控制科学与工程研究生系列教材

广义系统

杨冬梅 张庆灵 姚 波 等 编著

科学出版社
www.sciencep.com

控制科学与工程研究生系列教材

广义系统

杨冬梅　张庆灵　姚　波　等编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书以线性广义系统为研究对象，系统地介绍了广义系统的分析与综合的理论和方法。主要内容包括：线性系统及数学理论基础；状态空间描述和运动分析；能控性和能观性；稳定性与广义李雅普诺夫方程；哈密顿矩阵与广义里卡蒂方程；反馈控制；状态观测器与动态补偿器；参数化控制器的设计；线性二次型最优控制；H_2 和 H_∞ 优化控制；鲁棒控制及离散广义系统等。

本书可作为控制理论与控制工程、系统工程、信息与计算科学以及相关的工程与应用专业的研究生和高年级本科生的教材或教学参考书，也可供从事相关专业教学和科研工作的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

广义系统/杨冬梅，张庆灵，姚波等编著．—北京：科学出版社，2004
(控制科学与工程研究生系列教材)
ISBN 7-03-012597-5

Ⅰ．广…　Ⅱ．①杨…②张…③姚…　Ⅲ．广义系统理论-研究生-教材
Ⅳ．N941.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 125209 号

责任编辑：段博原 [redacted] / 责任校对：陈丽珠
责任印制：安春 [redacted] / 封面设计：[redacted] 敬

科学[redacted]社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
丽源印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2004 年 5 月第　一　版　　开本：B5(720×1000)
2004 年 5 月第一次印刷　　印张：12 1/2
印数：1—3 000　　　　　　字数：229 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

随着现代控制理论研究的日趋深入，以及向其他学科诸如航空、航天、能源、网络、电力、石油、化工和通讯等应用领域的渗透，人们发现了一类更具广泛形式的动力系统，这就是广义系统。广义系统的概念被首次提出是在20世纪70年代，虽然只经过短短的二十几年，广义系统理论却取得了令人瞩目的研究成果，已经发展成为现代控制理论的一个独立的分支。

特别是近十几年来，由于国内外众多学者的参与和关注，广义系统理论发展得很快，不断有新的研究成果在国内外专业杂志及重要会议上发表，国内的一些高校和研究机构也做了许多出色的工作，一些大学还在相关专业的研究生中开设"广义系统"这门课程，但直至今天，国内仍然没有一本详细介绍广义系统基本理论的著作或教材。本书的出版，将给国内一批有兴趣涉足广义系统理论研究的学者带来极大的方便，也必将促进广义系统理论的进一步发展。

本书是在作者为控制专业的硕士研究生讲授"广义系统"课程的基础上，参照国内外广义系统的研究现状，结合作者近年来的最新研究成果编写而成。本书力求做到内容由浅入深，循序渐进，便于教学或自学使用。为了使读者尽快地了解广义系统的基本概念、基本分析和设计方法，本书在内容选择上坚持少而精的原则，重点突出，层次分明，并配备了部分例题和习题，以帮助读者对内容的理解。通过本书的学习，读者不仅能全面地掌握广义系统最基本的理论知识，而且对广义系统的一些热门课题也能有所了解，从而使读者快速地深入到广义系统理论研究的前沿。这里需特别说明的是，本书是以线性系统理论为基础的，因此要求读者掌握线性系统的基本理论，还要具备一定的代数基础知识。

全书共分12章，以线性广义系统为研究对象，系统地介绍了广义系统的分析与综合的理论和方法。主要内容包括：第一章介绍线性系统及数学理论基础；第二章介绍状态空间描述和运动分析；第三章介绍能控性和能观性；第四章介绍稳定性与广义李雅普诺夫方程；第五章介绍哈密顿矩阵与广义里卡蒂方程；第六章介绍反馈控制；第七章介绍状态观测器与动态补偿器；第八章介绍参数化控制器的设计；第九章介绍线性二次型最优控制；第十章介绍 H_2 和 H_∞ 优化控制；第十一章介绍不确定广义系统的鲁棒控制；第十二章介绍离散广义系统。

本书是一本系统、全面地介绍广义系统各类基本问题的专业著作，可作为控制理论与控制工程、系统工程、信息与计算科学以及与之相关的工程与应用专业的研究生和高年级本科生的教材或教学参考书，也可供从事相关专业教学和科研工作

的人员参考。

本书第五章、第八～十一章以及绪论部分由杨冬梅完成，第二、三章以及第六、七章由张庆灵完成，第一章和第四章由姚波完成，第十二章由张秀华完成。本书在相关问题中还参考了 *Singular Control System*（Dai L. 著）等近年来的研究资料，在此表示感谢。

由于作者学识与研究水平有限，加之时间仓促，书中定有许多缺憾和不完善之处，恳请读者指正。

作　　者

2004 年 2 月于东北大学

缩写词、基本符号

缩写词

LQG	linear quadratic Gauss	高斯线性二次型
ARE	algebraic Riccati equation	代数里卡蒂方程
GARE	generalized algebraic Riccati equation	广义代数里卡蒂方程
LMI(或 LMIs)	linear matrix inequality (inequalities)	线性矩阵不等式
LQR	linear quadratic regulator	线性二次型(最优)调节器
LFT	linear fractional transformation	线性分式变换
GBRL	generalized bound real lemma	广义有界实引理

基本符号

$\mathbf{R}$	实数域	$\Leftrightarrow$	等价于
$\mathbf{R}^n$	n 维实数向量域	$\oplus$	直和
$\mathbf{R}^{m\times n}$	$m\times n$ 维实数矩阵域	$\mathrm{j}w$	虚数
$\mathbf{C}$	复数域	I_n	$n\times n$ 维单位矩阵
$\mathbf{C}^n$	n 维复数向量域	det	行列式
$\mathbf{C}^{m\times n}$	$m\times n$ 维复数矩阵域	deg det	行列式的次数
$\mathbf{C}^-$	左半开复平面域	J_r	r 阶 Jordan 标准形
$\mathbf{C}^+$	右半开复平面域	$\langle,\rangle$	内积
$\mathbf{C}^{\odot}$	单位圆内复数域	$\Vert\cdot\Vert$	2-范数
$\bar{\mathbf{C}}^+$	右半闭复平面域	$\mathrm{Re}(s)$	复数 s 的实部
$\mathbf{C}_p^h$	h 阶分段连续可导函数	$\mathrm{rank}(A)$	矩阵 A 的秩
$\equiv$	恒等于	$\ker(A)$	矩阵 A 的核空间
$\not\equiv$	不恒等于	$\mathrm{Im}(A)$	矩阵 A 的像空间
$\in$	属于	$X_-(A)$	矩阵 A 的稳定的模子空间
$\notin$	不属于	$\mathrm{tr}(A)$	矩阵 A 的迹
$\subset$	包含于	$\mu(A)$	矩阵 A 的测度
$\cup$	并	$\mathrm{diag}(A,B)$	矩阵 A 和 B 构成的分块对
$\cap$	交		

$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$　角矩阵

A^{T}　矩阵 A 的转置

A^{*}　矩阵 A 的共轭转置

A^{-1}　矩阵 A 的逆

$A^{-\mathrm{T}}$　$(A^{\mathrm{T}})^{-1}$

$\lambda(A)$　矩阵 A 的特征值集合

$\lambda_{\max}(A)$　矩阵 A 的最大实特征值

$\sigma(A)$　矩阵 A 的极点域

$A>0$　矩阵 A 正定

$A<0$　矩阵 A 负定

$A\geqslant 0$　矩阵 A 半正定

x^{T}　向量 x 的转置

x^{*}　向量 x 的共轭转置

(E,A)　广义系统

$\lambda(E,A)$　(E,A)的广义特征值集合

$\sigma(E,A)$　(E,A)的有穷极点域

$\mathfrak{R}$　能达集

$G(s)$　传递函数

$G^{\sim}(s)$　$G^{\mathrm{T}}(-s)$

$\sigma\{G(s)\}$　$G(s)$的奇异值

$\bar{\sigma}\{G(s)\}$　$G(s)$的极大奇异值

$\|G(s)\|_2$　$G(s)$的 H_2 范数

$\|G(s)\|_\infty$　$G(s)$的 H_∞ 范数

$\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$　$G(s)$的拉普拉斯逆变换

$Z^{-1}\{G(z)\}$　$G(z)$的 z-逆变换

$\delta(t)$　脉冲时间函数

$\delta(k)$　离散脉冲函数

$\left\{E,\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]\right\}$　状态空间实现

或 $C(sE-A)^{-1}B+D$

$F_l(M,Q)$　M 和 Q 的下 LFT

$F_u(M,Q)$　M 和 Q 的上 LFT

RH_∞　真的稳定传递函数集

RH_2　严格真的稳定传递函数集

$RH_2^{\perp}$　RH_2 的正交补

$RH_\infty^{\perp}$　RH_∞的正交补

$\underset{K}{\mathrm{g\cdot r}}\{A+BKC\}$　矩阵 $A+BKC$ 的类秩（或最大秩）

$[C_1/C_2]$　矩阵$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$

目　　录

绪　论

0.1　广义系统理论的发展概况

广义系统是一类比正常系统更具广泛形式的动力系统,广义系统理论是20世纪70年代才开始形成并逐渐发展起来的现代控制理论的一个独立分支。1974年,英国学者 Rosenbrock H. H. 在国际控制杂志 *International Journal of Control* 上发表了题为"一般动态系统的结构性质"一文,对线性广义系统的解耦零点及系统受限等价性做了研究,首次提出了广义系统的概念。随后,美国学者 Luenberger D. G. 分别在 *IEEE Transaction on Automatic Control* 和 *Automatica* 上发表文章,对线性广义系统解的存在性和惟一性等问题展开研究。从此,拉开了对广义系统理论研究的帷幕。

在广义系统理论发展阶段的初期,即20世纪70年代,研究进展较慢,除上述开创性成果之外,这一时期的突出成果还有 Luenberger D. G. 关于非线性广义系统的研究。进入20世纪80年代,越来越多的控制理论工作者对广义系统产生了浓厚的兴趣,广义系统理论也进入了一个新的发展阶段,从20世纪80年代初到80年代末的10年中,广义系统理论取得了蓬勃的发展,这一阶段的代表性成果有:Cobb D. 提出了广义系统的能控性、能观性及对偶原理;进一步地,Dai L. 将其推广到离散广义系统;Yang C. 等提出了广义系统的最小实现问题;Fahmy M. M. 等进行了观测器的设计;Fletcher L. R. 等分别研究了广义系统的干扰解耦及特征结构配置等问题;Dai L. 分别关于连续及离散广义系统设计了动态补偿器;Bender D. J. 等分别关于连续及离散广义系统研究了线性二次型最优调节器问题;Lin J. 和 Lin X. 分别讨论了时变和时不变广义系统的最优控制问题。综合上述各基本问题的一系列研究成果,Dai L. 于1989年出版了广义系统理论的第一本专著,系统地介绍了广义系统的基础理论,从而标志着广义系统的基础理论已经形成,广义系统理论研究又将进入一个新的发展阶段。

在广义系统理论的最后发展阶段,即从20世纪90年代初至今,已经过了十余年的发展,广义系统的研究已从基础向纵深发展,涉及了从线性到非线性,从连续到离散,从确定性到不确定性,从无时滞到时滞,从线性二次型最优控制到 H_2 和 H_∞ 控制等各个专题,取得了丰硕的成果。

0.2 广义系统模型

广义系统模型存在于社会生产的诸多领域中,例如:电力系统、经济系统、机器人系统、电子网络和宇航系统等。人们熟知的 Leontief 动态投入产出模型、Hopfield 神经网络模型、多个机器人主体协调作业的动力学模型以及具有非线性负载的电力系统模型等都是广义系统。因此,对广义系统理论的研究具有深远的实际意义。

广义系统,又称为奇异系统、微分代数系统或隐式系统,可分为用微分方程描述的连续系统和用差分方程描述的离散系统两类。

连续广义系统的状态方程通常描述如下

$$E(t)\dot{x}(t) = f[x(t),u(t),t] \tag{0.2.1a}$$

$$y(t) = g[x(t),u(t),t] \tag{0.2.1b}$$

其中,$E(t)\in \mathbf{R}^{n\times n}$一般为奇异矩阵;$f[x(t),u(t),t]$和 $g[x(t),u(t),t]$分别为 $x(t),u(t)$和 t 的n 维和m 维向量函数;$x(t),u(t)$和 $y(t)$分别为适当维数的状态、输入和输出向量,t 为时间变量。特别地,当 $\mathrm{rank}[E(t)]=n$ 时,式(0.2.1)表示一个连续的正常系统。

相应地,离散广义系统的状态方程一般描述如下

$$E(k)x(k+1) = f[x(k),u(k),k] \tag{0.2.2a}$$

$$y(k) = g[x(k),u(k),k] \tag{0.2.2b}$$

其中,$E(k)\in \mathbf{R}^{n\times n}$一般为奇异矩阵;$f$ 和g 如上所述;$x(k),u(k)$和 $y(k)$分别为适当维数的状态、输入和输出向量;$k\in \mathbf{N}$ 为时间变量。同样,当 $\mathrm{rank}[E(k)]=n$ 时,式(0.2.2)表示一个离散的正常系统。

线性时不变广义系统理论作为广义系统理论中一个最基本的研究分支,是本书的主要研究内容。线性时不变连续广义系统通常表示为

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{0.2.3a}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{0.2.3b}$$

其中,$E\in \mathbf{R}^{n\times n}$一般为奇异矩阵;$x(t),u(t)$和 $y(t)$如上所述;其他为适当维数的定常实矩阵。

相应地,线性时不变离散广义系统表示为

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{0.2.4a}$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k),\qquad k=0,1,\cdots \tag{0.2.4b}$$

离散系统尽管区别于连续系统,却与之有着众多相似的概念和平行的性质,在证明方法上也多存在相同之处。因此,本书讨论的重点内容是线性时不变连续广义系统理论,对离散广义系统理论只作简要的介绍。

正则性是保证连续和离散线性广义系统对给定的允许初始状态有惟一解的充要条件,因而是广义控制系统设计的最基本的要求。另外,正则性又是广义系统其他一些基本概念或属性的必要条件,所以正则性也蕴涵在这些概念或属性之中。正则的广义系统更是普遍存在的。因此,在本书的绝大部分讨论中都首先要求广义系统是正则的,特别是在广义系统的分析问题中几乎毫无例外地以正则广义系统为研究对象。为了使读者不产生混淆,本书未就非正则的广义系统做特别的讨论,对此有兴趣的读者可参照本书进行研究。

0.3 广义系统与正常系统的联系和区别

广义系统与正常系统相互对应,既存在内在的联系又有着本质的区别。

广义系统与正常系统的联系在于:如果上述各式中的 E 非奇异,则广义系统成为一个正常系统,因此,如果从矩阵 E 的广泛取值的意义来考虑,广义系统是对正常系统的推广。由于正常系统理论的研究基本成熟,已形成一套较为完善的理论体系,所以,为了与之区别,习惯上以 E 为奇异矩阵作为广义系统的明显标志,从而使广义系统理论成为一个独立的研究分支。

除上述矩阵 E 的明显差异之外,广义系统与正常系统还存在许多本质的区别。例如:考虑线性时不变的情形,广义系统与正常系统的区别主要体现在以下几个方面:

(1) 广义系统(0.2.3)的状态响应中通常不仅含正常系统所具有的指数解(对应于有穷极点),而且含有正常系统的状态响应中所不出现的脉冲解和静态解(对应于无穷极点),以及输入的导数项,从而使广义系统出现了正常系统所不具有的脉冲行为。在离散时间情况下,广义系统(0.2.4)的状态 $x(k)$不仅需要 k 时刻以前的信息,还需要 k 时刻以后的信息,即离散广义系统一般不再具有因果性,而正常系统都具有因果性。

(2) 正常系统的动态阶等于系统的维数,而广义系统的动态阶仅仅为 $q=\operatorname{rank}(E)$。

(3) 正常系统的传递函数为真有理分式矩阵,而广义系统的传递函数通常还包含多项式部分。

(4) 正常系统的齐次初值问题的解存在且惟一。但对于广义系统,齐次初值问题可能是不相容的,即可能不存在解;即使有解,也不一定惟一。

(5) 广义系统具有层次性,一层为对象的动态特性(由微分或差分方程描述),另一层为管理特征的静态特性(由代数方程描述),而正常系统没有静态特性。

(6) 广义系统(0.2.3)的极点,除了有 $r=\deg\det(sE-A)$个有穷极点外,还有正常系统不具有的$(n-r)$个无穷极点,在这些无穷极点中又分为动态无穷极点

和静态无穷极点。

(7) 在系统的结构参数扰动下,广义系统通常不再具有结构稳定性。

广义系统的这些特点反映了广义系统比正常系统在结构上变得复杂而富于新颖性,在理论研究上变得困难而更具挑战性。因此,在正常系统理论日趋完善成熟的基础上,广义系统理论也逐渐吸引着国内外许多学者的极大关注。

0.4　广义系统理论的研究方法

到目前为止,广义系统理论的研究思路大多是参照已有的正常系统理论向广义系统推广和移植,其研究方法主要是几何方法、频域方法和状态空间方法。

几何方法是将广义系统化为状态空间中的几何问题进行研究。它的优点是对系统结构有着独到的刻画,例如:广义系统的能控性结构、能控性子空间以及不变子空间的刻画等。而且,几何方法简洁明了,避免了状态空间方法中大量繁杂的矩阵推导运算,且所产生的结果都可化为矩阵运算。其缺点是对系统鲁棒性问题的分析显得无能为力。

多变量频域方法(简称频域方法)是对状态空间描述的广义系统采用频率域的系统描述和频率域的计算方法进行研究。频域方法具有物理直观性强、便于设计调节等优点。

至于状态空间方法(或称时域方法),是对状态空间描述的广义系统主要采用矩阵运算和矩阵变换的计算方法,直接对时域系统进行研究,是广义系统理论中最常用的方法。状态空间法所刻画问题的方式简洁直观,所得结果清晰明了,且可设计相应的软件支持而适宜在计算机上进行运算,因而该方法应用最广,已深入到了广义系统的分析与综合的方方面面,深受广大的控制工程师们所偏爱。里卡蒂(Riccati)方法和目前流行的 LMI(线性矩阵不等式)方法,由于具有能揭示系统的内部结构且易于计算机辅助设计等优点而成为时域状态空间的两个基本方法,也是本书所采用的主要方法。

0.5　广义系统理论的研究展望

广义系统理论的研究迄今有二十几年的历史,已取得了极大的发展,并逐渐形成一个内容丰富的理论体系,已成为现代控制理论的一个重要组成部分。那么,广义系统理论研究将朝哪个方向发展,换句话说,广义系统理论在今后的研究重点是什么,这是我们目前所关心的问题。追踪广义系统理论的研究现状看出,下面的几个方面可以作为我们今后研究的重点工作。

(1) 复杂的广义大系统控制。工程实际情况通常是复杂的,由此产生的广义

系统控制问题也不能不考虑其复杂因素的影响,如:时变性、不确定性、时滞性和分散性等。另外,非线性广义系统更是复杂和困难的。在广义系统的基本理论日趋成熟的今天,对这些复杂的广义大系统的研究显得尤为重要。

(2) 易于工程实现的广义系统控制设计。广义系统模型来源于工程实际,所以广义系统理论的研究最终也要为实际应用服务,因此一个好的设计方法应该易于工程实现,即能够提供一个利用现有的软件所实现的计算机仿真实验。

(3) 广义系统控制软件的编程。控制工程研究的各种设计方法的实现都离不开计算机的帮助,编制通用的广义系统控制软件是非常必要的,它对广义系统理论的发展必将起着积极的推动作用。

(4) 广义系统的应用。发掘广义系统的实际应用背景,将广义系统理论用于解决工程实际问题,从而实现广义系统的应用,才能真正体现广义系统的价值。

总之,作为一门新兴的研究领域,广义系统理论仍处于不断完善、不断发展之中。以它广泛的工程背景,相信无论从理论本身,还是在工程实际中的应用,都将取得更加辉煌的成果。

第一章　线性系统及数学理论基础

本章主要介绍本书所涉及的数学基础知识及线性系统的基本理论。除一些必要的证明外，对大部分结果只给出基本结论而略去证明。读者如果想了解详细的证明过程，可参阅有关的参考书。

1.1　数学基础知识

本节给出正定矩阵、矩阵奇异值、矩阵测度与范数等概念，并给出相关定义的基本性质。

1.1.1　正定二次型与正定矩阵

定义 1.1.1　定义 $\mathbf{R}$ 上一个 n 元二次型

$$q(X) = q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = X^{\mathrm{T}}AX \tag{1.1.1}$$

其中，$X=[x_1\ x_2\cdots\ x_n]^{\mathrm{T}}$，$a_{ij}=a_{ji}\quad i,j=1,2,\cdots,n$，如果对任意一组不全为零的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，都有 $q(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$(或$\geqslant 0$)，则称 $q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个正定(或半正定)二次型。并称相对应的对称矩阵 A 是正定的(或半正定的)，记为 $A>0$(或 $A\geqslant 0$)。

引理 1.1.1　对于二次型 $q(X)=X^{\mathrm{T}}AX$，$X\in\mathbf{R}^n$，下列命题是等价的：

(1) $q(X)$是正定的。

(2) 对于任何 n 阶可逆矩阵 P，都有 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为正定矩阵。

(3) A 的 n 个特征值全大于零。

(4) 存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}AP=I_n$，其中，I_n 为 n 阶单位矩阵。

(5) 存在 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $A=Q^{\mathrm{T}}Q$。

(6) 存在正线上三角矩阵 R，使得 $A=R^{\mathrm{T}}R$，且分解是惟一的。

(7) A 的 n 个顺序主子式全大于零。

引理 1.1.2　下列命题是等价的：

(1) $q(X)$是半正定的。

(2) 对于任何 n 阶可逆矩阵 P，都有 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为半正定矩阵。

(3) A 的 n 个特征值全是非负的。

(4) 存在 n 阶可逆矩阵 P,使得 $P^{\mathrm{T}}AP=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,其中,$I_r$ 为 r 阶单位矩阵。

(5) 存在秩为 r 的 n 阶矩阵 Q,使得 $A=Q^{\mathrm{T}}Q$。

引理 1.1.3 设 $A>0$(或 $A\geqslant0$),则存在惟一的 $H>0$(或 $H\geqslant0$),满足 $A=H^2$,且任何一个与 A 可交换的矩阵必和 H 可交换。

引理 1.1.4 对于任何矩阵 A,有 $A^{\mathrm{T}}A$ 与 AA^{T} 是半正定矩阵,且

$$\mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}A)=\mathrm{rank}(AA^{\mathrm{T}})=\mathrm{rank}(A)$$

特别地,若 A 分别为列满秩或行满秩时,$A^{\mathrm{T}}A$ 与 AA^{T} 分别是正定矩阵。

1.1.2 矩阵的奇异值分解

定义 1.1.2 如果 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,\mathrm{rank}(A))$ 为矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的正特征值,则称 $\sqrt{\lambda_i}$ 为矩阵 A 的非零奇异值,记为 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$。

引理 1.1.5 对于任意矩阵 A,设 $\mathrm{rank}(A)=r$,$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 为 A 的奇异值。则存在 n 阶正交矩阵 U 和 m 阶正交矩阵 V,使得

$$A=U\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^{\mathrm{T}},\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$$

1.1.3 矩阵范数与矩阵测度

定义 1.1.3 对于任何一个矩阵 A,用 $\|A\|$ 表示按照某个法则确定的与矩阵 A 对应的实数,且满足:

(1) 非负性:当 $A\neq0$ 时,$\|A\|>0$;当且仅当 $A=0$ 时,$\|A\|=0$;

(2) 齐次性:$\|kA\|=|k|\|A\|$,k 为任意实数;

(3) 三角不等式:对于任何两个同阶矩阵 A,B 都有 $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$;

(4) 矩阵乘法相容性:若 A,B 可乘,有 $\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|$,

则称对应于 A 的这个实数 $\|A\|$ 是矩阵 A 的矩阵范数。

定义 1.1.4 对于矩阵 A,称

$$\|A\|=\max_j \sigma_j$$

为矩阵 A 的 2-范数,其中,σ_j 表示矩阵 A 的第 j 个奇异值。

定义 1.1.5 矩阵 $X\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 的测度定义为

$$\mu(X)=\lim_{\delta\to0^+}(\|I-\delta X\|-1)\delta^{-1}$$

引理 1.1.6 矩阵测度 $\mu(X)$ 有如下的性质:

(1) $-\|X\|\leqslant-\mu(-X)\leqslant\mathrm{Re}\lambda(X)\leqslant\mu(X)\leqslant\|X\|$。

(2) 对任意适当维数的矩阵 X,Y,有 $\mu(X+Y)\leqslant\mu(X)+\mu(Y)$。

(3) 若 $c\geqslant0$,则 $\mu(cX)=c\mu(X)$;若 $c<0$,则 $\mu(cX)=-c\mu(-X)$。