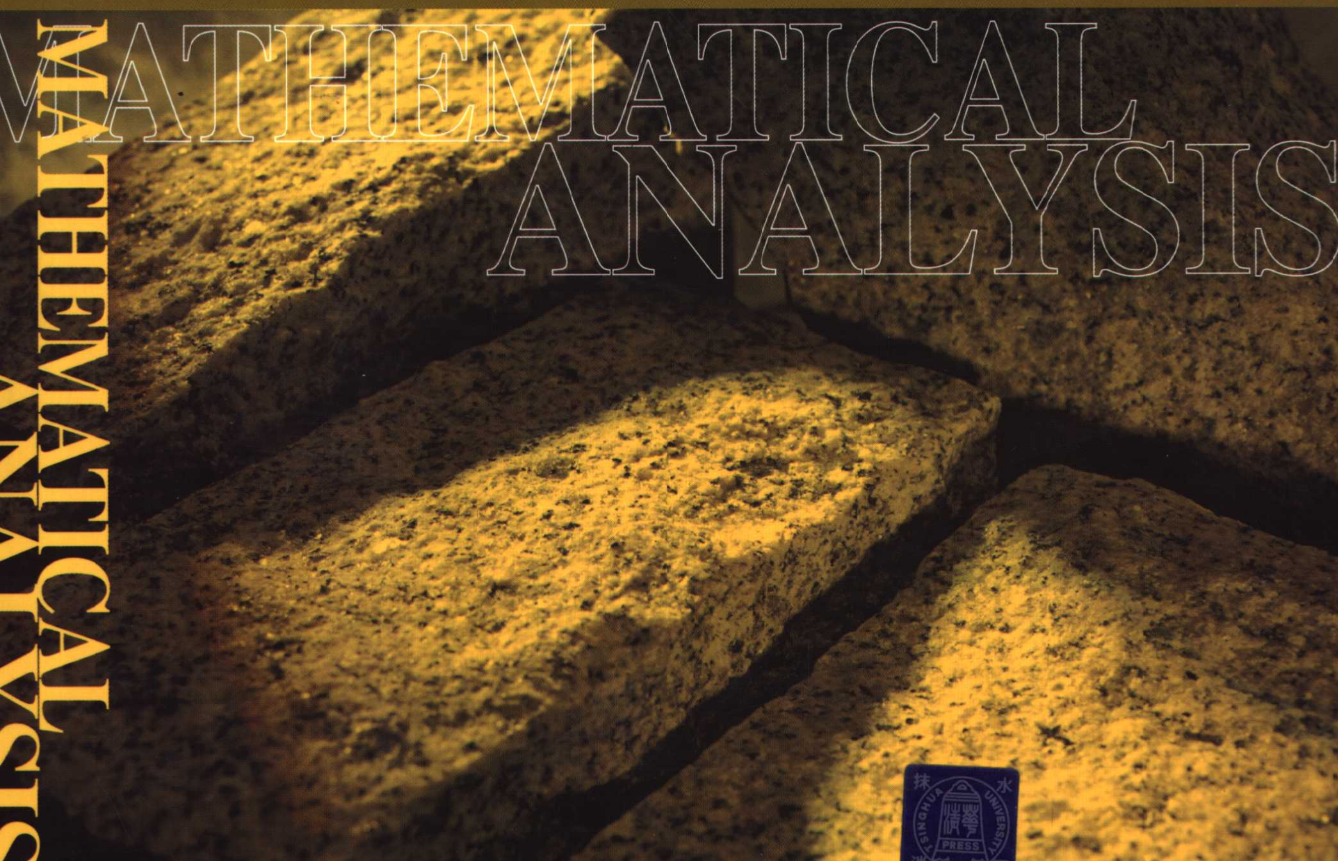
徐森林　薛春华　编著

数学分析

第一册



清华大学出版社

徐森林　薛春华　编著

数学分析

第一册

MATHEMATICAL ANALYSIS

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书共分3册来讲解数学分析的内容. 在深入挖掘传统精髓内容的同时,力争做到与后续课程内容的密切结合,使内容具有近代数学的气息. 另外,从讲述和训练两个层面来体现因材施教的教学理念.

第1册内容包括数列极限,函数极限与连续,一元函数的导数与微分中值定理,Taylor公式,不定积分,Riemann积分. 书中配备大量典型实例,习题分练习题、思考题与复习题三个层次,供选用.

本套书可作为理工科大学或师范大学数学专业的教材,特别是基地班或试点班的教材,也可作为大学教师与数学工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 第1册/徐森林,薛春华编著. —北京:清华大学出版社,2005.9
ISBN 7-302-11746-2

Ⅰ. 数…　Ⅱ. ①徐…②薛…　Ⅲ. 数学分析—高等学校—教材　Ⅳ. O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第101191号

出 版 者: 清华大学出版社　　**地　　址**: 北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**: 100084
社 总 机: 010-62770175　**客户服务**: 010-62776969
组稿编辑: 刘　颖
文稿编辑: 王海燕
印 装 者: 北京鑫海金澳胶印有限公司
发 行 者: 新华书店总店北京发行所
开　　本: 185×230　**印张**: 28.5　**字数**: 606千字
版　　次: 2005年9月第1版　2005年9月第1次印刷
书　　号: ISBN 7-302-11746-2/O·494
印　　数: 1~4000
定　　价: 36.00元

前　　言

数学分析是数学系最重要的基础课.它对后继课程(实变函数、泛函分析、拓扑、微分几何)与近代数学的学习与研究具有非常深远的影响和至关重要的作用.一本优秀的数学分析教材必须包含传统微积分内容的精髓和分析能力与方法的传授,也必须包含近代的内容,其检验标准是若干年后能否涌现出一批高水准的应用数学人才和数学研究人才,特别是一些数学顶尖人物.作者从事数学分析教学几十年,继承导师、著名数学家吴文俊教授的一整套教学(特别是教授数学分析)的方法(科大称之为"吴龙"),并将其发扬光大).因材施教,在中国科技大学培养了一批国内外有名的数学家与数学工作者.目前,作者徐森林被特聘到华中师范大学数学与统计学学院,并在数学试点班用此教材讲授数学分析,效果显著.

本书的主要特色可归纳为以下几点:

1. 传统精髓内容的完善化

书中包含了实数的各种引入,七个实数连续性等价命题的论述;给出了单变量与多变量的 Riemann 可积的各等价命题的证明;讨论了微分中值定理,Taylor 公式余项的各种表达;介绍了积分第一、第二中值定理的描述,隐函数存在性定理与反函数定理的两种不同的证法等内容.

2. 与后继课程的紧密结合,使内容近代化

本书在介绍经典微积分理论的同时,将近代数学中许多重要概念、理论恰到好处地引进分析教材中.例如:在积分理论中,给出了 Lebesgue 定理:函数 f Riemann 可积的充要条件是 f 几乎处处连续且有界;详细讨论了$\mathbb{R}^n$中的拓扑及相应的开集、闭集、聚点等概念,描述了$\mathbb{R}^n$中集合的紧致性、连通性、可数性、Hausdorff 性等拓扑不变性,使读者站到拓扑的高度来理解零值定理、介值定理、最值定理与一致连续性定理.引进外微分形式及外微分运算,将经典 Newton-Leibniz 公式、平面 Green 公式、空间 Stokes 公式与 Gauss 公式统一为 Stokes 公式,并对闭形式、恰当形式与场论的对偶关系给出了全新的表述.这不仅使教材内容本身近代化,而且为学生在高年级学习拓扑、实变函数、泛函分析、微分几何等课程提供了一个实际模型并打下良好的基础.这为经典数学与近代数学架设了一座桥梁。

3. 因材施教、着重培养学生的研究与创新能力

同一定理(如零值定理、一致连续性定理、Lagrange 中值定理、Cauchy 中值定理、隐函数存在性定理与反函数定理等)经常采用多种证法;同一例题应用不同定理或不同方法解答,这是本书又一特色.它使学生广开思路、积极锻炼思维能力,越来越敏捷与成熟.书中举出大量例题是为了让读者得到一定的基本训练,同时从定理的证明和典型实例的分析中掌握数学分析的技巧与方法.习题共分 3 个层次:练习题、思考题与复习题.练习题是基本题,是为读者熟练掌握内容与方法所设置的.为提高学生对数学的浓厚兴趣及解题的能力,设置了思考题.为了让读者减少做题的障碍,增强对数学的自信心,其中有些题给出了提示.实际上,该节的标题就是最好的提示;进而,在每一章设置了大量复习题,这些题不给提示,因此大部分学生对它们会感到无从下手,这些题是为少数想当数学家的学生特别设置的,希望他们能深入思考,自由发挥,将它们一个一个地解答出来,为将来的研究培养自己的创新能力.如有困难,我们还可撰写一本精练的学习指导书.

本书共分 3 册.第 1 册内容包括数列极限,函数极限与连续,一元函数的导数与微分中值定理,Taylor 公式,不定积分以及 Riemann 积分;第 2 册内容包括$\mathbb{R}^n$中的拓扑,n 元函数的极限与连续,n 元函数的微分学,隐函数定理与反函数定理,n 重积分,第一型曲线、曲面积分,第二型曲线、曲面积分,Stokes 定理,外微分形式与场论;第 3 册内容包括数项级数和各种收敛判别法,函数项级数的一致收敛性及其性质,含参变量反常积分的一致收敛性及其性质,Euler 积分(Γ 函数与 B 函数),幂级数与 Taylor 级数,Fourier 分析.

在写作本书的时候,得到了华中师范大学数学与统计学学院领导和教师们的热情鼓励与大力支持,作者们谨在此对他们表示诚挚的感谢.博士生邓勤涛、胡自胜、薛琼,硕士生金亚东、鲍焱红等对本书的写作提出了许多宝贵意见,使本书增色不少.

特别还要感谢的是清华大学出版社的曾刚、刘颖、王海燕,他们为我们提供了出版这本数学分析书的机会,了却了我多年的心愿.

徐森林

2005 年 6 月于武汉

目　录

第 1 章　数列极限

数学分析主要的研究对象是实变量的一元或多元函数. 众所周知，正负十进位有限小数与无限循环小数(即正负分数)称为**有理数**；无限不循环小数称为**无理数**. 由反证法可知 $\sqrt{2}$, 0.1010010001…均为无理数. 有理数与无理数统称为**实数**. 有理数的全体称为有理数集. 由代数学的知识知，它关于通常的加法、乘法具有结合律、交换律与分配律，并成为一个域，称为有理数域，记为 $\mathbb{Q}$. 实数的全体称为实数集，它关于通常的加法、乘法具有结合律、交换律与分配律，并成为一个域，称为实数域，记为 $\mathbb{R}$.

19 世纪建立的极限理论包括数列极限与函数极限. 极限理论是微分学、积分学的根本，是数学分析的基础，也是入数学分析之门的关键. 本章先引进数列极限的概念，用大量具体的、典型的数列实例，使读者熟悉 ε-N 法及证明数列极限的各种方法. 然后，在第 2 章中研究函数极限的 ε-δ 法及其重要的性质. 本章还证明了实数连续性的七个等价命题. 实数连续性与数学分析的每一概念都有十分密切的关系，而且还是不可缺少的理论基础. 它的证明方法也将贯穿整个数学分析的学习过程并延续到分析数学的其他分支中.

1.1　数列极限的概念

依次排列着的一列实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 称为一个**实数列**或**数列**，a_n 称为该数列的第 n 项或通项. 记此数列为 $\{a_n\}$，简记为 a_n.

数列实际上可视作一个实值函数或特殊映射 $f: \mathrm{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\} \to \mathbb{R}, n \mapsto f(n) = a_n$.

考察下列数列 $\{a_n\}$ 可以看出，当项数 n 无限增大时，有些数列会有一个趋向(定数 a，或 $+\infty$，或 $-\infty$，或 ∞)，有些则无这种趋向. 为区别这种现象，定义极限概念如下：如果当 n 趋于 $+\infty$ 时，$\{a_n\}$ 趋于实数 $a(+\infty, -\infty, \infty)$，则称 $a(+\infty, -\infty, \infty)$ 为 $\{a_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a(+\infty, -\infty, \infty)$. 否则，称 $\{a_n\}$ 无极限.

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}: 1, -\frac{1}{2}, \cdots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \cdots, \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0;$$

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots, \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1;$$

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}:\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots,\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0;$$

$$\{n\}:1,2,\cdots,n,\cdots,\lim_{n\to+\infty}n=+\infty;$$

$$\{-n\}:-1,-2,\cdots,-n,\cdots,\lim_{n\to+\infty}(-n)=-\infty;$$

$$\{(-1)^{n-1}n\}:1,-2,3,-4,\cdots,(-1)^{n-1}n,\cdots,\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}n=\infty;$$

$\{(-1)^n\}:1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$,无极限.

以上所举数列有无极限,极限是什么,一眼就能看出,但是大多数是无法看出的.例如,数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$有无极限,极限是什么,不易确定。因此,必须对数列的极限给出确切的定义.

定义 1.1.1(ε-N 法) 设$\{a_n\}$为实数列,a为实数,如果对任意给定的正数ε($\forall\varepsilon>0$),总有自然数$N=N(\varepsilon)$($\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$(自然数集)),当$n>N$时($\forall$表示"对任何",$\exists$表示"存在"),有

$$|a_n-a|<\varepsilon,\quad 即\ a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

则称a为数列$\{a_n\}$的**极限**,或称数列$\{a_n\}$以a为极限,或称数列$\{a_n\}$**收敛**于a,此时,$\{a_n\}$称为**收敛数列**.并记为$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$,或$a_n\to a(n\to+\infty)$.否则称数列$\{a_n\}$**发散**.

根据实数理论(1.3节),实数集与实数轴上的点能建立一一对应关系.于是,上述定义可几何表述如下:$a_n(n>N)$都在区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内,而在$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$外至多有$a_1$,$a_2,\cdots,a_N$中的$N$项(如图1.1.1所示).

类似地,用A-N法得到下列定义.

如果$\forall A>0$,$\exists N=N(A)\in\mathbb{N}$,当$n>N$时,有$a_n>A$,则称$+\infty$为数列$\{a_n\}$的**极限**,或称$\{a_n\}$以$+\infty$为极限,或$\{a_n\}$发散于$+\infty$,并记为$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$或$a_n\to+\infty(n\to+\infty)$.此时,在$(A,+\infty)$外至多有$a_1,\cdots,a_N$中的$N$项(如图1.1.2所示).

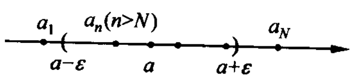


图 1.1.1

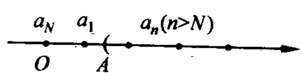


图 1.1.2

如果$\forall A>0$,$\exists N=N(A)\in\mathbb{N}$,当$n>N$时,有$a_n<-A$,则称$-\infty$为数列$\{a_n\}$的**极限**,或称$\{a_n\}$以$-\infty$为极限,或$\{a_n\}$发散于$-\infty$,并记为$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=-\infty$或$a_n\to-\infty(n\to+\infty)$.此时,在$(-\infty,-A)$外至多有$a_1,\cdots,a_N$中的$N$项(如图1.1.3所示).

如果$\forall A>0$,$\exists N=N(A)\in\mathbb{N}$,当$n>N$时,有

$$|a_n|>A,$$

则称∞为数列$\{a_n\}$的**极限**,或称$\{a_n\}$以∞为极限,或$\{a_n\}$发散于∞,并记为$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$或

$a_n\to\infty(n\to+\infty)$. 此时,在$(-\infty,-A)\cup(A,+\infty)$外,即$[-A,A]$中至多有 $a_1,\cdots,a_N$ 中的 N 项(如图 1.1.4 所示).

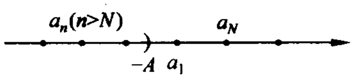


图 1.1.3

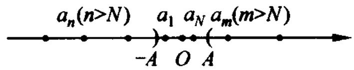


图 1.1.4

综合上述各种情况可知,一个数列$\{a_n\}$或者收敛(即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a\in\mathbb{R}$),或者发散(即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty,-\infty,\infty$,无极限).

显然,改变数列$\{a_n\}$的有限多项,或去掉有限多项,或添加有限多项,不会改变数列$\{a_n\}$的收敛和发散性.

例 1.1.1 对常数列$\{a_n\}$,$a_n=a$,有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}a=a$.

证明 $\forall\varepsilon>0$,取任意的自然数 n,有

$$|a_n-a|=|a-a|=0<\varepsilon,$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}a=a. \qquad \square$$

例 1.1.2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0\ (\alpha>0)$.

证明 $\forall\varepsilon>0$,取 $N\in\mathbb{N}$, s. t. (such that,使得)$N>\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$或者 $N=\left[\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]+1$(其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数),当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\frac{1}{N^\alpha}<\varepsilon,$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0. \qquad \square$$

当 $\alpha=1$ 时,$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$(或 $N>\dfrac{1}{\varepsilon}$,$N\in\mathbb{N}$).

例 1.1.3 $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$, $|q|<1$.

证法 1 当 $0<|q|<1$ 时,$\dfrac{1}{|q|}>1$,可设$\dfrac{1}{|q|}=1+\alpha(\alpha>0)$. $\forall\varepsilon>0$,取 $N\in\mathbb{N}$, s. t. $N>\dfrac{1}{\alpha\varepsilon}$,当 $n>N$ 时,有

$$\begin{aligned}|q^n-0|=|q^n|&=\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^n=\frac{1}{(1+\alpha)^n}\\&=\frac{1}{1+n\alpha+\cdots+\alpha^n}<\frac{1}{n\alpha}<\frac{1}{N\alpha}<\varepsilon,\end{aligned}$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.

当 $q=0$ 时，由例 1.1.1 知，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=\lim\limits_{n\to+\infty} 0=0$.

证法 2 当 $0<|q|<1$ 时，$\forall \varepsilon>0$，取 $N\in\mathbf{N}$，s. t. $N>\log_{|q|}\varepsilon$，当 $n>N$ 时，有

$$|q^n-0|=|q^n|<|q|^N<\varepsilon,$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$. □

注 1.1.1 在例 1.1.3 的证法 1 中，通过初等数学不等式的放大得到简单的不等式 $\frac{1}{N\alpha}<\varepsilon$，并解得 $N>\frac{1}{\alpha\varepsilon}$，这一系列不等式称之为主线. 在 ε-N 方法中是很关键的，读者应学会这种方法.

在证法 2 的主线中，解不等式 $|q|^N<\varepsilon$ 得到 $N>\log_{|q|}\varepsilon$，用到了函数 $\log_{|q|}x$ 的单调减性质.

例 1.1.4 证明：

$$\lim_{n\to+\infty} q^n=\begin{cases}0, & |q|<1,\\ +\infty, & q>1,\\ \infty, & q<-1,\\ 1, & q=1,\\ \text{无极限}, & q=-1.\end{cases}$$

证法 1 当 $q>1$ 时，令 $q=1+\alpha(\alpha>0)$. $\forall A>0$，可取 $N=N(A)\in\mathbf{N}$，s. t. $N>\frac{A}{\alpha}$，当 $n>N$ 时，有

$$q^n=(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\cdots+\alpha^n>n\alpha>N\alpha>A,$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

当 $q<-1$ 时，$|q|=1+\alpha(\alpha>0)$. $\forall A>0$，取 $N=N(A)\in\mathbf{N}$，s. t. $N>\frac{A}{\alpha}$，当 $n>N$ 时，有

$$|q^n|=(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\cdots+\alpha^n>n\alpha>N\alpha>A,$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=\infty$.

证法 2 当 $q>1$ 时，$\forall A>0$ 取 $N=N(A)\in\mathbf{N}$，s. t. $N>\log_q A$，当 $n>N$ 时，有

$$q^n>q^N>A,$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

当 $q<-1$ 时，$\forall A>0$，取 $N=N(A)\in\mathbf{N}$，s. t. $N>\log_{|q|}A$，当 $n>N$ 时，有

$$|q^n|=|q|^n>|q|^N>A,$$

因此，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=\infty$.

此外，当$|q|<1$时，由例 1.1.3 知，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$；当$q=1$时，由例 1.1.1 知，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=\lim\limits_{n\to+\infty} 1=1$；最后，当$q=-1$时，由下面的例 1.1.12 推得$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$不存在. □

例 1.1.5 设a为实常数，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

证明 显然，$\exists N_0\in\mathbf{N}$, s. t. $N_0>|a|$，$\forall\varepsilon>0$，取$N\in\mathbf{N}$, s. t. $N>\max\left\{N_0,\dfrac{|a|^{N_0+1}}{N_0!\ \varepsilon}\right\}$. 当$n>N$时，有

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\ \frac{|a|}{N_0+1}\cdots\frac{|a|}{n}\leqslant\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\ \frac{|a|}{n}\leqslant\frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\ \frac{|a|}{N}<\varepsilon,$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$. □

例 1.1.6 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}}=1(a>0)$.

证法 1 当$a=1$时，由例 1.1.1 可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to+\infty} 1=1$.

当$a>1$时，$\forall\varepsilon>0$，取$N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$, s. t. $N>\dfrac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$. 当$n>N$时，有

$$1-\varepsilon<1<\sqrt[n]{a}<\sqrt[N]{a}=a^{\frac{1}{N}}<1+\varepsilon,$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

当$0<a<1$时，$\forall\, 0<\varepsilon<1$，取$N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$, s. t. $N>\dfrac{1}{\log_a(1-\varepsilon)}$. 当$n>N$时，有

$$1-\varepsilon<a^{\frac{1}{N}}=\sqrt[N]{a}<\sqrt[n]{a}<1<1+\varepsilon,$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

证法 2 当$a\geqslant1$时，令$\sqrt[n]{a}=1+\alpha_n$，$\alpha_n\geqslant0$，则

$$a=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\cdots+\alpha_n^n>n\alpha_n,$$

$$\alpha_n<\frac{a}{n}.$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，取$N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$, s. t. $N>\dfrac{a}{\varepsilon}$，当$n>N$时，有

$$|\sqrt[n]{a}-1|=\alpha_n<\frac{a}{n}<\frac{a}{N}<\varepsilon,$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

当$0<a<1$时，由下节的定理 1.2.3 得到

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1.$$ □

例 1.1.7 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证法 1 令$\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n,\alpha_n\geqslant 0$,则当 $n>1$ 时,

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^{\ 2}+\cdots+\alpha_n^n>\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^{\ 2},$$

$$\alpha_n^{\ 2}<\frac{2}{n-1}.$$

于是,$\forall\varepsilon>0$,取 $N=N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$,s. t. $N>1+\frac{2}{\varepsilon^2}$,当 $n>N$ 时,有

$$|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\sqrt{\frac{2}{N-1}}<\varepsilon,$$

所以,$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证法 2 应用几何-算术平均不等式得到

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}=(1\cdots 1\sqrt{n}\sqrt{n})^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n}$$

$$=1+\frac{2(\sqrt{n}-1)}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

于是,$\forall\varepsilon>0$,取 $N\in\mathbf{N}$,s. t. $N>\frac{4}{\varepsilon^2}$,当 $n>N$ 时,有

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\frac{2}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{N}}<\varepsilon,$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1. \qquad \square$$

例 1.1.8 设 $a_n=0.\underbrace{33\cdots3}_{n个}$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0.\dot{3}=\frac{1}{3}$.

证明 $\forall\varepsilon>0$,取 $N\in\mathbf{N}$,s. t. $N>\lg\frac{1}{\varepsilon}$,当 $n>N$ 时,有

$$|a_n-0.\dot{3}|=|0.\underbrace{33\cdots3}_{n个}-0.\underbrace{33\cdots33}_{n个}\cdots|<\frac{1}{10^n}<\frac{1}{10^N}<\varepsilon,$$

所以,

$$\lim_{n\to+\infty}0.\underbrace{33\cdots3}_{n个}=0.\dot{3}=\frac{1}{3}. \qquad \square$$

例 1.1.9 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

证法 1 $\forall \varepsilon>0$，由例 1.1.5 知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n}{n!}=0$. 故 $\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，有

$$\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n}{n!}<0+1=1,$$

所以，

$$-\varepsilon<0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

证法 2 应用几何-算术不等式有

$$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}}\leqslant\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n},$$

再由下面的例 1.1.15 知，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0=\lim_{n\to+\infty}0.$$

根据下节的夹逼定理 1.2.6 就得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

证法 3 应用后面的例1.4.11中的不等式

$$\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1},$$

$\forall \varepsilon>0$，取 $N\in\mathbb{N}$，s. t. $N>\dfrac{\mathrm{e}}{\varepsilon}$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{\mathrm{e}}{n+1}<\frac{\mathrm{e}}{n}<\frac{\mathrm{e}}{N}<\varepsilon,$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$. □

例 1.1.10 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-3}=3$.

证明 $\forall \varepsilon>0$，取 $N\in\mathbb{N}$，s. t. $N>\max\left\{3,\dfrac{9}{\varepsilon}\right\}$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{3n^2}{n^2-3}-3\right|=\left|\frac{9}{n^2-3}\right|\xlongequal{n\geqslant 3}\frac{9}{n^2-3}\leqslant\frac{9}{n}<\frac{9}{N}<\varepsilon,$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-3}=3$. □

例 1.1.11 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}=\dfrac{3}{2}$.

证明 $\forall\varepsilon>0$，取 $N\in\mathbb{N}$，s. t. $N>\dfrac{25}{\varepsilon^2}$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{4\sqrt{n}-2}\leqslant\frac{5}{4\sqrt{n}-2\sqrt{n}}<\frac{5}{\sqrt{n}}<\frac{5}{\sqrt{N}}<\varepsilon,$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}=\dfrac{3}{2}$. □

为了论述的统一和简单，我们引进开邻域，ε 开邻域的概念.

$a(a\in\mathbb{R})$ 的开邻域为 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)=\{x\mid\rho(x,a)=|x-a|<\varepsilon\}=U(a;\varepsilon)$，也记为 $B(a;\varepsilon)$. 它表示直线上以 a 为中心，ε 为半径的开球或开区间，其中 $\rho(x,a)$ 为直线上 x 与 a 两点间的通常距离；$+\infty$ 的开邻域为 $U(+\infty,A)=(A,+\infty)$；$-\infty$ 的开邻域为 $U(-\infty,A)=(-\infty,-A)$；$\infty$ 的开邻域为 $U(\infty,A)=(-\infty,-A)\cup(A,+\infty)$.

对 $a\in\mathbb{R}$ 的去心 ε 开邻域为 $U^\circ(a;\varepsilon)=U(a;\varepsilon)\setminus\{a\}$ 或 $B(a;\varepsilon)\setminus\{a\}$；$a$ 的 ε 右开邻域为 $U_+(a;\varepsilon)=[a,a+\varepsilon)$ 或 $B_+(a;\varepsilon)$；a 的去心 ε 右开邻域为 $U^\circ_+(a;\varepsilon)=(a,a+\varepsilon)$ 或 $B^\circ_+(a;\varepsilon)$；a 的 ε 左开邻域为 $U_-(a;\varepsilon)=(a-\varepsilon,a]$ 或 $B_-(a;\varepsilon)$；a 的去心 ε 左开邻域为 $U^\circ_-(a;\varepsilon)=(a-\varepsilon,a)$ 或 $B^\circ_-(a;\varepsilon)$.

定理 1.1.1 数列 $\{a_n\}$ 有极限 a 的充分必要条件是它的偶数项数列(偶子列) $\{a_{2k}\}$ 和奇数项数列(奇子列) $\{a_{2k-1}\}$ 有相同的极限 a，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to+\infty}a_{2k}=\lim\limits_{k\to+\infty}a_{2k-1}=a$.

证明 ($\Rightarrow$)对 a 的任何开邻域 U，因 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，故 $\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，有 $a_n\in U$. 取 $K=N$，当 $k>K$ 时，有 $2k>2K=2N>N,2k-1>2K-1=2N-1\geqslant N$，故

$$a_{2k}\in U,\quad a_{2k-1}\in U.$$

从而，

$$\lim_{k\to+\infty}a_{2k}=a,\quad\lim_{k\to+\infty}a_{2k-1}=a.$$

($\Leftarrow$)对 a 的任何开邻域 U，因 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{2k}=a$，故 $\exists K_1\in\mathbb{N}$，当 $k>K_1$ 时，有 $a_{2k}\in U$. 又因 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{2k-1}=a$，故 $\exists K_2\in\mathbb{N}$，当 $k>K_2$ 时，有 $a_{2k-1}\in U$. 于是，当 $n>N=\max\{2K_1,2K_2-1\}$ 时，必有

$$a_n\in U,$$

所以，

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=a.$$ □

注 1.1.2 定理1.1.1的证明采用了统一表达，用 U 表示 a 的开邻域. 这种论证方式

读者应熟练掌握,如果对 a 为实数,$+\infty$,$-\infty$,∞四种情形分别论述,则当 $a\in\mathbb{R}$ 时,$U=U(a;\varepsilon)$;当 $a=+\infty$时,$U=U(+\infty,A)$;当 $a=-\infty$时,$U=U(-\infty,A)$;当 $a=\infty$时,$U=U(\infty,A)$. 余下的与定理 1.1.1 证明中所述相同. 因此,也可对一种情形证明后,其他三种情形类似.

定理 1.1.2 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a\Leftrightarrow$对$\{a_n\}$的任何子列$\{a_{n_k}\}$(当 $n_1<n_2<\cdots<n_{k-1}<n_k<\cdots$ 时,称$\{a_{n_k}\}$为$\{a_n\}$的一个子列),有$\lim\limits_{k\to+\infty}a_{n_k}=a$.

证明 ($\Leftarrow$)令 $n_k=k$,则$\{a_n\}=\{a_k\}=\{a_{n_k}\}$为$\{a_n\}$的一个子列,所以,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{k\to+\infty}a_k=\lim_{k\to+\infty}a_{n_k}=a.$$

($\Rightarrow$)对 a 的任何开邻域 U,因$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$,故$\exists N\in\mathbb{N}$,当 $n>N$ 时,$a_n\in U$. 当 $n_k\geqslant k>K=N$ 时,有 $a_{n_k}\in U$,所以,$\lim\limits_{k\to+\infty}a_{n_k}=a$. □

定理 1.1.3 数列$\{a_n\}$有极限(实数 a 或$+\infty$或$-\infty$)的充要条件为$\{a_n\}$的非平凡子列($\{a_n\}$本身以及$\{a_n\}$去掉有限项后得到的子列称为$\{a_n\}$的平凡子列;不是平凡子列的子列称为$\{a_n\}$的非平凡子列)都有极限(实数 a 或$+\infty$或$-\infty$).

证明 ($\Rightarrow$)即定理 1.1.2 中的必要性.

($\Leftarrow$)由右边条件,$\{a_n\}$的非平凡子列$\{a_{2k}\}$,$\{a_{2k-1}\}$,$\{a_{3k}\}$均有极限. 由于$\{a_{6k}\}$既是$\{a_{2k}\}$,又是$\{a_{3k}\}$的子列,故由上述必要性,可知

$$\lim_{k\to+\infty}a_{2k}=\lim_{k\to+\infty}a_{6k}=\lim_{k\to+\infty}a_{3k}.$$

此外,$\{a_{6k-3}\}$既是$\{a_{2k-1}\}$又是$\{a_{3k}\}$的子列,同样可得

$$\lim_{k\to+\infty}a_{2k-1}=\lim_{k\to+\infty}a_{6k-3}=\lim_{k\to+\infty}a_{3k}.$$

于是,$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}$,即$\{a_n\}$的奇子列$\{a_{2k-1}\}$和偶子列$\{a_{2k}\}$有相同的极限 a. 由定理 1.1.1即得$\{a_n\}$有极限. □

定理 1.1.3 的特例是如下定理.

定理 1.1.4 数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow\{a_n\}$的任何非平凡子列都收敛. □

定理 1.1.5 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a\Leftrightarrow a$ 的任何开邻域 U 的外边$\mathbb{R}\setminus U$ 至多含数列的有限多项. 它等价于$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\neq a\Leftrightarrow$存在 a 的某个开邻域 U,在 U 的外边含$\{a_n\}$的无限多项.

证明 ($\Rightarrow$)由极限的定义 1.1.1,在 U 的外边$\mathbb{R}\setminus U$ 中至多含 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 的若干项,当然是有限项.

($\Leftarrow$)对于 a 的任何一个开邻域 U,根据右边条件,$\{a_n\}$中至多只有有限多项位于 U 的外边,设它们依次为 $a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k}$($n_1<n_2<\cdots<n_k$). 令 $N=n_k$,则当 $n>N$ 时,必有 $a_n\in U$,所以$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$. □

例 1.1.12 数列$\{a_n\}$,$a_n=(-1)^{n-1}$无极限,当然不收敛.

证法 1 因为$\lim\limits_{k\to+\infty}a_{2k-1}=\lim\limits_{k\to+\infty}(-1)^{2k-1}=-1\neq1=\lim\limits_{k\to+\infty}(-1)^{2k}=\lim\limits_{k\to+\infty}a_{2k}$,所以由定

理 1.1.1 或定理 1.1.2 知，$(-1)^{n-1}$无极限.

证法 2 $\forall a\neq\pm1$，则 $\varepsilon_0=\min\{|a-1|,|a+1|\}>0$，且$(-1)^{n-1}$全在 a 的开邻域 $U=(a-\varepsilon_0,a+\varepsilon_0)$外边.

当 $a=1$ 时，$-1=(-1)^{2k-1}$都在 1 的开邻域 $U=(1-2,1+2)=(-1,3)$的外边.

当 $a=-1$ 时，$1=(-1)^{2k}$都在-1 的开邻域 $U=(-1-2,-1+2)=(-3,1)$的外边.

当 $a=+\infty$时，$(-1)^{n-1}$全在$+\infty$的开邻域 $U=(1,+\infty)$的外边.

当 $a=-\infty$时，$(-1)^{n-1}$全在$-\infty$的开邻域 $U=(+\infty,-1)$的外边.

当 $a=\infty$时，$(-1)^{n-1}$全在∞的开邻域 $U=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$的外边.

根据定理 1.1.5，任何实数 a，$+\infty$，$-\infty$，∞均不为 $a_n=(-1)^{n-1}$的极限. □

例 1.1.13 数列$\{\sin n\}$无极限.

证明 $\forall k\in\mathbb{N}$，因为区间$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$的长度为$\frac{\pi}{2}>1$，所以必存在 $n_k\in\left(2k+\frac{\pi}{4},2k+\frac{3\pi}{4}\right)\cap\mathbb{N}$. 同理，必存在 $n_k'\in((2k-1)\pi,2k\pi)\cap\mathbb{N}$. 显然，$n_1<n_2<n_3<\cdots$，$n_1'<n_2'<n_3'<\cdots$，且

$$1\geqslant\sin n_k>\frac{\sqrt{2}}{2},\quad -1<\sin n_k'<0,\quad k\in\mathbb{N}.$$

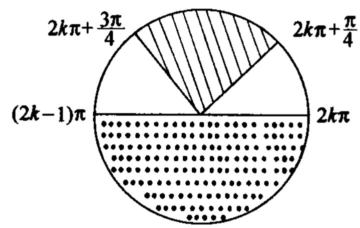


图 1.1.5

所以，这两个子列$\{\sin n_k\}$与$\{\sin n_k'\}$不可能有同一个极限(如图 1.1.5 所示). 根据定理 1.1.2 知，数列$\{\sin n\}$无极限. □

定理 1.1.6 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a>b$(或$<b$)，则$\exists N_0\in\mathbb{N}$，当 $n>N_0$ 时，有 $a_n>b$(或$<b$).

特别地，有保号性定理：设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a>0$(或$<0$)，则$\exists N_0\in\mathbb{N}$，当 $n>N_0$ 时，有 $a_n>0$(或<0). 进一步，如果 $a\in\mathbb{R}$，则 $a_n>\frac{a}{2}>0$(或 $a_n<\frac{a}{2}<0$)，$n>N_0$.

证法 1 对 $a,b\in\mathbb{R}$ 证明.

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a>b$，对 $\varepsilon_0=\frac{a-b}{2}>0$，$\exists N_0\in\mathbb{N}$，当 $n>N_0$ 时，有

$$a_n>a-\varepsilon_0=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}>b.$$

其他情形类似证明.

证法 2 (统一论证)因为 $a>b$，所以存在 a 的开(区间)邻域 U，而 $b\notin U$(b 在 U 的左边). 又因 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，故$\exists N_0\in\mathbb{N}$，当 $n>N_0$ 时，有 $a_n\in U$，此时，$a_n>b$. □

例 1.1.14 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$(极限为 0 的变量称为无穷小量)，$|b_n|\leqslant M$(此时，称 b_n 为有界量)，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_nb_n=0$，即无穷小量与有界量之积仍为无穷小量.