全国著名重点中学特高级教师倾力奉献

走向清华北大，从这里开始

龙班题典

高中数学

鼎奇教育研究中心 策划

大象出版社

龙班教辅：不一样的孩子，一样的未来

龙班题典

《龙班题典·高中语文》

《龙班题典·高中英语》

《龙班题典·高中数学》

《龙班题典·高中物理》

《龙班题典·高中化学》

- 题典类教辅更新换代产品
- 全国中学生最喜爱的教辅图书
- 新课标、新理念、新题典

ISBN 7-5347-3776-1

9 787534 737763 >

ISBN 7-5347-3776-1/G · 3076

定价：25.80元

全国著名重点中学特高级教师倾力奉献

走向清华北大，从这里开始

龙班题典

高中数学

丛书主编：张鸿谋

本册主编：王伟平

本册编者：赵会春　张永春　黄天明　李　勇　全凤明　刘海玲
刘　明　王伟平　李　伟　苗春雨　张鸿谋　陈　刚
陈士杰　李维新　冯　飞　丁悦霞　许德成　刘秋实
胡梦莲　张德保　于丽娜　陈洪启　王新志　赵忠民
高　建　王镇军　傅　清　林　莫　聂春风　刘宇升

图书在版编目(CIP)数据

龙班题典·高中数学/张鸿谋主编;王伟平等著.—郑州:大象出版社,2005.4
ISBN 7-5347-3776-1

Ⅰ.龙...
Ⅱ.①张...②王...
Ⅲ.数学课—高中—习题
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 013924 号

高中数学/龙班题典

总 主 编 张鸿谋
责任编辑 张 扬
装帧设计 王 专
出　　版 大象出版社(郑州市经七路25号 邮政编码450002)
网　　址 www.daxiang.cn
发　　行 大象出版社发行部(电话:010-62045477 0371-63863552)
电子邮件 Longban@sohu.com
印　　刷 河南第一新华印刷厂
版　　次 2005年4月第1版 2005年4月第1次印刷
开　　本 890×1240 1/32
印　　张 21.625
字　　数 936千字
印　　数 1—20 000册
定　　价 25.80元
若发现印、装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换
印厂地址 郑州市经五路12号
邮政编码 450002 电话 (0371)65957860-351

《龙班题典》编写说明

中国是一个重视文教的国度。经过历史的选择和社会的检验，长期以来全国各地形成了一大批文化底蕴深厚、教学成绩突出的名校，成为莘莘学子向往的地方，许多名字早已不胫而走成为耀眼的地方名片和享誉全国的品牌。

长沙市第一中学、湖南师范大学附属中学、华东师大二附中、北京大学附属中学、福建师大附中、清华附中、沈阳东北育才学校、湖北黄冈中学、湖北武钢三中、天津南开中学、北京四中、华中师大一附中、江苏启东中学、华南师大附中、复旦大学附中、山东省实验中学、郑州一中、南京金陵中学、人民大学附中、上海向明中学、北京师大附属实验中学、安徽芜湖一中、哈尔滨师大附中、成都七中、东北师大附中、北京师大二附中……像这样的奥赛明星中学、状元学校在全国还有很多很多。

为满足广大人民群众接收优质教育资源的需求，这些重点中学都走过了一条艰苦探索、勇于改革、大胆创新的成功之路，各种试验班、重点班、尖子班、状元班、奥赛班都为此作出了有益而成功的尝试，并获得十分丰富的经验。在各种耀眼的光环下，许多学生争先恐后地要进重点学校，进了重点学校又争抢着要进重点班，这些重点学校的重点班级又被人们誉为“龙班”。

骄人的成绩使这些学校、这些班级成为望子成龙的家长圆梦的圣地，进重点学校、上“龙班”在很多地方成为时尚和稀缺资源。怎样让这些名校名班的教学经验成为天下人共享的宝贵财富，让求学若渴的学子们同样能够进“龙班”学习从而实现成龙成凤的梦想，一直是许多教育界和出版界人士思考的问题，也有不少出版机构为此作出了自己的努力，这就是我们在一些书店里和书市上经常看到的铺天盖地的所谓“黄冈兵法”、“启东战法”、“天门秘笈”之类的教辅图书。除了大量冒名顶替者外，这些图书对广大学生和教师

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

了解名校名师名班的教学状况起到了一定的作用,但实事求是地分析,绝大部分图书都是在玩弄一些时尚的概念和花招,并没有切中肯綮、找到名校"龙班"的精髓所在,因此,由各地"龙班"任课教师编写的这套**《龙班题典》**就显得尤为难能可贵。

《龙班题典》忠实于全国诸多地区名校、"龙班"、名师的教学实践,把"龙班"教师教学和"龙班"学生学习的核心内容、精华精髓高度浓缩在师生天天打交道的例题、习题之中,所选的例题、习题皆有出处和源头,角度新颖独特,避免题海战术,通过追溯题目源头来了解数以万计的例题和习题怎样演变成为各种典型题型,又如何从各种典型题型中抽象出具体实用的解题方法,各种"方法"又如何回落到具体题目的应用上。教师使用这套丛书,可以针对自己班级学生的实际状况,根据不同程度学生的水平和阶段测验、单元练习、期中期末考试的具体要求,从中精选例题、组合练习和试卷,省去备课和测验考试时寻找典型题目的烦恼。学生使用这套丛书,可以有针对性地查漏补缺,研习例题,巩固基础知识,通过有选择地做题提高能力,从而做到举一反三、掌握方法。书中所选每组例题都有相应的关于此类问题适用方法的"解题指导"和"应考策略",通过某一类型题目的学习,让学生足以领略题目所特定的意境,让学生既掌握题目的源头,又能够提纲挈领地上升到理性高度。

此外,为激励广大学生积极向上,我们搜集整理了古今中外一批著名的格言警句、名言古训,名曰"意林"。其中《初中英语》、《高中英语》为中英文对照,单页英语,双页中文,以期同时增加同学们的语言积累。

《龙班题典》的编写工作历时一年之久,其间上百位优秀教师付出了他们最真诚的奉献,在丛书付梓之际,我们谨向他们致以最热忱的谢意。虽然我们已经做了大量精细的工作,本丛书仍然可能有不如人意的地方,错误在所难免,我们真诚地希望得到您的热心支持,欢迎您的真心指教,以便我们进一步改进工作,使之更臻完善。

《龙班题典》丛书编写组

目　录

第一章　集合与简易逻辑

本章要点

序号	题眼	知识要点
1	集合的概念与集合、元素间的关系	集合、子集、补集、交集、并集、全集的概念及相互之间的关系
2	绝对值不等式、一元二次不等式及不等式与集合的关系	①绝对值不等式的解法；②一元二次不等式的解法
3	命题、逻辑联结词、四种命题及其相互关系	①命题；②逻辑联结词；③四种命题
4	命题与充分、必要条件	①充分条件；②必要条件；③充要条件

题眼 1　集合的概念与集合、元素间的关系

龙班基础题

例 1　(1)设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，且 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$，写出由 x 构成的集合；

(2)写出一元一次方程的解的集合与一元一次方程的集合.

解题指导：本题考查的知识点是集合的构成、集合元素的特点以及集合的表示方法.(1)题中要考虑先去掉绝对值号.a,b,c 都可能取负值或者正值，所以一共有四种可能，需要分类讨论.(2)题考查的知识点是用描述法表示集合.

解：(1)由已知可知，$abc\neq 0$.

所以 a,b,c 的符号有以下四种可能：三负；一正两负；两正一负；三正.

由 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$，分类讨论可得

意林　路径仄处，留一步于人行；滋味浓时，减三分让人爱。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$x=\begin{cases}-3(a,b,c\text{三负});\\-1(a,b,c\text{一正两负});\\1(a,b,c\text{两正一负});\\3(a,b,c\text{三正}),\end{cases}$$

所以,由 x 构成的集合是

$$\{-3,-1,1,3\};$$

(2)一元一次方程的解的集合是

$$\{x\mid ax+b=0,a,b\text{ 是常数,且 }a\neq 0\};$$

一元一次方程的集合是

$$\{ax+b=0\mid a,b\text{ 是常数,且 }a\neq 0\}.$$

知识要点:本题考查的是如何根据集合的元素表述出集合这样一种题型,常用的方法是:(1)当构成集合的元素个数是有限的、较少的时候,可以把这些元素一一列举出来,写在大括号里;(2)当构成集合的元素 x 适合条件 $P(x)$ 时,集合写成 $\{x\mid P(x)\}$ 的形式.在第(1)小题的解答过程中,求 x 的值时,运用了分类讨论的数学思想,即把 a,b,c 的取值分成四类:一个正的也没有;有一个正的;有两个正的;有三个正的.第(2)小题中应该注意:一元一次方程的解的集合中,代表元素是实数 x,这个集合是实数的集合;一元一次方程的集合中,代表元素是方程 $ax+b=0(a\neq 0)$,这个集合是方程的集合.

例2 已知数集 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$,且 $1\in A$,求实数 a 的值.

解题指导:本题考查的知识点是集合与元素之间的关系,因为 $1\in A$,所以集合中的三个元素都有可能是1,但是在解出 a 之后一定要根据集合中元素的互异性排除使得集合有相同元素的 a 值.

解:分别令集合中的三个数为1,得 $a=0,-1,-2$.

根据元素的互异性可排除 $-1,-2$.所以 $a=0$.

知识要点:本题所用的解法是"特殊值法".但是最后一定要根据集合元素的互异性对 a 的值进行考查.

例3 已知集合 $A=\{x\mid x=n^2+2n+1,n\in\mathbf{N}_+\}$,$B=\{x\mid x=n^2,n\in\mathbf{Z}\}$,试问:集合 A,B 相等吗?并说明理由.

解题指导:本题考查的知识点是集合之间的关系,把判断集合相等的问题转化为判断两个集合的元素是否相同,因为集合要相等,元素必须是相同的.集合 A 的元素是 $x=n^2+2n+1,n\in\mathbf{N}_+$,所以 $A=\{2^2,3^2,\cdots\}$,而集合 $B=\{x\mid x=n^2,n\in\mathbf{Z}\}$,所以 $B=\{0^2,1^2,2^2,\cdots\}$,元素不全相同.

解:由于 $n^2+2n+1=(n+1)^2$,$n\in\mathbf{N}_+$ 时,

$$(n+1)^2\geqslant 2^2,$$

意林 当你给见面礼的时候,别忘了给下马威。

——李敖

即 $A=\{2^2,3^2,\cdots\}$.

而 $n\in\mathbf{Z}$ 时，$n^2\geqslant 0^2$，$B=\{0^2,1^2,2^2,\cdots\}$.

故 A 与 B 不相等，且 $A\subsetneqq B$.

知识要点：本题考查的是如何判断集合相等，方法是对集合的元素进行分析，判断它们之间的关系. 判断无限集的关系时，可将元素按某种规律排成一列，然后加以判断.

例 4 设含有 8 个元素的集合 A 的全部子集数为 S，其中含 5 个元素的子集数为 T，求 T/S 的值.

解题指导：对已知集合元素的个数，求集合的子集数的方法应该作为一个公式记忆. 分别计算出值之后计算比值就可以.

解：集合 A 的全部子集数为

$$S=C_8^0+C_8^1+C_8^2+\cdots+C_8^8=2^8.$$

其中含 5 个元素的子集数 $T=C_8^5$.

$\therefore \dfrac{T}{S}=\dfrac{C_8^5}{2^8}=\dfrac{C_8^3}{2^8}=\dfrac{7}{32}.$

知识要点：本题解题过程中应用了如下知识，即“一般地，若集合 M 中含有 n 个元素，那么集合 M 的全部子集数为 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$. 真子集的个数为 2^n-1. 含有 m 个元素的子集的个数是 C_m^n.”

例 5 (1)已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$，$N=\{(x,y)\mid x-y=4\}$，那么集合 $M\cap N$ 为(　　)；

A. $x=3,y=-1$　　B. $(3,-1)$　　C. $\{3,-1\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

(2)若 $P=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $P\cap Q$ 等于(　　).

A. P　　B. Q　　C. $\varnothing$　　D. 无法计算

解题指导：(1)题考查的是对集合元素的形式以及集合元素的几何意义的理解. 如果考虑几何意义那么本题中的交集应该是两条直线交点坐标的集合，或者考虑为二元一次方程组 $\begin{cases}x+y=2,\\x-y=4\end{cases}$ 的解集，也就是说元素必须是成对出现的. 作为一个选择题，只看形式就知道选 D. (2)中的两个集合可以看作是两个函数的值域，分别求出函数的值域就可以求解.

解：(1)因为集合 M 和 N 中的代表元素为有序实数对 (x,y)，所以 $M\cap N$ 的运算结果必定是点的集合，所以只有答案 D 正确，选 D.

(2)P,Q 的代表元素都是 y，分别表示函数 $y=x^2$，$y=x^2+1$ 的值域，由 $P=\{y\mid y\geqslant 0\}$，$Q=\{y\mid y\geqslant 1\}$知，$Q\subsetneqq P$，即 $P\cap Q=Q$，选 B.

知识要点：本题考查的知识点是如何求集合的交集，求交集时要注意集合的元素，集

意林　欲人勿闻，莫若勿言；欲人不知，莫若勿为。——班固

合的元素可以是很多种形式，一定要看清楚集合的元素的特征，注意集合的元素是什么形式，特别是用描述法表示的集合的形式.

例 6 确定下列集合的子集的个数.

(1)$A=\{1,2,\cdots,2004\}$；

(2)$B=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,(x+1)(x-2)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)=0\right\}$；

(3)$C=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,(x^2+1)\left(x^2+x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=0\right\}$；

(4)$D=\{x\,|\,x\geqslant 2004,x\leqslant 2004\}$.

解题指导：解答本例，需要分成两步：(1)确定集合的元素的个数；(2)使用 $2^{\text{card}(A)}$ 计算集合 A 的子集的个数.

解：(1)$A=\{1,2,\cdots,2004\}$ 含有 2004 个元素，即 $\text{card}(A)=2004$，

所以，A 的子集的个数是 $2^{\text{card}(A)}=2^{2004}$.

(2)方程 $x^2+x+\frac{1}{4}=0$ 的根的判别式

$$\Delta=1^2-4\times1\times\frac{1}{4}=0,$$

所以，方程 $x^2+x+\frac{1}{4}=0$ 有两个相等的实根，

所以，方程 $(x+1)(x-2)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)=0$ 的实根是三个实数，所以 $\text{card}(B)=3$，

所以，B 的子集的个数是 $2^3=8$.

(3)因为 $x^2+1>0$ 恒成立($x\in\mathbf{R}$)，

所以，方程 $(x^2+1)\left(x^2-x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=0$ 可化为

$$x^2-x+\frac{\sqrt{2}}{4}=0. \qquad ①$$

又因为 $x^2-x+\frac{\sqrt{2}}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}-1}{4}>0$，所以，方程①无实根，

所以，方程 $(x^2+1)\left(x^2-x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=0$ 无实根，

所以 $C=\varnothing$，

所以，C 的子集的个数是 1.

(4)由 $x\geqslant 2004$，$x\leqslant 2004$，可得 $x=2004$，所以 $D=\{2004\}$，所以 $\text{card}(D)=1$，所以，D 的子集的个数是 $2^1=2$.

意林 创造，或者酝酿未来的创造。这是一种必要性：幸福只能存在于这种必要性得到满足的时候。

——罗曼·罗兰

知识要点：本题考查的是如何确定集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的子集的个数. 方法：用 card(A) 表示集合 A 的个数，这时集合 A 共有 $2^{card(A)}$ 个子集.

例 7　如图 1-1-1，I 是全集，M,P,S 是 I 的三个子集，则阴影部分所表示的集合是(　　).

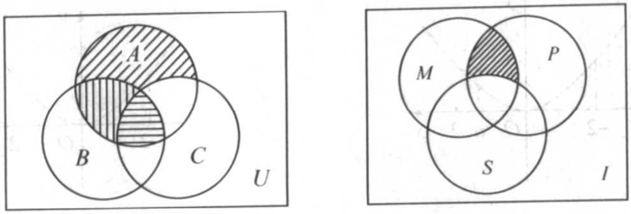

图 1-1-1

A. $(M\cap P)\cap S$　　B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap(\complement_I S)$　　D. $(M\cap P)\cup(\complement_I S)$

解题指导：本题考查的是集合表示法中的图形法的图形的辨别，要注意总结这方面的规律. 如图，横线阴影区域：$A\cap B\cap C$；竖线阴影区域：$(A\cap B)\cap(\complement_U C)$；斜线阴影区域：$A\cap[\complement_U(B\cup C)]$.

解：阴影部分是 M 与 P 的公共部分，且在 S 的外部，它表示 $(M\cap P)\cap(\complement_I S)$. 选 C.

知识要点：解决图中集合的问题，关键是要对图的各部分之间的关系看明白. 有些题目仍需要一题一议.

综合应用题

例 8　设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2,x\in A\}$，且 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

解题指导：当 $-2\leqslant x\leqslant a$ 时，$z=x^2$ 的范围与 a 的取值的正负以及 a 与 2 的大小均有关系. 因而先对 a 进行讨论，求得 C 后，再根据 $C\subseteq B$ 求 a 的取值范围.

解：$\because A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，

$\therefore B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 2a+3\}$.

①当 $-2\leqslant a\leqslant 0$ 时，如图 1-1-2，

$C=\{z\mid a^2\leqslant z\leqslant 4\}$.

$\because C\subseteq B$，$\therefore 4\leqslant 2a+3$.

解之得 $a\geqslant\frac{1}{2}$，这与 $-2\leqslant a\leqslant 0$ 矛盾.

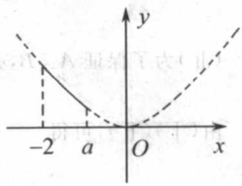

图 1-1-2

意林　你不得不随遇而安，但是，你应该努力按照你向往的方式去生活。——坎贝尔

②当 $0<a\leqslant 2$ 时，如图 1-1-3，$C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant 4\}$.

$\because C\subseteq B$，$\therefore 4\leqslant 2a+3$. 解之得 $a\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$.

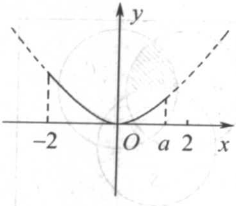

图 1-1-3

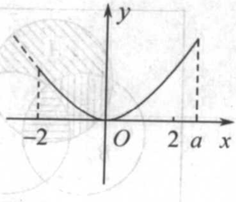

图 1-1-4

③当 $a>2$ 时，如图 1-1-4，$C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant a^2\}$.

$\because C\subseteq B$，$\therefore a^2\leqslant 2a+3$. 解之得 $-1\leqslant a\leqslant 3$，$\therefore 2<a\leqslant 3$.

综上所述，a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},3\right]$.

应考策略：本题考查的是集合之间的关系. 这类题目要对集合的元素根据集合之间的关系进行运算. 这个题目中集合的元素的表示形式不同，不要受到影响，对这类题目要注意不管 x,y,z 是什么形式，它们只是用来代表集合的元素. 然后就对集合进行分析，求出集合元素的具体的范围，然后根据题目要求解题.

例 9 设集合 $A=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，$B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，且 $A\subseteq B$，求实数 m 的取值范围.

解题指导：本例应就 $A=\varnothing$ 与 $A\neq\varnothing$ 两种情况分类讨论.

解：(1)若 $A=\varnothing$，则

$$m+1>2m-1,$$

由此可得 $m<2$； ①

(2)若 $A\neq\varnothing$，则

(Ⅰ)为了保证 A 中至少含有一个元素，必须且只需

$$m+1\leqslant 2m-1.$$

(Ⅱ)为了保证 $A\subseteq B$，必须且只需

$$m+1\geqslant -2,\text{且 } 2m-1\leqslant 5.$$

由(Ⅰ)(Ⅱ)，可得

$$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\ m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}$$

意林 健全的心灵从来不肯冷言冷语伤人。

——[法国]莫里哀

由此可得 $2\leqslant m\leqslant 3$.

由①②可知，m 的取值范围是 $\{m\mid m\leqslant 3\}$.

应考策略： 解决本题的一个很重要的方面就是要注意针对 $A=\varnothing$ 与 $A\neq\varnothing$ 两种情况进行讨论. 这是整个题目的格局，而在解题的时候很多同学犯的错误往往是把第一种情况丢掉了.

例 10　已知集合 $A=\left\{y\mid y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,x\in\mathbf{R}\right\}$，集合 $B=\{x\mid(m+6)x^2+2mx+1\leqslant 0\}$，是否存在实数 m，使 $B\subseteq A$ 成立，并说明理由.

解题指导： 这是存在型探索性问题，先假设实数 m 存在，然后在假设成立的前提下推理和论证. 由指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x(x\in\mathbf{R})$ 的值域知 $A=\mathbf{R}^+$. 再由 $B\subseteq A$ 转化为关于 m 的一元二次不等式 $(m+6)x^2+2mx+1\leqslant 0$ 是否存在正实数根的问题，借助一元二次函数图象加以分析、讨论.

解： 假设符合题目条件的实数 m 存在.

由 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$y>0$，即 $A=\mathbf{R}^+$，

对 B 中不等式：$(m+6)x^2+2mx+1\leqslant 0$

(1) 当 $m+6=0$，即 $m=-6$ 时，

有 $B=\left\{x\mid x\geqslant\frac{1}{12}\right\}$，所以 $B\subseteq A$.

(2) 当 $m+6<0$，即 $m<-6$ 时，

有 $\Delta=4m^2-4(m+6)>0$.

此时 $x\leqslant\frac{-m+\sqrt{m^2-(m+6)}}{m+6}<0$，或 $x\geqslant\frac{-m-\sqrt{m^2-(m+6)}}{m+6}>0$，

有 $B\subseteq A$ 不成立.

(3) 当 $m+6>0$，即 $m>-6$ 时，根据判别式 Δ 的值可分为两种情况：

① $\Delta=4m^2-4(m+6)<0$，即 $-2<m<3$ 时，

有 $B=\varnothing$，$B\subseteq A$；

② $\begin{cases}\Delta=4m^2-4(m+6)\geqslant 0,\\ x_1+x_2=\dfrac{-2m}{m+6}>0,\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{m+6}>0,\end{cases}$

解之得 $-6<m\leqslant -2$，

有 $B=\{x\mid 0<x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$，$B\subseteq A$.

意林　德行的实现是由行为，不是由文字。

——夸美纽斯

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com