

邱曙熙 邱旭勳 李毅轩 编著

实变与泛函

SHIBIAN YU FANHAN XUEXI ZHIDAO

学习指导

- 学习引导重点归纳
- 疑难概念剖析解释
- 相关概念排比对照
- 两书习题详细解答



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

实变与泛函学习指导/邱曙熙、邱旭勤、李毅轩编著. —厦门: 厦门大学出版社, 2004. 12

ISBN 7-5615-2310-6

I. 实… II. ①邱…②邱…③李… III. ①实变函数论-高等学校-教学参考资料②泛函分析-高等学校-教学参考资料 IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 128010 号

厦门大学出版社出版发行

(地址: 厦门大学 邮编: 361005)

<http://www.xmupress.com>

[xmup @ public. xm. fj. cn](mailto:xmup@public.xm.fj.cn)

三明地质印刷厂印刷

2004 年 12 月第 1 版 2004 年 12 月第 1 次印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 15.25

字数: 375 千字 印数: 0001-3 000 册

定价: 25.00 元

如有印装质量问题请与承印厂调换

引 言

实变与泛函是数学学科中最重要的专业基础课程之一，它的独特思维方式和内容的深广性使得学生普遍感到学习困难，因此有必要编写诸如学习指导之类的教学辅导材料。

本书分为两大部分。第一部分是“实变与泛函的内容和习题”，由邱曙熙和邱旭勳负责编写。该部分是参照已故厉则治教授的《实变与泛函》(厦门大学出版社,1990)一书编写的内容和习题解答，其中内容的章节号和定理排序与原书基本一致。厉教授的书将实变与泛函融为一体，具有鲜明的特色；不少读者反映该书对从事科研也颇具参考价值。第二部分是《实分析与泛函分析》(匡继昌编著，高等教育出版社,2002)一书的习题解答，由李毅轩负责编写。另外，陈侃对本书第二部分提出不少有益的建议，编者在此表示感谢！

相对而言，第一部分内容比较广义而抽象，第二部分较为具体容易些。例如，关于测度与积分，第一部分侧重抽象概念，而第二部分所涉及的基本是具体的 Lebesgue 测度与积分。两部分的内容既可相互参照又可相互充实，正好起着互补作用。本书还注意到两部分内容之间的前后呼应、对较重要和较难的内容进行归纳或对照，并在书末编写了名词索引，为初学和复习提供方便。

经过多次参加编撰工作，笔者深感编写与校对工作并非当初所想像的那样简单，它不仅需要扎实的专业基础，而且还需要极大的耐心和细致的付出。

鉴于编者的水平有限，错误在所难免，敬请赐教。

编 者

目 录

引 言

第一部分 实变与泛函的内容和习题

第一章 集 论	(1)
§ 1 集的运算	(1)
1. 集合的概念	(1)
2. 子集·幂集·差集	(2)
3. 并集·交集·乘集	(3)
4. 集的运算	(3)
5. 极限集	(4)
6. Peano 自然数公理	(5)
7. 习 题	(6)
§ 2 映照	(12)
1. 映照的概念	(12)
2. 逆映射·复合映射·映射的限制和延拓	(13)
3. 集的剖分	(13)
4. 特征函数·简单函数	(14)
5. 复合映射和逆映射的某些性质	(16)
6. 与函数列极限相关的不等式之集合表示的例子	(16)
7. 习 题	(18)
§ 3 势	(23)
1. 集合的势	(23)
2. 基数的和、积、幂	(24)
3. q -进位数	(25)
4. 习 题	(27)

§ 4	体与 σ 体	(32)
1.	环和体	(32)
2.	半环	(32)
3.	单调类	(33)
4.	Dynkin 类	(34)
5.	习 题	(34)
§ 5	Zorn 引理	(39)
1.	偏序 · 偏序集	(39)
2.	集论的三个公理	(39)
3.	习 题	(40)
§ 6	实数理论	(43)
1.	Cantor 方法定义的实数系	(43)
2.	上、下确界	(47)
3.	数列的上、下极限	(48)
4.	习 题	(49)
第二章	距离空间	(54)
§ 1	距离空间	(54)
1.	距离空间的概念	(54)
2.	距离空间的收敛点列	(55)
3.	习 题	(57)
§ 2	线性赋范空间	(61)
1.	线性空间	(61)
2.	基 · 凸集	(62)
3.	线性算子 · 线性泛函	(63)
4.	线性赋范空间	(64)
5.	不可赋范的距离空间	(65)
6.	内积空间	(65)
7.	习 题	(67)

§ 3	开集和闭集	(73)
1.	开集和闭集	(73)
2.	极限点 · 闭集	(73)
3.	闭包 · 开核 · 边界	(74)
4.	习 题	(75)
§ 4	连续映照	(77)
1.	连续映照的概念	(77)
2.	G_δ 型集 和 F_σ 型集	(78)
3.	乘积距离空间	(78)
4.	弧	(81)
5.	线性泛函 · 共轭空间	(81)
6.	上、下限函数	(82)
7.	习 题	(84)
§ 5	连通、稠密与紧	(96)
1.	拓扑映照	(96)
2.	连通	(96)
3.	区域 · 成分	(97)
4.	稠密 · 可析 · 范畴	(98)
5.	Cantor 三分集	(100)
6.	紧致	(101)
7.	习 题	(104)
§ 6	完备	(113)
1.	完备空间	(113)
2.	等度连续 · 一致有界 · 完全有界	(114)
3.	Hilbert 空间中的泛函表现定理	(114)
4.	习 题	(116)

第三章 测度	(125)
§ 1 测度的基本性质	(125)
1. 可取 ∞ 值的测度	(125)
2. 习 题	(127)
§ 2 R^n 中的 Lebesgue-Stieltjes 测度	(132)
1. 分布函数	(132)
2. 分布函数导出的测度	(132)
3. Borel 集 · Borel 测度	(134)
4. 测度导出的分布函数	(135)
5. 习 题	(135)
§ 3 测度的延拓	(141)
1. Carathéodory 外测度	(141)
2. Carathéodory 的测度延拓定理	(142)
3. Lebesgue 测度	(143)
4. 习 题	(146)
§ 4 可测函数	(151)
1. 可测函数的概念	(151)
2. 可测函数列	(153)
3. 几乎处处 · Egorov 定理	(154)
4. 习 题	(155)
§ 5 距离空间上的测度的正规性	(160)
1. 正规测度、Luzin 定理	(160)
2. 局部紧距离空间 · 可析距离空间	(161)
3. 习 题	(162)
第四章 积 分	(167)
§ 1 非负函数的积分	(167)
1. 简单函数的积分	(167)
2. 可取 ∞ 值的非负可测函数的积分	(168)
3. Lebesgue-Stieltjes 积分的定义	(170)

4. 闭区间上的函数 Riemann 可积分的充要条件	(170)
5. 闭区间上的函数 Lebesgue 积分的等价定义	(172)
6. R^1 空间中 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的比较	(173)
7. R^1 空间中 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系	(174)
8. 习 题	(175)
§ 2 复值函数的积分	(183)
1. 基本概念	(183)
2. 基本性质	(183)
3. 几个例子	(185)
4. 习 题	(186)
§ 3 依测度收敛、 L^p 空间	(194)
1. 基本概念	(194)
2. 凸函数 · 几个重要的积分不等式	(195)
3. L^p 空间的定义	(196)
4. 复可测函数空间 $\mathcal{F}$	(197)
5. 依测度收敛与依度量收敛的等价性	(198)
6. 空间 L^p 和 $\mathcal{F}$ 的完备性及可分性	(199)
7. 几种收敛之间的关系	(199)
8. 序列空间 s	(200)
9. l^p 空间	(201)
10. 收敛序列空间 c	(204)
11. 习 题	(204)
§ 4 复测度	(213)
1. 复测度及其全变差	(213)
2. Radon-Nikodym 定理	(214)
3. 复测度的极表示	(217)
4. 习 题	(219)
§ 5 导 数	(228)
1. 复测度的导数	(228)

2. 有界变差函数、 NBV 函数	(229)
3. 绝对连续函数	(232)
4. 习 题	(233)
§ 6 Fubini 定理	(242)
1. 乘积空间的子集族	(242)
2. 乘积空间的测度	(242)
3. 重积分化为累次积分	(244)
4. 累次积分顺序的交换	(244)
5. 习 题	(245)
第五章 Banach 空间	(256)
§ 1 Hahn-Banach 的泛函延拓定理	(256)
1. 有界线性算子的延拓	(256)
2. 实线性泛函的延拓	(256)
3. 有界线性泛函的延拓	(257)
4. 习 题	(258)
§ 2 Riesz 表现定理	(261)
1. 紧致度量空间上的集函数	(261)
2. 紧致度量空间上的 Riesz 表现定理	(262)
3. 习 题	(263)
§ 3 自反空间	(265)
1. 基本概念	(265)
2. l^p 空间的自反性	(265)
3. 习 题	(266)
§ 4 弱收敛	(269)
1. 基本概念	(269)
2. 几种收敛的关系	(270)
3. 弱收敛的极限	(271)
4. 共轭算子	(271)
5. 习 题	(272)

§ 5	开映像原理	(277)
1.	开映像原理	(277)
2.	逆映像原理	(277)
3.	共鸣定理	(278)
4.	闭图像定理	(278)
5.	习 题	(279)
§ 6	线性算子的谱	(287)
1.	基本概念	(287)
2.	有界线性算子多项式的谱集	(288)
3.	有界自线性算子范数的极限	(289)
4.	谱半径	(289)
5.	习 题	(290)
第六章	Hilbert 空间	(296)
§ 1	正交系	(296)
1.	正交系的概念	(296)
2.	完备规范正交系	(298)
3.	完全规范正交系	(299)
4.	同构内积空间	(300)
5.	习 题	(300)
§ 2	共轭算子	(307)
1.	内积空间有界线性算子的共轭算子	(307)
2.	自共轭算子	(308)
3.	赋范空间与内积空间中共轭算子的关系	(309)
4.	赋范空间与内积空间中共轭算子的比较	(310)
5.	习 题	(311)
§ 3	谱积分	(314)
1.	Hilbert 空间的投影算子	(314)
2.	谱测度空间	(315)
3.	谱分解	(315)

4. 习 题	(317)
§ 4 酉算子的谱分解	(323)
1. 酉算子及其共轭算子	(323)
2. Hilbert 空间到自身的酉算子	(323)
3. 酉算子的谱分解	(324)
4. 习 题	(325)
§ 5 自共轭算子的谱分解	(329)
1. 基本概念和性质	(329)
2. 自共轭算子的谱分解	(329)
3. 习 题	(330)
§ 6 正常算子的谱分解	(336)
1. 正常算子的概念	(336)
2. 正常算子诱导的谱测度	(336)
3. 习 题	(337)

第二部分 《实分析与泛函分析》习题解答

(匡继昌编著·高等教育出版社出版)

第一章 预备知识	(340)
§ 1 集合的运算·习题 1.1	(340)
§ 2 集合间的映射·习题 1.2	(343)
§ 3 集合的基数(无习题)	
第二章 点集拓扑概念	(347)
§ 1 距离空间中的拓扑概念·习题 2.1	(347)
§ 2 连续性(无习题)	
§ 3 R^n 中的开集、闭集的构造, Cantor 集·习题 2.3	(349)
§ 4 覆盖(无习题)	
第三章 测度论	(352)
§ 1 R^n 中的 Lebesgue 外测度·习题 3.1	(352)
§ 2 R^n 中的 Lebesgue 测度·习题 3.2	(354)

§ 3	抽象外测度与测度(无习题)	
第四章	可测函数	(365)
§ 1	可测函数的定义及其基本性质 · 习题 4.1	(365)
§ 2	可测函数列的收敛性 · 习题 4.2	(368)
§ 3	可测函数的结构、Luzin 定理 · 习题 4.3	(371)
第五章	积分论	(373)
§ 1	Lebesgue 积分的定义(无习题)	
§ 2	Lebesgue 积分的初等性质 · 习题 5.2	(373)
§ 3	Lebesgue 积分列的极限定理 · 习题 5.3	(376)
§ 4	(L)积分与(R)积分的关系 · 习题 5.4	(382)
§ 5	Fubini 定理(无习题)	
第六章	微分论	(386)
§ 1	覆盖与极大函数 · 习题 6.1	(386)
§ 2	Lebesgue 微分定理 · 习题 6.2	(387)
§ 3	单调函数 · 习题 6.3	(388)
§ 4	有界变差函数和绝对连续函数 · 习题 6.4	(389)
§ 5	不定积分 · 习题 6.5	(395)
第七章	抽象空间论	(401)
§ 1	距离空间续论 · 习题 7.1	(401)
§ 2	赋范线性空间 · 习题 7.2	(407)
§ 3	内积空间 · 习题 7.3	(412)
§ 4	常用的函数空间与序列空间 · 习题 7.4	(417)
§ 5	内积空间中的 Fourier 分析 · 习题 7.5	(425)
第八章	抽象空间之间的映射	(428)
§ 1	有界线性算子与有界线性泛函 · 习题 8.1	(428)
§ 2	算子空间与共轭空间 · 习题 8.2	(432)
§ 3	有界线性泛函的表示 · 习题 8.3	(433)
§ 4	共鸣定理 · 习题 8.4	(435)
§ 5	开映射定理 · 习题 8.5	(437)

§ 6	算子与泛函的延拓 · 习题 8.6	(440)
§ 7	共轭空间与共轭算子 · 习题 8.7	(444)
第九章	实分析与泛函分析续论	(449)
§ 1	集合的基数基本定理的证明(无习题)	
§ 2	连续性基本定理的证明,半连续性 · 习题 9.2	(449)
§ 3	测度论(第三章)续论(无习题)	
§ 4	可测函数(第四章)续论(无习题)	
§ 5	积分论(第五章)续论、广义函数(无习题)	
§ 6	微分论(第六章)续论、凸函数(无习题)	
§ 7	抽象空间论(第七章)续论 · 习题 9.7	(451)
§ 8	抽象空间之间的映射(第八章)续论 · 习题 9.8	(456)
参考文献		(459)
名词索引		(461)
常用符号		(470)

第一部分

实变与泛函的内容和习题

第一章 集 论

§ 1 集的运算

1. 集合的概念

首先,一些东西的全体叫做集,其中每一个东西都叫做这集(里)的元素.其次,如果某种东西只有一个,假定记为 a ,那么说这个东西的全体是集 $\{a\}$, a 是 $\{a\}$ 的唯一的元素.第三,如果某种东西不存在,那么说这种东西的全体是空集.规定任何空集都只是同一个集,记为 $\emptyset$.任何东西都不是 $\emptyset$ 的元素.最后,每一个集都是一个东西.

注意, $\{a\}$ 和 a 一般是不同的,比如 $\{\emptyset\}$ 有唯一一个元素 $\emptyset$,但 $\emptyset$ 是没有元素的.

假定 a 是集 A 的元素,记为

$$a \in A \quad \text{或者} \quad A \ni a.$$

“ $\in$ ”读作“属于”,“ $\ni$ ”读作“含有”.假定 a 不是 A 的元素,记为

$$a \notin A \quad \text{或者} \quad A \not\ni a.$$

“ $\notin$ ”读作“不属于”，“ $\not\ni$ ”读作“不含有”。

注 在前面写的集的定义中使用了未加定义的词汇，如“一些”、“东西”等等。为了消除定义上的模糊，做必要的注释如下：

(i) $\in$ 和 $\notin$ 是彼此相否定(非)的，换言之，假定 a 是一个东西， A 是一个集，那么

$$a \in A \quad \text{和} \quad a \notin A$$

不能都成立，也不能都不成立。

(ii) 设 A 和 B 都是集，任何一个东西属于 A 一定也属于 B ，属于 B 一定也属于 A ，那么 A 和 B 是同一个集，此时称 A 和 B 是相等的，记为 $A=B$ 。

现行的习惯是先默认存在一些东西的全体 X (即一个已知集)，称为全集或基本集，然后把一个集说成是“所有的满足某条件的(X 中的)东西的全体”。如果把“某个东西 x 满足某条件”这句话表示成一个逻辑公式 $P(x)$ ，那么按照习惯表示法，一个集可以记为

$$\{x \in X | P(x)\} \quad \text{或} \quad \{x | P(x), x \in X\},$$

即所有的使 $P(x)$ 成立的(X 中的) x 的全体。

必须指出，集合的概念是不可严格定义的数学概念之一。

2. 子集·幂集·差集

设 A 和 B 都是集，如果 B 的每个元素都是 A 的元素，那么说 B 是 A 的子集，记为 $B \subset A$ 或 $A \supset B$ 。“ $\subset$ ”读作“包含于”，“ $\supset$ ”读作“包含”。若 $B \subset A$ 且 $A \neq B$ ，则说 B 是 A 的真子集。

规定空集是任何集的子集。

显然，若 $A \subset B$ 且 $A \supset B$ ，则 $A=B$ 。

设 A 和 B 都是集，则所有属于 A 而不属于 B 的元素全体是一个集，称为 A 与 B 的差集，记为 $A \setminus B$ 。当 $B \subset A$ 的时候， $A \setminus B$ 称为 B 在 A 里的余集或补集；若将 A 看成全空间， $A \setminus B$ 也记为 B^c ；又常用

到集 $A \triangle B \triangleq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, 称为 A 和 B 的对称差(集). 还有, 一个集 A 的所有的子集的全体是一个集. 记为 2^A , 称为 A 的幂集.

下文所出现的名词“族”和“类”理解为“集”的同义词, 常用于某集 X 的一些子集所组成的集, 即 2^X 的子集.

3. 并集 · 交集 · 乘积

设 I 是一个集. 如果每个 $h \in I$ 都对应一个集 A_h , 那么

$$\{A_h | h \in I\} \quad (\text{或} \quad \{A_h\}_{h \in I})$$

表示一个族. I 称为参数集或指标集. 若 $\{A_h | h \in I\}$ 的任何两元素 A_j, A_k 是不交的, 即 $A_j \cap A_k = \emptyset$, 则说该族集是两两不交的.

设 $\{A_h | h \in I\}$ 是一个族集, 那么

$$\{x | \text{存在一个 } h \in I \text{ 使得 } x \in A_h\}$$

是一个集, 称为这族集的并集, 记为 $\bigcup_{h \in I} A_h$.

当一族集的全部元素为一个集列 $A, B, C, \dots$ 时, 其并集可写成

$$A \cup B \cup C \cup \dots$$

设 $\{A_h | h \in I\}$ 是一个族集, 那么

$$\{x | \text{对所有的 } h \in I \text{ 皆有 } x \in A_h\}$$

是一个集, 称为这族集的交集, 记为 $\bigcap_{h \in I} A_h$.

当一族集全部集为一个集列 $A, B, C, \dots$ 时, 其交集可写成

$$A \cap B \cap C \cap \dots$$

对于(有限) n 个集 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 集合

$$X_1 \times \dots \times X_n \triangleq \{(x_1, \dots, x_n) | x_j \in X_j, j = 1, \dots, n\}$$

称为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的乘积, 其中 $(x_1, \dots, x_n)$ 表示有序对子. 而且若 X_j 中有一个是空集, 则 $X_1 \times \dots \times X_n$ 理解为空集. 特别地, 对于两个集 X 和 Y , 其乘积为 $X \times Y \triangleq \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$.

4. 集的运算

定理一 若 B, C, D 是集, 而 $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是一个族集, 则:

- (i) (吸收律) 若 $B \subset C$, 则 $B \cap C = B$, $B \cup C = C$;
 (ii) (单调律) 若 $B \subset C$, 则 $B \cap D \subset C \cap D$, $B \cup D \subset C \cup D$;
 (iii) (交换律) $B \cap C = C \cap B$, $B \cup C = C \cup B$;
 (iv) (结合律) $(B \cap C) \cap D = B \cap (C \cap D)$,
 $(B \cup C) \cup D = B \cup (C \cup D)$;
 (v) (分配律) $B \cap (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (B \cap A_\lambda)$,
 $B \cup (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (B \cup A_\lambda)$;
 (vi) $B \cup C \supset B$, $B \supset B \cap C$;
 (vii) 若对任意 $\lambda \in \Lambda$, $A_\lambda \subset B$, 则 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset B$;
 若对任意 $\lambda \in \Lambda$, $A_\lambda \supset B$, 则 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \supset B$.

定理二 若 B, C 是 X 的子集, $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是 X 的子集族, 则:

- (i) $X^c = \emptyset$, $\emptyset^c = X$;
 (ii) $B \cup B^c = X$, $B \cap B^c = \emptyset$;
 (iii) $(B^c)^c = B$;
 (iv) 当 $B \supset C$ 时, $B^c \subset C^c$;
 (v) $B \setminus C = B \cap C^c$;
 (vi) (对偶原理) $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$, $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$.

5. 极限集

设 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 是一个集列, 那么下面两个集

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \triangleq \{x | \text{有无限多个 } n \text{ 使得 } x \in A_n\},$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \triangleq \{x | \text{只有有限多个 } n \text{ 使得 } x \in A_n\}$$

分别称为集列 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 的上(极)限集和下(极)限集, 又分别记为

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

显然 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \supset \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$. 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$, 则该集称为集列 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 的极限集, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.