全国高等教育自学考试

工程数学线性代数自学辅导

组编/全国高等教育自学考试指导委员会
主编/魏战线

辽宁大学出

全国高等教育自学考试

工程数学

线性代数自学辅导

全国高等教育自学考试指导委员会组编

魏战线　编

辽宁大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学《线性代数》自学辅导/魏战线编. －沈阳：辽宁大学出版社，2002. 1
ISBN 7－5610－3917－4

Ⅰ. 工… Ⅱ. 魏… Ⅲ. ①工程数学－高等教育－自学考试－自学参考资料 ②线性代数－高等教育－自学考试－自学参考资料
Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 21592 号

辽宁大学出版社出版
网址.http.//www lnupress com cn
Email.mailer@lnupress com cn
(沈阳市皇姑区崇山中路 66 号 邮政编码：110036)

开本:880 毫米×1230 毫米 1/32 字数:190 千字 印张:6 625
丹东日报印刷厂印刷 印数:10101－20100 册
2002 年 1 月第 2 版 2002 年 1 月第 2 次印刷

责任编辑:李红舸 责任校对:王中文

定价:10.00 元

出版前言

为了完善高等教育自学考试教育形式，促进高等教育自学考试的发展，我们组织编写了全国高等教育自学考试自学辅导书。

自学辅导书以全国考委公布的课程自学考试大纲为依据，以全国统编自考教材为蓝本，旨在帮助自学者达到学习目标，顺利通过国家考试。

自学辅导书是高等教育自学考试教育媒体的重要组成部分，我们将根据专业的开考情况和考生的实际需要，陆续组织编写、出版文字、音像等多种自学媒体，由此构成与大纲、教材相配套的、完整的自学媒体系统。

全国高等教育自学考试指导委员会

2002年1月

编者的话

本书是依据全国高等教育自学考试指导委员会制订的本科《线性代数自学考试大纲》和全国高等教育自学考试指定教材《线性代数》(魏战线编,辽宁大学出版社出版)的要求编写的,旨在帮助自学考生更好地理解和掌握线性代数的基本内容,并在学习方法、自学能力、解题能力等方面均有所提高,增强自学考生自学成功的信心。

本书共分5章,外加3个附录。每一节都包括如下4部分内容:

(1)内容提要:通过对内容系统地归纳整理,使读者对基本内容及要点一览无余。

(2)基本要求:依据考试大纲,把本节的内容分几点说清,指出应理解什么、了解(知道)什么、掌握什么、会什么。

(3)重点与难点分析:侧重重点内容的分析讲解,意在揭示数学概念的实质,强调基本理论与基本方法,指出难点及怎样突破难点。

(4)例题分析:采用分析、一题多解、附注、小结、提问等多种讲法,指导学习方法和解题方法,帮助读者理解概念、掌握方法。建议读者在阅读这些例题时,自己先想一想、作一作,然后再看书中的解答,这样效果会更好一些。

每章后都有配套的习题。

附录1为“复习与应考指导”,通过指导复习方法,帮助自学考生提高应考能力,满怀信心,轻轻松松地争取好成绩。

附录2为两套“综合自测题”,用作考生在全面复习的基础上检验一下掌握的程度。

附录3为“习题、综合自测题答案与提示”。

本书的适用性较广,除自学读者外,也可作为成人教育、电大、函授

大学、职业学院及全日制高校线性代数课程的学习辅导书。

限于编者水平，书中难免有缺点、错误，希望读者多多批评指正。

编者

目　录

第 1 章　矩阵和行列式

矩阵不仅是线性代数的主要讨论对象之一，而且是非常重要的数学工具，它的理论和方法贯串于本课程的始终。行列式也是必不可少的数学工具，它在处理线性方程组、向量组的线性相关性、矩阵的秩、方阵的特征值和正定二次型等问题中都起着很重要的作用。矩阵是一个矩形数表，而行列式则可看作是由方阵所确定的一个数，所以矩阵和行列式是完全不同的两个概念，但二者又有密切的联系，例如，在建立逆矩阵的理论中就必须用到行列式。

1.1　矩阵及其运算

1.1.1　内容提要

1.　矩阵的概念

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1,\cdots,m;j = 1,\cdots,n)$ 排成的 m 行、n 列的矩形数表

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ 矩阵，简记为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$。并称 a_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、第 j 列元素，简称为 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元素。当 $m = n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵或 n 阶矩阵。

如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ 的对应元素都相等，即 $a_{ij} = b_{ij}(i = 1,\cdots,m;j = 1,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$。

必须十分熟悉一些常见的特殊矩阵，例如：零矩阵、单位矩阵、行矩阵（行向量）、列矩阵（列向量）、上（下）三角矩阵、对角矩阵、分块对角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵等。

2. 矩阵的加法及数乘矩阵的运算

关于矩阵的加法，必须注意只有同型矩阵才能相加，并且同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}\ (b_{ij})_{m\times n}$ 相加，归结为它们的对应元素相加，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}\text{。}$$

矩阵加法有以下运算规律：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$（加法交换律）；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$（加法结合律）；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$（零矩阵的作用）；

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$（负矩阵的作用）。

数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，归结为用 k 去乘 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素，即

$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}\text{。}$$

数乘矩阵满足以下运算规律：

(1) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(2) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$（$k$、$l$ 是数）；

(3) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$（分配律）；

(4) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$（分配律）。

矩阵加法及数乘矩阵的运算统称为矩阵的**线性运算**。

3. 矩阵的乘法

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则

$$\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}\text{，}$$

其中
$$(c_{ij})=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)\text{。}$$

矩阵乘法有以下运算规律：

(1) $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$（单位矩阵的作用）；

(2) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$（乘法结合律）；

(3) $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{AB})$（$k$ 为常数）；

(4) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$（左分配律）；

(5) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$（右分配律）；

4. 方阵的幂

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的幂定义为

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^m=\underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{m\text{ 个 }\boldsymbol{A}\text{ 连乘}}\ (m\text{ 为正整数})。$$

方阵的幂有下列运算规律(其中 m、n 为非负整数):

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{m+n},(\boldsymbol{A}^m)^n=\boldsymbol{A}^{mn}。$$

但因矩阵乘法不满足交换律,因而下列等式(其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵,m 为正整数)

$(\boldsymbol{AB})^m=\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2,$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$

不一定成立,只在 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时它们才都成立。

5. 矩阵的转置

$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是一个 $n\times m$ 矩阵,其 (i,j) 元素为 a_{ji},即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}。$$

矩阵转置有以下运算规律:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;　　(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;　　(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵;若方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵。

6. 分块矩阵及其运算

关于分块矩阵的运算,要特别注意不同的运算对矩阵分块的方式有不同的要求:

(1)用分块矩阵作加(减)运算 $\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}$ 时,必须对同型矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 作同样的分划;

(2)用分块矩阵作乘法运算 $\boldsymbol{AB}$ 时,对 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法必须与对 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法相一致。

分块对角矩阵的加(减)法、数乘、乘法及幂运算类似于对角矩阵的相应运算,因而如果方阵能分划成分块对角矩阵,则其运算可以简化。

1.1.2 基本要求

本节的基本要求是:

1. 理解矩阵的概念。

2. 掌握矩阵的加法、数乘、乘法、方阵的幂、转置等运算及其运算规律。

3. 了解分块矩阵的概念,会用分块矩阵作矩阵的运算。

1.1.3 重点与难点分析

本节的重点是矩阵的运算,其中又以矩阵的乘法最为重要,矩阵的乘法也是本节的难点。首先,不是任意两个矩阵都能相乘,$\boldsymbol{AB}$ 有意义必须是 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数。其次,要计算 $\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}$,就要计算它的所有元素 $c_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$,由于 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$ 的计算较繁,所以必须耐心。读者必须充分理解矩阵乘法"左行乘右列"的实质,并通过练习达到熟练掌握。

矩阵乘法与数的乘法不同,尤其要注意以下 3 点:

(1)矩阵乘法不满足交换律,就是说,当乘积 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时,$\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义;即使 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义,也不一定有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。因此矩阵乘法有左乘和右乘之分,相乘的矩阵的次序不可随便颠倒。如果有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换。

(2)当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 时,不能肯定 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$(但若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{A}$ 为可逆方阵,则由给 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 两端左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,可推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$;同理若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{B}$ 为可逆方阵,则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$)。

(3)矩阵乘法不满足消去律,即若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$,但不能肯定 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。例如,对于矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix},$$

虽然有

$$AB=\begin{bmatrix}4&6\\0&0\end{bmatrix}=AC。$$

但 $B\neq C$(如果 $AB=AC$ 且 A 为可逆方阵,请读者考虑是否有 $B=C$?)

为了掌握矩阵的运算,需要熟悉矩阵运算的运算规律。就运算规律而言,矩阵的运算与数的运算有许多相同的地方,也有许多不同之处,学习时特别要注意它们的不同之处,切不可将数的运算照搬到矩阵的运算中来。为了有助于读者掌握矩阵的运算规律,现将数的运算与矩阵的运算的异同点归纳成表 1.1(其中不同点中的矩阵运算是指不能一般地肯定成立)。

表 1.1　数的运算与矩阵的运算的运算规律比较

	数的运算	矩阵的运算
相同点	1. $1\times a=a\times 1=a$	1. $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$
	2. $0\times a=a\times 0=0$	2. $\boldsymbol{0}_{m\times m}\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{0}_{n\times n}=0_{m\times n}$
	3. $a+0=a$	3. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$
	4. $a+b=b+a$	4. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$
	5. $(a+b)+c=a+(b+c)$	5. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$
	6. $a+(-a)=0$	6. $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=0$
	7. $k(a+b)=ka+kb$	7. $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$
	8. $(k+l)a=ka+la$	8. $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$
	9. $(ab)c=a(bc)$	9. $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$
	10. $(a+b)c=ac+bc$	10. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$
	11. $a(b+c)=ab+ac$	11. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$
	12. $(ka)b=a(kb)=k(ab)$	12. $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{AB})$
	13. $a^m a^n=a^{m+n}$	13. $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{m+n}$
	14. $(a^m)^n=a^{mn}$	14. $(\boldsymbol{A}^m)^n=\boldsymbol{A}^{mn}$
不同点	1. $ab=ba$	1. $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$
	2. $ab=0\Rightarrow a=0$ 或 $b=0$	2. $\boldsymbol{AB}=0\nRightarrow\boldsymbol{A}=0$ 或 $\boldsymbol{B}=0$
	3. $ab=ac, a\neq 0\Rightarrow b=c$	3. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC},\boldsymbol{A}\neq 0\nRightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$
	4. $(ab)^m=a^m b^m$	4. $(\boldsymbol{AB})^m\neq\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m$
	5. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$	5. $(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2\pm 2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$
	6. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	6. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$

1.1.4 例题分析

例 1.1 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\3&1&2\\-1&4&5\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&4\\-1&2\\0&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&0&3\end{bmatrix},$$

计算 $\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{AC}^{\mathrm{T}}$。

解

$$\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&4\\-1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&0&3\end{bmatrix}+\boldsymbol{A}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&4&10\\-3&-2&7\\1&0&-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-2&0\\3&1&2\\-1&4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&10\\0&-1&9\\0&4&2\end{bmatrix}。$$

如直接计算 $\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{AC}^{\mathrm{T}}$，则需作两次乘法和一次减法运算。根据矩阵乘法的分配律，可将它改写成 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})$，这样就只需作一次乘法和一次减法运算：

$$\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{AC}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{A}\left(\begin{bmatrix}2&4\\-1&2\\0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-2\\4&0\\-2&6\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1&-2&0\\3&1&2\\-1&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&6\\-5&2\\2&-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&2\\-1&6\\-10&-33\end{bmatrix}。$$

例 1.2 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{12}&a_{22}&b_2\\b_1&b_2&c\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix},$$

计算 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$。

解 根据矩阵乘法结合律，求乘积 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 时可以先求 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，也可以先求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，下面采用后一作法。

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ a_{12}x + a_{22}y + b_2 \\ b_1x + b_2y + c \end{bmatrix}$$

$$= x(a_{11}x + a_{12}y + b_1) + y(a_{12}x + a_{22}y + b_2) + 1(b_1x + b_2y + c)$$

$$= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_2x + 2b_1y + c\text{。}$$

注意乘积 $\boldsymbol{x}_{1\times3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{3\times3}\boldsymbol{x}_{3\times1}$是一个 1 阶方阵，也就是一个数，因而最后的计算结果可以不加括号。

例 1.3 设矩阵 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{BA}$，其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = [1 \quad 2],$$

求 $\boldsymbol{C}^6$。

解法 1 求方阵 $\boldsymbol{C}$ 的幂$\boldsymbol{C}^n$ 的常用方法之一是归纳法，即先通过计算 $\boldsymbol{C}^2, \boldsymbol{C}^3, \cdots$等来观察并归纳出 $\boldsymbol{C}^n$ 的结构规律，再用数学归纳法加以证明。由于

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}[1 \quad 2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{C},$$

$$\boldsymbol{C}^3 = \boldsymbol{C}^2\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{C},$$

因此猜想 $\boldsymbol{C}^n = 2^{n-1}\boldsymbol{C}$。下面用数学归纳法来证明这一结论：当 $n = 2$ 时，$C^2 = 2C$，结论成立。设结论当 $n = k$ 时成立，即 $\boldsymbol{C}^k = 2^{k-1}\boldsymbol{C}$，则当 $n = k + 1$ 时，有 $\boldsymbol{C}^{k+1} = \boldsymbol{C}^k\boldsymbol{C} = (2^{k-1}\boldsymbol{C})\boldsymbol{C} = 2^{k-1}\boldsymbol{C}^2 = 2^{k-1}2\boldsymbol{C} = 2^k\boldsymbol{C}$，即当 $n = k + 1$ 时结论也成立。故对任何正整数 n 都成立 $\boldsymbol{C}^n =$

$2^{n-1}\boldsymbol{C}$。特别地本题所求的幂为

$$\boldsymbol{C}^6 = 2^5\boldsymbol{C} = 32\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 32 & 64 \\ 16 & 32 \end{bmatrix}。$$

解法 2　注意在 $\boldsymbol{BA}$ 的连乘式中会出现 $\boldsymbol{AB}$，而

$$\boldsymbol{AB} = [1 \quad 2]\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2,$$

因此，由矩阵乘法结合律，得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}^6 &= (\boldsymbol{BA})^6 = \boldsymbol{BABABABABABA} \\ &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{B}2^5\boldsymbol{A} = 2^5(\boldsymbol{BA}) = \begin{bmatrix} 32 & 64 \\ 16 & 32 \end{bmatrix}。 \end{aligned}$$

例 1.4　设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}^n(n=2,3,\cdots)$。

解法 1　由 $\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

因此猜想

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

现在利用数学归纳法来证(1.1)式：当 $n=2$ 时(1.1)式显然成立。假设当 $n=k$ 时(1.1)式成立，即

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{bmatrix}1 & k & \frac{k(k-1)}{2}\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & k+1 & \frac{k(k+1)}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

所以当 $n=k+1$ 时(1.1)式也成立,故(1.1)式对 $n=2,3,\cdots$ 都成立。

解法 2 记矩阵

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

则

$$A=E+B,$$

因为单位矩阵 E 与任何同阶方阵可交换,所以有

$$A^n=(E+B)^n=E^n+nE^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2!}E^{n-2}B^2+\cdots+EB^n$$

$$=E+nB+\frac{n(n-1)}{2!}B^2+\cdots+B^n, \tag{1.2}$$

而

$$B^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$B^3=B^2B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0},$$

所以 $B^k=0\ (k\geqslant 3)$,代入(1.2)式,得

$$A^n=E+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2$$