量分析中精确与模糊的辩证	(96)
泛音列与沉音列	(96)
测音仪与定量分析	(100)
音乐中的集合论	(107)
■ 易经卦爻与凯奇机遇音乐	(115)
易经与乐律的阴阳数理	(116)
中国音乐中的易理与易数	(123)
海外的“八卦”热	(130)
■ 公式化与计算机音乐	(137)
数学作曲体系	(137)
公式化的音乐	(142)
计算机的应用	(147)
计算机作曲中的随机变量	(153)

河洛数理与 中国古代十二律

数，最初是披着一层神秘的外衣呈现在人类面前的。古人对数的有限认识，形成了一种原始的世界观。在这一体系里，我们的祖先以其高度的才智绘制出两幅奇特的数图——《河图》与《洛书》。寥寥数点，巧布妙陈，居然隐函着无限的奥秘，难怪人们至今仍难全识其“庐山真面目”。

既然河洛无所不包，无所不容，那么音乐与之有缘吗？

数之起源的传说

古希腊著名学者毕达哥拉斯有一句名言，叫做“万物皆数”。提起数，人们自然就会想到1、2、3、4、5……。就是这些普普通通的数字，在物质世界里显示着神奇的力量，在人类发展的过程中被赋予了神圣的意义。同时，与音乐也结下了不解之缘。

还在科学家们探究构成自然界万物本原的先期，毕达哥拉斯和他的学派以其朴素的唯物主义的宇宙观就曾大胆提出：

“宇宙的组织在其规定中通常是数及其关系的和谐的体系。”进而把“1”描绘成产生万物的完美和谐境界。无独有偶，在古老的中国，先哲们对数的认识和推崇与之有着惊人的相似之处。老子在他的《道德经》中写到：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”老子还做了如下的论述：“昔者得一者，天得一以清，地得一以宁，神得一以灵，谷得一以盈，万物得一以生，侯王得一以为天下正。”在这里，数成了世界的起源与主宰！

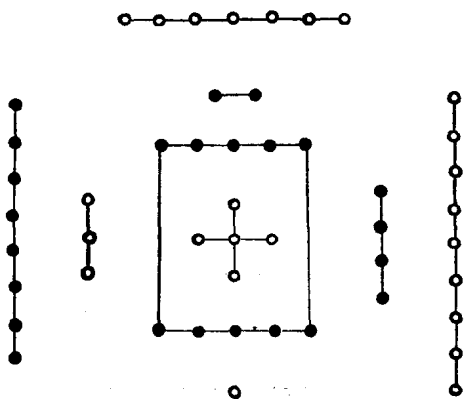
这种万物源于数的宇宙观，反映了远古时期人类对数的崇拜，在一定程度上揭示了数在现象世界中表达出深刻广表的意义。

数被如此推崇，那么究竟什么是数，它又是怎样产生的呢？不了解这些问题的答案，也就难以探究音乐与数学的关系。

数，它是一种抽象的概念，是人类对客观事物理性而有序的认识。冥冥宇宙中的一切现象，最初是混沌茫然地呈现在人类面前的，“浑然之中，未始有数也”。随着人类对自然与社会认识的不断加深，现象世界变得越来越微妙，越来越复杂，由此“物生而后有象，象而后有滋，滋而后有数”，数就依照着这样的逻辑顺序发生了。这里客观而扼要地阐述了数之产生的条件和过程，然数源于何物却还没有一个生动的具象。实际上，从古至今人们早已把科学的概括同丰富的想象结合起来，演绎出了一个又一个关于数之起源的美妙传说。

著名数学家华罗庚说过：“数是数(shǔ)出来的，一个一个地数(shù)，因而出现了1、2、3、4、5……。”郭沫若认为：“数源于手，古人一二三四作 一 二 三 四，此手之形也，手指何以横书，曰请以手作数，于无心之间必先出右掌，倒其拇指为一，次指为二，中指为三，无名指为四，一拳为五。”而中国的易学家们却把数的起源与《河图》联系了起来，以为其《河图》乃数之源也。前两种说法既简单明了又浅显易懂，后者似乎为多数人感到陌生和困惑。《河图》是由“点”组成的方阵图（见下页）。

《河图》被称之为古老的数图（数阵），其中蕴含着无穷的奥秘。那么，《河图》又是怎样向人们阐释着数的起源呢？据北宋元丰年间发现的古《三坟》中的《太古河图代姓纪》记载：“清气未生，浊气未沉，游神未灵，五色未分，中有其物。冥冥而性存，谓之混沌。混沌为太始。太始者，元胎之萌也。太始之数一，一为太极。太极者，天地之父母也。一极易，天高明而清，地博厚而浊，谓之太易。太易者，天地之变也。太易之数二，二为两仪。两仪者，阴阳之形也，谓之太初。太初



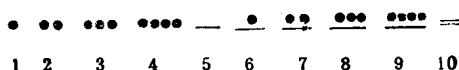
(《河图》)

者，天地之交也，太初之数四，四盈易，四象变，而成万物，谓之太素。太素者，三才之始也。太素之数三，三盈易，天地孕，而生男女，谓之三才。三才者，天地之备也。……”这段话大约是战国以后的文人对人类史前史的有关描述。特别值得注意的是，这里出现了四个数：一、二、四、三。一（太始，即太极）分为二（太易，即两仪），二分为四（太初，实际上是又一个一分为二），一、二、四合起来是三（太素），这个“三”就生万物。这与老子《道德经》中所言是一脉相承的。这一，二，三也正是人类最初对数的拙朴而又神秘的认识。前面所提到的4个数，按照数的顺序则排成一、二、三、四。它们被古人称为“生数”。1和4相加是5；2和3相合也是5，所以说数到了4，5也就在其中了。有了5和另4个生数，其余的数依下面的法则——生成：1得5成6，2得5成7，3得5成8，4得5成9，5复得5成10，如是渐加渐倍，数无穷无尽源源而来。在这一法则中，“五”成为基本的计数单位居于特殊的地位，5以上的数

皆由5演变引申而来。关于这一点，郭沫若在对甲骨卜辞进行研究之后也有所发现，他认为上古时期曾有过5进位的计筹方式。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	==	≡	≡≡	≡≡≡	⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥

在这种计筹方式里“五”是一个基本单位，5以上的数的表示形式与上述数生成的法则是吻合的。更有趣的是，在距中国十分遥远的美洲大陆上，马雅人发明的记数系统里也有类似的方法。他们用小圆点表示一，用小短横表示5，10以内的自然数就计成：



以上两个计数图式反证了前面所述及的数生成的法则，由此可见，在远古时期，“五”是作为一个基本计算单位存在着，这也是“五”被赋予异乎寻常意义的主要原因。

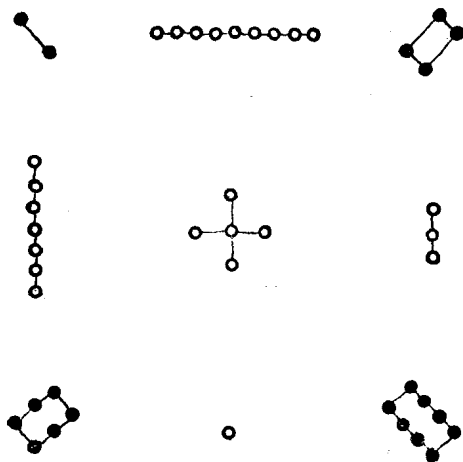
现在让我们回到《河图》上来。图中央有5个圆圈代表数5，作为一个基本计数单位居中以显示特殊的地位；另4个生数分居5数的四周，而6、7、8、9、10各因5而得之，故附于其生数之外。《河图》各数之方位，“一与六共宗居北；二与七为朋居南；三与六同道居东；四与九为友居西；五与十相守居中。”每组后面的一个数都是由前面的一个数加5以后而成，所以两数同位而居。

通过以上所述，我们再来审视这一古老的数图，是否可以领悟到《河图》中的数点如此有序地组合排列着是在向后人揭示数生成的奥秘呢？

《河图》、《洛书》之谜

相传大禹治水的年代里，陕西的洛水常常大肆泛滥，给两岸人民带来巨大灾难。于是，每当洪水泛滥季节来临之前，人们便抬着供品去河边祭河神祈平安。每每等人们摆好祭品时，河中就会爬出一只大乌龟来。这只乌龟的背壳有9大块，横竖各3，每一块龟板上都有数点，正好凑成从1到9的数字。可是，谁也不清楚这是怎么一回事。有一年，当这只奇怪的大龟又爬上岸来时，龟背上的秘密被一个看热闹的小孩发现了：“多有趣啊，这些小点点不论是横着加，竖着加，还是斜着加，都得15！”人们猜想，河神大概是要15份祭品吧，如是赶紧依数照办……果然，河水从此再也不泛滥了。

这个流传悠广的神奇故事，实际上源于“神龟负文而出，列于龟背，数至于九，禹遂因而则之，以成九类”的记载。“龟文”即《洛书》，见下图：



(《洛书》)

《周易·系辞传》记云：“河出图，洛出书，圣人则之。”与《洛书》同时出现的还有我们在前面已提及的《河图》，“伏羲时，龙马负图于河，背有文：一六居下，二七居上，三八居左，四九居右，五十居中，伏羲则之以画八卦。”这里记述的就是《河图》出现时的情景，有关龙马负河图的神话至今仍在民间广为流传，据说，河南孟津县西五里处，原来还有负图寺呢。

从《河图》、《洛书》的结构来看，它们还保留着结绳记事和网的印迹，暗示着它们起源于远古的渔猎时期。就其图象来看，一般被认作数阵图，近来也有人把它们看作是古老的星象图。

《河图》与《洛书》从宏观上讲，一直被历代大哲学家奉为宇宙图式，包罗万象。那么，把它们视为星象图也是顺理成章的。国内已有学者开始从古天文学的角度来窥探它们的产生和其中之奥秘。不妨做如下推测：在远古的渔猎时期，先人们发明了网和井。这时的井实际上是用于捕获野兽的陷阱。同时，井在当时还有一项重要的作用，那就是在里面进行天文观测，

“坐井观天”的成语正是描述了这一情景。当先人们坐在井底时，逐渐对井架的结构产生了兴趣，并形成了九州、九野的概念，终有一天他们将数填入了井字格中并导致他们发现了人类第一个数阵。如下左图：

2	9	4
7	5	3
6	1	8

由于当时还没有发明文字，他们就采用《河图》、《洛书》的那种形式，把这一数阵以及观测天象所获得的认识记录了下来，并制成图式刻在龟板上。随着地壳变化，它们被埋到了地下，经过若干世纪，由于洪水泛滥又被冲击出土，这就正应了“河出图，洛出书”之说。

古《河图》、《洛书》早已失传，现在所见到的为宋人所绘制，它被收入朱熹的著作《周易本义》里，遗留后世。1977年

在安徽阜阳市双古堆的西汉墓葬中，出土了一面“太乙九宫占盘”，这一出土文物印证了宋人所绘制的《洛书》显然是有根有据的。

《河图》由一、二、三、四、五、六、七、八、九、十共10个数组成，这10个数相加为55，被古人称为天地之数。《启蒙·本图书》曰：“天一，地二，天三，地四，天五，地六，天七，地八，天九，地十。天数五，地数五，五位相得而各有合。天数二十有五，地数三十，凡天地之数五十有五，此所以成变化而行鬼神也。”所谓天数即奇数，地数即偶数。上面这段话用现代的数学概念来表示就是：

$$1+3+5+7+9=25$$

$$2+4+6+8+10=30$$

$$25+30=55$$

《河图》10个数相加为55，《洛书》9个数相加为45，两者之和是100。这些数的意义可能与远古人求平方或开平方有关。因为：

$$1+2+1=4=2^2$$

$$1+2+3+2+1=9=3^2$$

$$1+2+3+4+3+2+1=16=4^2$$

$$1+2+3+4+5+4+3+2+1=25=5^2$$

.....

.....

.....

.....

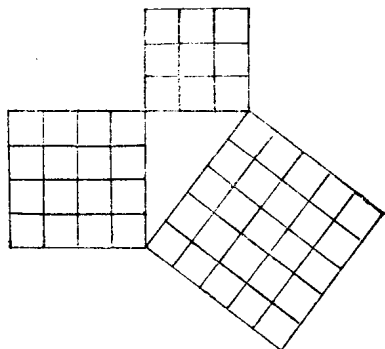
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=100=10^2$$

这也就是说，任何一个数的平方都可以用这种简单的加法求出来；利用它的逆运算，任何一个数的开方也可以用简单的减法求出来。《河图》、《洛书》中的奇数总和为50，偶数总和也为50，这也是一个特殊的数字，它被古人称之为大衍数。大

衍数讲的是勾股弦定律，即， $3^2 + 4^2 = 5^2 = 25$

$$3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$$

勾股弦定理可由下图表示。



在《洛书》这一数阵里，任何方向（横、竖、斜）的数字之和均为15，这就构成了在数学上被称为幻方的图案。《洛书》有3行3列，所以叫3阶幻方，它是世界上最古老的一个幻方。受其影响，后来又构造出了“攒九图”、“龟文聚六图”、“马步幻方”、“双料幻方”、“六角幻方”等等无数奇妙的幻方，以至终于使其成为一门内容极其丰富的新数学分支——组合数学。

《河图》、《洛书》所体现出的数理十分广博深奥，许多近现代科学家从中获得有益的启迪，使他们在自己的研究领域里有所发现有所突破。至于《河图》、《洛书》的真正来源是什么，它们的全部意义又是怎样的，这些问题仍然像谜一样困扰着人们，吸引着人们。

《河图》与五音

数在对不可捉摸的神秘世界进行有层次的说明之后，它本身也获得了神秘性，数崇拜意识也油然而生。这种崇拜对古文

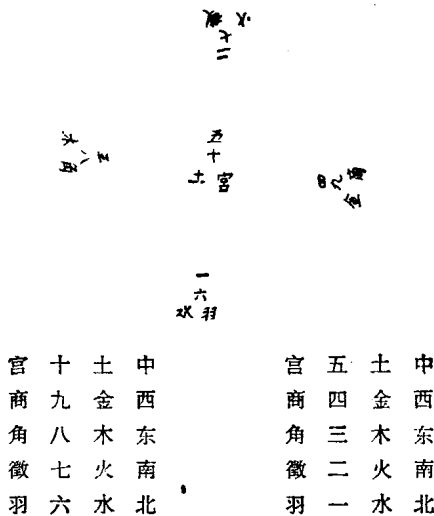
化的影响非常深刻，中国人尚三尚五，对五数的崇拜，远在上古社会就构成了一个以“五行”思想为核心的五数文化系统。天地、自然、人伦统统被制约于“五”的规范下，可以说，这一庞然大物的触角探伸到了自然和社会的方方面面，林林总总，音乐领域也概莫能外，“五音”就是蒂生于五数文化系统这根粗藤上的瓜果。

“五音”亦称“五声”，是宫、商、角、徵、羽五个音级的合称。它们既是音阶的阶名，又可以作调式的调名，在我国传统音乐理论中具有重要意义。《左传·昭公二十五年》子产论乐：“为九歌、八风、七音、六律，以奉五声。”这足以说明五声（五音）在不同音乐体系中的显赫地位。

五音产生的年代以及是怎样产生的，音乐史学家们已做了大量的探究，此处则从另外的角度来探索五音与《河图》的联系。

我们知道五音有高度（振频），有大小（律数），有顺序（排列顺序和生成顺序）等属性，它们与《河图》中的数理是否有着一定的联系呢？现在让我们看一看下面的一段文字：“一曰水，音为羽。天一生水，地六成之。一六其数最少，而音最清；二曰火，音为徵。地二生火，天七成之。二七其数渐增，而音渐浊；三曰木，音为角。天三生木，地八成之。三八其数加增，而音加浊；四曰金，音为商。地四生金，天九成之。四九其数益增，而音益浊；五曰土，音为宫。天五生土，地十成之。五十其数最多，而音最浊。”上述引文出自明郑世子朱载堉的音乐处女作《瑟谱》，据说是他有感于古代律历和谐而发。文中就数理（生数、成数）、五行、五音的相互关系阐明了自己的见解，这与《河图》五音本数图完全相符。人们或许要问，是朱文依图而撰，还是图据朱文而绘？我们认为既然朱载堉始言黄钟律度取法《河图》、《洛书》，自言：“《河图》是为度母，《洛书》是为律本”，那么，朱氏在《瑟谱》中的有关论述源于图说便在情理之中。

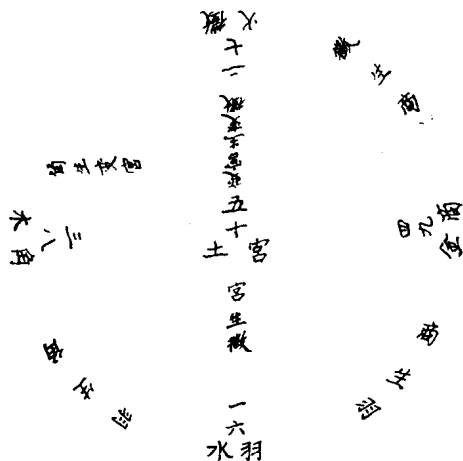
《河图》五音本数图（摘自《河洛精蕴》）。



在该图中，原《河图》的圈点数字化了，5个方位的数字又以五行、五音相配。图下方的文字是两组内容实为相同的排列（根据数以生成的对应法则，十、九、八、七、六、与五、四、三、二、一可视为相等），它们显示着图中四元素（五数、五行、五音、五方）的相应关系：自下而上是五行生出的顺序；自上而下是五音大小（律数）的顺序。5个成数之旁的五音可比作正律之五音，5个生数一边的五音则可作为半律之五音。五音体系中之所以宫音居于《河图》的正中，其道理同五数居中，五居中央而统四方！为什么五行又是按照一六生水，二七生火……的数理和顺序相生呢？其原因张景岳在《类经图翼》中作了解释，鉴于篇幅冗长，兹不赘述。朱载堉从音的清浊变化和数的多少增减推演出《河图》中五音排列的位置，我们只要把《河图》的数列从大排到小，再把五音各自的律数也从大排到小，五（十）、四（九）、三（八）、二（七）、一（六）与宫、商、角、徵、羽按《河图》五音本数图的模式相匹配的道

理也就不难理解了。

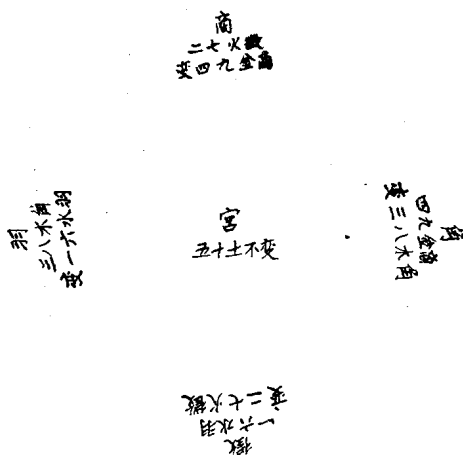
五音不仅有大小的顺序，五方的位置，也有相生的顺序。古人早有“律以隔八相生”的说法，即由此律至彼律为第八位，隔八实际上只相隔七数。《河图》中的数，顺向而数，正符合这一规律。五至二（十二）为隔八，黄钟宫生林钟徵；二至九隔八，林钟徵生太簇商；九至六（十六）隔八，太簇商生南吕羽；六至三（十三）隔八，南吕羽生姑洗角。至此，五音生全。如此继续相生下去，三至十隔八，姑洗角生应钟变宫；十至七（十七）隔八，应钟变宫生蕤宾变徵，一均七音已经偏了。下图为《河图》五音顺序相生图（摘自《河洛精蕴》）：



不难看出，按《河图》数理隔八相生而形成的五音顺序宫——徵——商——羽——角与用“三分损益”法（五度相生）生成的五音顺序是一致的。

当《河图》中的各数进行某种数学运算时，其数理会发生相应的变化。数变，五音自然也随之生变。《河洛精蕴》中的“《河图》五音变数图”正是说明了这种变化。

《河图》五音变数图。



乍一看图，如五里云雾使人头晕目眩，只有把握其中暗喻的数理变化，才可明了其五音变化规律。现根据图说的有关文意制表如下，以帮助读者理解《河图》五音变数图。

方位	五音	本数	运	算	变数	五音
中	宫	5, 10	$5 + 10 = 15$	(15为5的倍数)	5, 10	宫
南	徵	2, 7	$2 + 7 = 9$	$9 - 5 = 4$	4, 9	商
西	商	4, 9	$4 + 9 = 13$	$13 - 10 = 3$ $13 - 5 = 8$	3, 8	角
北	羽	1, 6	$1 + 6 = 7$	$7 - 5 = 2$	2, 7	徵
东	角	3, 8	$3 + 8 = 11$	$11 - 10 = 1$ $11 - 5 = 6$	1, 6	羽

在这一表格里，五音生成的顺序和五音大小的顺序在同一方位里，呈现出在变化中五音的本数为一恒量。数理的变化体