邱曙熙 邱旭勐 李毅轩　编著

实变与泛函学习指导

SHIBIAN YU FANHAN XUEXI ZHIDAO

- 学习引导重点归纳
- 疑难概念剖析解释
- 相关概念排比对照
- 两书习题详细解答

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

实变与泛函学习指导/邱曙熙、邱旭勐、李毅轩编著. —厦门:厦门大学出版社,2004. 12

ISBN 7-5615-2310-6

Ⅰ. 实…　Ⅱ. ①邱…②邱…③李…　Ⅲ. ①实变函数论-高等学校-教学参考资料②泛函分析-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 128010 号

厦门大学出版社出版发行

(地址:厦门大学　邮编:361005)

http://www.xmupress.com

xmup @ public.xm.fj.cn

三明地质印刷厂印刷

2004 年 12 月第 1 版　2004 年 12 月第 1 次印刷

开本:850×1168　1/32　印张:15.25

字数:375 千字　印数:0001-3 000 册

定价:25.00 元

引　言

实变与泛函是数学学科中最重要的专业基础课程之一，它的独特思维方式和内容的深广性使得学生普遍感到学习困难，因此有必要编写诸如学习指导之类的教学辅导材料。

本书分为两大部分。第一部分是“实变与泛函的内容和习题”，由邱曙熙和邱旭勐负责编写。该部分是参照已故厉则治教授的《实变与泛函》(厦门大学出版社,1990)一书编写的内容和习题解答，其中内容的章节号和定理排序与原书基本一致。厉教授的书将实变与泛函融为一体，具有鲜明的特色；不少读者反映该书对从事科研也颇具参考价值。第二部分是《实分析与泛函分析》(匡继昌编著，高等教育出版社,2002)一书的习题解答，由李毅轩负责编写。另外，陈侃对本书第二部分提出不少有益的建议，编者在此表示感谢！

相对而言，第一部分内容比较广义而抽象，第二部分较为具体容易些。例如，关于测度与积分，第一部分侧重抽象概念，而第二部分所涉及的基本是具体的 Lebesgue 测度与积分。两部分的内容既可相互参照又可相互充实，正好起着互补作用。本书还注意到两部分内容之间的前后呼应、对较重要和较难的内容进行归纳或对照，并在书末编写了名词索引，为初学和复习提供方便。

经过多次参加编撰工作，笔者深感编写与校对工作并非当初所想像的那样简单，它不仅需要扎实的专业基础，而且还需要极大的耐心和细致的付出。

鉴于编者的水平有限，错误在所难免，敬请赐教。

编　者

目　录

第二部分 《实分析与泛函分析》习题解答

（匡继昌编著·高等教育出版社出版）

第一部分

实变与泛函的内容和习题

第一章　　集　论

§1　集的运算

1.　**集合的概念**

首先，一些东西的全体叫做**集**，其中每一个东西都叫做这集(里)的**元素**．其次，如果某种东西只有一个，假定记为 a，那么说这个东西的全体是集 $\{a\}$，a 是 $\{a\}$ 的唯一的元素．第三，如果某种东西不存在，那么说这种东西的全体是**空集**．规定任何空集都只是同一个集，记为 $\varnothing$．任何东西都不是 $\varnothing$ 的元素．最后，每一个集都是一个东西．

注意，$\{a\}$ 和 a 一般是不同的，比如 $\{\varnothing\}$ 有唯一一个元素 $\varnothing$，但 $\varnothing$ 是没有元素的．

假定 a 是集 A 的元素，记为

$$a \in A \quad \text{或者} \quad A \ni a.$$

"$\in$"读作"属于"，"$\ni$"读作"含有"．假定 a 不是 A 的元素，记为

$$a \overline{\in} A \quad 或者 \quad A \overline{\ni} a.$$

“$\overline{\in}$”读作“不属于”．“$\overline{\ni}$”读作“不含有”．

注 在前面写的集的定义中使用了未加定义的词汇，如“一些”、“东西”等等．为了消除定义上的模糊，做必要的注释如下：

(i) $\in$ 和 $\overline{\in}$ 是彼此相否定(非)的，换言之，假定 a 是一个东西，A 是一个集，那么

$$a \in A \quad 和 \quad a \overline{\in} A$$

不能都成立，也不能都不成立．

(ii) 设 A 和 B 都是集，任何一个东西属于 A 一定也属于 B，属于 B 一定也属于 A，那么 A 和 B 是同一个集，此时称 A 和 B 是**相等**的，记为 $A=B$．

现行的习惯是先默认存在一些东西的全体 X（即一个已知集），称为**全集**或**基本集**，然后把一个集说成是“所有的满足某条件的(X 中的)东西的全体”．如果把“某个东西 x 满足某条件”这句话表示成一个逻辑公式 $P(x)$，那么按照习惯表示法，一个集可以记为

$$\{x \in X \mid P(x)\} \quad 或 \quad \{x \mid P(x),\ x \in X\},$$

即所有的使 $P(x)$ 成立的(X 中的) x 的全体．

必须指出，集合的概念是不可严格定义的数学概念之一．

2. 子集·幂集·差集

设 A 和 B 都是集，如果 B 的每个元素都是 A 的元素，那么说 B 是 A 的**子集**，记为 $B \subset A$ 或 $A \supset B$．“$\subset$”读作“包含于”．“$\supset$”读作“包含”．若 $B \subset A$ 且 $A \neq B$，则说 B 是 A 的**真子集**．

规定空集是任何集的子集．

显然，若 $A \subset B$ 且 $A \supset B$，则 $A=B$．

设 A 和 B 都是集，则所有属于 A 而不属于 B 的元素全体是一个集，称为 A 与 B 的**差集**，记为 $A \backslash B$．当 $B \subset A$ 的时候，$A \backslash B$ 称为 B 在 A 里的**余集**或**补集**；若将 A 看成全空间，$A \backslash B$ 也记为 B^c；又常用

到集 $A\triangle B\triangleq(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$，称为 A 和 B 的**对称差(集)**. 还有，一个集 A 的所有的子集的全体是一个集，记为 2^A，称为 A 的**幂集**.

下文所出现的名词“**族**”和“**类**”理解为“集”的同义词，常用于某集 X 的一些子集所组成的集，即 2^X 的子集.

3. 并集·交集·乘积

设 H 是一个集. 如果每个 $h\in H$ 都对应一个集 A_h，那么

$$\{A_h\mid h\in H\}\qquad(\text{或}\quad\{A_h\}_{h\in H})$$

表示一个**集族**. H 称为**参数集**或**指标集**. 若 $\{A_h\mid h\in H\}$ 的任何两元素 A_j、A_k 是不交的，即 $A_j\cap A_k=\varnothing$，则说该族集是**两两不交**的.

设 $\{A_h\mid h\in H\}$ 是一个集族，那么

$$\{x\mid \text{存在一个 } h\in H \text{ 使得 } x\in A_h\}$$

是一个集，称为这族集的**并集**，记为 $\bigcup\limits_{h\in H}A_h$.

当一族集的全部元素为一个集列 $A,B,C,\cdots$ 时，其并集可写成

$$A\cup B\cup C\cup\cdots.$$

设 $\{A_h\mid h\in H\}$ 是一个集族，那么

$$\{x\mid \text{对所有的 } h\in H \text{ 皆有 } x\in A_h\}$$

是一个集，称为这族集的**交集**，记为 $\bigcap\limits_{h\in H}A_h$.

当一族集全部集为一个集列 $A,B,C,\cdots$ 时，其交集可写成

$$A\cap B\cap C\cap\cdots.$$

对于(有限) n 个集 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，集合

$$X_1\times\cdots\times X_n\triangleq\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_j\in X_j,\ j=1,\cdots,n\}$$

称为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的**乘积**，其中 $(x_1,\cdots,x_n)$ 表示有序对子，而且若 X_j 中有一个是空集，则 $X_1\times\cdots\times X_n$ 理解为空集. 特别地，对于两个集 X 和 Y，其乘积为 $X\times Y\triangleq\{(x,y)\mid x\in X,\ y\in Y\}$.

4. 集的运算

定理一 若 B、C、D 是集，而 $\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是一个集族，则:

(i)（**吸收律**） 若 $B\subset C$，则 $B\cap C=B$，$B\cup C=C$；

(ii)（**单调律**） 若 $B\subset C$，则 $B\cap D\subset C\cap D$，$B\cup D\subset C\cup D$；

(iii)（**交换律**） $B\cap C=C\cap B$，$B\cup C=C\cup B$；

(iv)（**结合律**） $(B\cap C)\cap D=B\cap(C\cap D)$，

$(B\cup C)\cup D=B\cup(C\cup D)$；

(v)（**分配律**） $B\cap\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(B\cap A_\lambda)$，

$B\cup\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(B\cup A_\lambda)$；

(vi) $B\cup C\supset B$， $B\supset B\cap C$；

(vii) 若对任意 $\lambda\in\Lambda$，$A_\lambda\subset B$，则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset B$；

若对任意 $\lambda\in\Lambda$，$A_\lambda\supset B$，则 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\supset B$.

定理二 若 B、C 是 X 的子集，$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是 X 的子集族，则：

(i) $X^C=\varnothing$， $\varnothing^C=X$；

(ii) $B\cup B^C=X$， $B\cap B^C=\varnothing$；

(iii) $(B^C)^C=B$；

(iv) 当 $B\supset C$ 时，$B^C\subset C^C$；

(v) $B\backslash C=B\cap C^C$；

(vi)（**对偶原理**） $\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^C=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C$， $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^C=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C$.

5. 极限集

设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个集列，那么下面两个集

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\triangleq\{x|$ 有无限多个 n 使得 $x\in A_n\}$，

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\triangleq\{x|$ 只有有限多个 n 使得 $x\overline{\in}A_n\}$

分别称为集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**上（极）限集**和**下（极）限集**，又分别记为

$$\limsup_{n\to\infty}A_n,\qquad \liminf_{n\to\infty}A_n.$$

显然 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\supset\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$. 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，则该集称为集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**极限集**，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.