华 章 数 学 译 丛

HZ BOOKS

7

An Elementary Introduction to Mathematical Finance

Options and Other Topics

(Second Edition)

数理金融初步

（原书第2版）

（美）Sheldon M. Ross 著
加州大学伯克利分校

陈典发 等译

机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛 7

An Elementary Introduction to Mathematical Finance

Options and Other Topics (Second Edition)

数理金融初步

（原书第2版）

（美）Sheldon M. Ross 著
加州大学伯克利分校
陈典发 等译

机械工业出版社
China Machine Press

本书清晰简洁地阐述了数理金融学的基本问题，主要包括套利、Black-Scholes 期权定价公式以及效用函数、最优资产组合原理、资本资产定价模型等知识，并将书中所讨论的问题的经济背景、解决这些问题的数学方法和基本思想系统地展示给读者.

本书内容选择得当、结构安排合理，既适合作为高等院校学生(包括财经类专业及应用数学专业)的教材，同时也适合从事金融工作的人员阅读.

Sheldon M. Ross: An Elementary Introduction to Mathematical Finance: Options and Other Topics, Second Edition (ISBN 0-521-81429-4).

Originally published by Cambridge University Press in 2003.

This Chinese edition is published with the permission of the Syndicate of the Press of the University of Cambridge, Cambridge, England.

本书版权登记号：图字：01-2004-0612

图书在版编目(CIP)数据

数理金融初步(原书第 2 版)/(美)罗斯(Ross, S. M.)著；陈典发等译. —北京：机械工业出版社，2005. 4

(华章数学译丛)

书名原文：An Elementary Introduction to Mathematical Finance: Options and Other Topics, Second Edition

ISBN 7-111-16120-3

Ⅰ. 数…　Ⅱ. ①罗…②陈…　Ⅲ. 金融学：数理经济学　Ⅳ. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 016514 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037)

责任编辑：方　敏　迟振春

北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2005 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16 · 12.75 印张

印数：0 001-4 000 册

定价：26.00 元

译 者 序

近几年来国内外出版了很多有关金融工程和数理金融方面的专著和教科书，然而这些书中，凡稍具理论性的，在阐述其主要内容(如关于期权的定价理论等)时，大都直接或间接地使用了随机微分方程等现代概率论知识，并且要么把这些知识当成读者已知的东西，要么让读者用比较初等的方式去理解它们．而另一方面，目前一般大学本科生所掌握的数学工具主要是微积分、代数和初等概率论，此类著作中涉及的现代概率论知识远远超出了包括数学专业在内的大学生的知识范畴，所以用这类书作教材往往使学生感到无所适从．很多从事相关课程教学的教师都深感缺乏一本合适的教科书，而在金融投资部门从事实际工作的很多人也感到难以找到一本既比较深入又不太难懂的读物．本书使人感到眼前一亮．本书以 Black-Scholes 期权定价理论为核心，比较全面地介绍了数理金融学的基本问题．书中将读者应该具备的数学基础严格限定在绝大多数本科生的水平，甚至连初等概率和基本的复利理论也从头讲起．但由于作者在内容选择、结构安排和逻辑体系设计方面的精巧构思，所以能以相对较少的篇幅，把书中所讨论的问题的经济背景以及解决这些问题的数学方法和基本思想，系统而又简洁明快地展示给读者，其中某些问题的讲述还具有相当的深度．此外，作者还非常注意金融实践活动中常用计算技术的介绍，相信那些从事实际工作的读者以及数学基础好一些的人在这方面会大为受益．本书很适合作为高等院校财经类专业及应用数学专业学生的教材，同时也适合从事金融工作的人员阅读．

我们有幸受机械工业出版社华章分社之托将此书译成中文，希望中文版的出版能给我国更多读者了解数理金融和金融工程带来方便．参加本书翻译工作的是：冯建芬(第 1，2，3，6，9 章)；甄强(第 4，5，10，11 章)；王硕玉(第 7，8，12，13 章)．全书最后由陈典发负责修改统稿．书中用到的一些专业术语尚无统一译法，我们在翻译时大致遵照简单易记的原则．对于有不同译法的术语，例如，option(期权，选择权)，call option(买入期权，看涨期权)，put option(卖出期权，看跌期权)，exotic option(奇异期权，新型期权，复杂期权)，VaR(风险价值，在险价值)，hedging(对冲，套期保值)，payout(支付，损益，收益)等，我们都选择了括号中的第一种译法．限于时间和水平，难免会有疏漏甚至错误之处，恳请读者指正．

陈典发

2004 年 10 月于南开园

前　言

期权(合约)给其持有者按指定条款买进或卖出某种证券的权利(但不是义务). 买入期权(call option)给予买入权利，而卖出期权(put option)给予卖出权利. 这两种期权都规定有执行价(exercise price)和到期日(exercise time). 此外，对期权的履行规定了两种标准的条件：欧式期权仅在到期日能行使权利，而美式期权行使权利的时间则可为到期日及此前任何时刻. 例如，若买进一个执行价为 K、到期日为 t 的期权，如果此期权是欧式的，那么其持有者有权在时刻 t 以价格 K 购买一股标的证券；而若是美式期权，持有者则有权在 t 及此前任何时刻进行这种购买.

对一个完善高效的期权市场，应该有一种有效的计算方法来(至少是近似地)估计各种期权的价值. 对买入期权(不管美式或欧式类型)，用著名的 Black-Scholes 公式可作出这种估计. 该公式假定标的证券价格服从几何布朗运动. 也就是说，如果该证券在时刻 y 的价格是 $S(y)$，未来任意指定时刻 $t+y$ 的价格与 y 时刻价格之比独立于到 y 时刻为止的任何历史价格，并且它具有均值和方差分别为 $t\mu$ 与 $t\sigma^2$ 的对数正态分布. 即：$\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$是均值为 $t\mu$、方差为 $t\sigma^2$ 的正态随机变量. Black 和 Scholes 证明了：当价格服从几何布朗运动假设时，对买入期权而言，存在这样一个唯一的价格，它不允许理想化的交易者凭借某种交易策略在任何情况下都确保获利. 这里，理想化交易者是指那些能够不花费任何交易成本而连续不断进行交易的人. 也就是说，当且仅当期权价格由 Black-Scholes 公式给出时，不存在确定性的赢利(无套利)机会. 此外，该价格仅依赖于几何布朗运动的方差参数 σ(还有当前利率、标的证券价格和期权的执行条件)，而与参数 μ 无关. 由于参数 σ 度量了证券的波动性，故常称其为*波动参数*.

风险中性投资者是指只使用投资回报的期望现值来估计该项投资的价值的投资者. 如果这类投资者用一个几何布朗运动来模拟某种证券的价格随时间的演化，从而将涉及该证券的买和卖变成一种公平赌博，那么这些投资者对于证券买入期权的估价恰好由 Black-Scholes 公式给出. 由于此原因，Black-Scholes 的期权价值也常被称为风险中性价值.

本书的首要目的是导出并解释 Black-Scholes 公式. 然而其推导需要用到某些概率论知识. 前三章重点描述这些知识. 第 1 章介绍概率和概率试验，此外讨论了随机变量及其期望值和协方差的概念. 这里，随机变量是指取值由某个概率试验的结果决定的量. 第 2 章介绍正态随机变量，这类随机变量的概率分布由一条铃形曲线决定. 该章还叙述了中心极限定理，该定理是概率论中最重要的理论结果，它告诉我们：大量随机变量的和可近似为正态随机变量. 第 3 章中介绍几

何布朗运动，给出了其定义，证明了如何从一些更简单过程的极限获得它，还讨论了用它描述证券价格的合理性.

讲述了必要的概率知识之后，在从第 4 章开始的第二部分中，我们介绍利率和现值的概念. 支撑 Black-Scholes 公式的一个关键概念是套利，第 5 章专门讨论它. 在此章中我们说明在包括单时期二项模型在内的各种情况下，如何使用套利进行定价. 第 6 章讨论套利定理，并在多时期二项模型下，使用它导出期权唯一无套利价格的表达式. 在第 7 章，我们使用第 6 章的结果以及第 4 章中提出的几何布朗运动的近似方法，给出了买入期权的 Black-Scholes 定价方程的一种简化推导；此外还讨论了以期权价格作为其参数的函数所具有的性质，以及关于 delta 对冲复制策略的性质. 有关期权的其他性质放在第 8 章讨论，那里我们推导出当标的证券支付红利时相应期权的价格公式；给出了利用多时期二项模型来确定美式卖出期权风险中性近似价格的方法；还讨论了当证券价格模型为一个布朗运动加上某个随机跳跃过程时，相应期权无套利价格的确定问题；此外还给出了关于波动参数的几个不同估计量.

第 9 章指出：在许多情况下，仅仅考虑套利性并不能唯一地确定期权的价格. 此时，起重要作用的是投资者的效用函数以及他们对各种投资可能结果概率的估计. 该章还介绍了均方差分析、风险价值和条件风险价值以及资本资产定价模型等概念. 我们将证明，即使证券价格服从几何布朗运动且买入期权按照 Black-Scholes 公式定价，仍然可能存在下述投资机会：该投资的期望利润为正且标准差相对较小(如果投资者关于几何布朗运动参数 μ 的估计值与能将所有投资变成公平赌博的值不同，就会出现这种机会).

第 10 章研究金融中某些最优化模型. 第 11 章介绍像障碍期权、亚式期权和回望期权等非标准期权或称“奇异”期权. 我们将说明如何使用蒙特卡罗模拟以及方差减小技术来有效地确定这些期权的几何布朗运动风险中性价值.

即便人们对标的证券几何布朗运动模型的正确性存在疑问，Black-Scholes 公式仍是很有用的. 因为只要我们承认该模型至少是近似有效的，使用该模型就可以给人这样一种观念：期权具有某个适当的价格. 因此，如果期权的实际交易价格低于此公式计算出来的价格，期权相对证券本身来说就是价格低估了，这就会导致人们考虑卖出证券而买入期权(若期权交易价格高于公式计算出来的价格，则会出现相反的现象). 第 12 章将指出：几何布朗运动并不总是能够拟合实际数据，因而需要考虑更一般的模型. 在商品价格情形下，许多交易商执着地相信存在着平均价格回归现象：某些商品的市场价格总是倾向于回复到某个固定的价格. 第 13 章提出一个较几何布朗运动更一般的模型，它可用于模拟这类商品的价格流.

本版的新内容

在延续了第 1 版的基本格调和框架的同时，第 2 版增加了以下内容：

- 给出了 Black-Scholes 公式的一个新颖而简洁的推导(7.2 节).
- 提出了 delta 对冲套利策略(7.4 节).
- 给出了 Black-Scholes 期权价格函数偏导数的推导(7.5 节)，这些推导此前未曾出现过，且较文献中的其他推导方法简单.
- 对证券的三种不同红利支付方式，分别推导出了欧式买入期权的无套利价格(8.2 节).
- 给出了波动参数的一种新估计方法. 该方法容易实现，而且相对当前使用的其他方法而言，能产生一个更好的波动参数估计量(8.5.4 节).
- 增加了有关缺乏价格演化模型时套利定价的材料，还有关于买入期权价格作为敲定价的凸函数性质的讨论，以及期权组合性质的讨论(5.2 节).
- 增加了下述情形下买入期权无套利价格的一个新的简单的推导：标的证券的价格演化过程是一个几何布朗运动加上一个随机跳跃. 我们得出一个确切的计算公式(假定跳跃有对数正态分布)，并获得了它的上下界和(一般情形下的)近似公式(8.4 节).
- 第 10 章完全是新的，本章提出了一些金融最优化方法.
- 关于风险价值和条件风险价值一节是新的(9.4 节).
- 增加了许多新的例子和练习.

应提及的一个技术性问题是，我们使用记号 $\log(x)$ 表示 x 的自然对数，即以 e 为底的对数，这里 e 定义为

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n,$$

其近似值为 2.718 28…

感谢 Ilan Adler 教授和 Shmuel Oren 教授启发性的交谈，感谢 Kyle Lin 先生给了我许多宝贵的评论，还要感谢 Nahoya Takezawa 先生综合性的评价以及他在后面几章数值计算方面所做的工作.

目　录

第1章 概 率 论

1.1 概率和事件

考虑一个试验，以 S 表示该试验所有可能结果的集合，称之为样本空间. 若试验中有 m 个可能的结果，我们一般把它们记为 1，2，…，m，所以 $S=\{1, 2, \cdots, m\}$. 但是，当处理某些具体样本时，我们通常给它们一个描述性的名称.

例 1.1a i)掷一枚硬币的试验，试验的结果为硬币的正面朝上或反面朝上，样本空间为

$$S=\{h,t\},$$

其中 h 代表硬币正面朝上，t 代表反面朝上.

ii)掷两粒骰子的试验，结果由一对数(i, j)组成，其中 i 是第一粒骰子掷出的点数，j 是第二粒骰子掷出的点数，这样，此样本空间就包含下述 36 对数：

$$\begin{array}{llllll}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6), \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6), \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6), \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6), \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6), \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6).
\end{array}$$

iii)编号为 1，2，3，…，r 的 r 匹马的赛马试验，比赛结果为马的名次，则样本空间为

$$S=\{1,2,3,\cdots,r \text{ 的全部排序}\}.$$ 1

例如，若 $r=4$，比赛名次为 1 号马第一，4 号马第二，2 号马第三，3 号马第四，则对应的样本为$\{1, 4, 2, 3\}$. □

再次考虑样本空间为 $S=\{1, 2, \cdots, m\}$的试验. 现假定存在实数 $p_1, \cdots, p_m$，满足

$$p_i \geqslant 0, i=1,\cdots,m, \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

且 p_i 为试验出现结果 i 的概率.

例 1.1b 在例 1.1a i)中，如果掷出硬币正面和反面的可能性相同，则称硬币是规则的或无偏的，对于一个规则硬币我们有

$$p_h = p_t = 1/2.$$

如果硬币有偏，且正面朝上的可能性是反面朝上的两倍，则有

$$p_h = 2/3, \quad p_t = 1/3.$$

在例 1.1a ii)中，若骰子是均匀的，则所有结果的可能性相同且为

$$p_{(i,j)} = 1/36, \quad 1 \leqslant i \leqslant 6, \quad 1 \leqslant j \leqslant 6.$$

在例 1.1a iii)中，若 $r=3$，则我们给出了和为 1 的 6 个非负数：

$$p_{1,2,3}, p_{1,3,2}, p_{2,1,3}, p_{2,3,1}, p_{3,1,2}, p_{3,2,1},$$

其中 $p_{i,j,k}$表示 i 号马第一，j 号马第二和 k 号马第三的概率. □

由试验可能结果组成的任何集合称为事件. 也就是说，事件是所有可能结果集合 S 的子集. 对任意事件 A，如果 A 中的任何结果在试验中出现，我们称事件 A
2 发生. 若将 A 发生的概率记为 $P(A)$，那么我们可根据下面的等式确定它的值：

$$P(A) = \sum_{i \in A} p_i. \tag{1-1}$$

注意这意味着：

$$P(S) = \sum_i p_i = 1. \tag{1-2}$$

换句话说，试验结果属于样本空间的概率为 1，这是一个期望的结果，因为 S 包含了试验中所有可能的结果.

例 1.1c 掷一对质量均匀的骰子，如果事件 A 是点数和为 7，则

$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

且

$$P(A)=6/36=1/6.$$

若事件 B 表示点数和为 8，则

$$P(B) = p_{(2,6)} + p_{(3,5)} + p_{(4,4)} + p_{(5,3)} + p_{(6,2)} = 5/36.$$

在三匹马的赛马试验中，记事件 A 表示 1 号马赢，则 $A=\{(1,2,3),(1,3,2)\}$，且

$$P(A) = p_{1,2,3} + p_{1,3,2}.$$ □

对于任意事件 A，称所有包含在 S 中但不包含在 A 中的事件组成的集合为 A 的补集，记为 A^c. 就是说 A^c 发生，当且仅当 A 不发生，由于

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_i p_i \\ &= \sum_{i \in A} p_i + \sum_{i \in A^c} p_i \\ &= P(A) + P(A^c), \end{aligned}$$

所以有

$$P(A^c) = 1 - P(A). \tag{1-3}$$

即不包含在 A 中的结果出现的概率为 1 减去事件 A 发生的概率. 样本空间 S 的补集为空集 $\varnothing$，即不包含任何结果. 既然 $\varnothing=S^c$，我们由等式(1-2)、(1-3)得到 3

$$P(\varnothing)=0.$$

对任何两个事件 A，B，定义 A，B 的并集为由所有属于 A 或属于 B 的事件组成的集合，记为 $A\cup B$. 相应地我们还可以定义交集 AB(或写为 $A\cap B$)，它表示所有同时属于 A 和 B 的结果组成的集合.

例 1.1d 掷两粒骰子，设 A 代表点数和为 10 这一事件，B 为两骰子的点数均为大于 3 的偶数，则

$A=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$，$B=\{(4,4),(4,6),(6,4),(6,6)\}$.

因此

$$A\cup B=\{(4,4),(4,6),(5,5),(6,4),(6,6)\},$$
$$AB=\{(4,6),(6,4)\}.$$ □

对于任意事件 A，B，我们有

$$P(A\cup B)=\sum_{i\in A\cup B}p_i,$$
$$P(A)=\sum_{i\in A}p_i,$$
$$P(B)=\sum_{i\in B}p_i.$$

由于 A，B 共有的结果在 $P(A)+P(B)$ 中计算了两次，而在 $P(A\cup B)$ 中只计算一次，所以我们有下面的结果，称之为*概率的加法定理*.

命题 1.1.1

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

这样，包含在 A 或 B 中的试验结果发生的概率，等于 A 事件发生的概率加上 B 事件发生的概率，减去 A 和 B 同时发生的概率. 4

例 1.1e 设今天道-琼斯股票指数上升的概率为 0.54，明天上升的概率为 0.54，今明两天都上升的概率为 0.28. 道-琼斯指数在两天内都不上升的概率是多少?

解: 设事件 A 表示指数今天会上升，事件 B 表示指数明天会上升，则两天中指数至少有一天会上升的概率是

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.54+0.54-0.28=0.80.\end{aligned}$$

因此，今明两天都不上升的概率为 $1-0.80=0.20$. □

如果 $AB=\varnothing$，称 A 与 B *相互排斥*或*不相交*. 就是说，不可能同时发生的两

个事件是相互排斥的. 由于 $P(\varnothing)=0$，由命题 1.1.1 知，当 A，B 互斥时，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

1.2 条件概率

设两个小组打算各自生产一个产品，所生产的两个产品都将被分为合格和不合格两个等级. 于是这个试验的样本空间包括以下 4 个可能结果：

$$S=\{(a, a), (a, u), (u, a), (u, u)\},$$

这里，例如 (a, u) 代表第一组的产品合格，第二组的产品不合格. 设这些结果的概率如下：

$$P(a,a) = 0.54,$$
$$P(a,u) = 0.28,$$
$$P(u,a) = 0.14,$$

5 $$P(u,u) = 0.04.$$

如果我们已获知生产的产品中恰好有一个合格这个信息，那么该合格品是由第一组生产的概率为多少？为确定这一概率，进行以下推理：既然已知只有一个产品合格，则此时的结果只能是 (a, u) 或 (u, a). 由于 (a, u) 出现的概率是 (u, a) 出现概率的 2 倍，那么在已知它们中有一个发生这一信息下应仍满足这个条件. 因此结果为 (a, u) 的概率为 2/3，结果为 (u, a) 的概率为 1/3.

记 $A=\{(a, u), (a, a)\}$ 表示第一组的产品合格，$B=\{(a, u), (u, a)\}$ 表示仅有一个组的产品合格. 在已知只有一个组产品合格的条件下第一组产品合格的概率称为 A 在 B 已发生条件下的条件概率，记为

$$P(A \mid B).$$

$P(A \mid B)$ 的一般公式可以类似以上讨论得到，即若已知事件 B 发生，为使事件 A 也发生，必须使出现的事件同时在 A 和 B 中，也就是说，此事件包含在 AB 中. 现在，既然 B 已经发生了，我们可以把 B 看成一个新的样本空间，因此 AB 发生的概率等于 AB 的概率除以 B 的概率，即

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1-4}$$

例 1.2a 掷两次硬币，设样本空间 $S=\{(h, h), (h, t), (t, h), (t, t)\}$ 中的四个样本点出现的概率相等，则在下面任一条件下，两次均为正面的条件概率为多少？

a) 第一次掷出正面；

b) 至少一次掷出正面.

解：记 $A=\{(h, h)\}$ 代表两次均为正面的事件；$B=\{(h, h), (h, t)\}$ 代表第一次掷币为正面；$C=\{(h, h), (h, t), (t, h)\}$ 代表至少有一次掷币为正

面，则　6

$$
\begin{aligned}
P(A \mid B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} \\
&= \frac{P(\{(h,h)\})}{P(\{(h,h),(h,t)\})} \\
&= \frac{1/4}{2/4} \\
&= 1/2
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
P(A \mid C) &= \frac{P(AC)}{P(C)} \\
&= \frac{P(\{(h,h)\})}{P(\{(h,h),(h,t),(t,h)\})} \\
&= \frac{1/4}{3/4} \\
&= 1/3.
\end{aligned}
$$

许多人会感到惊奇，为何 a)和 b)部分的答案不相同？为了解答案不同的原因，请首先注意，在第一次掷币为正面的条件下，第二次投掷出现正反面仍是等概率的，所以 a)中概率为 1/2. 另一方面，知道至少有一次为正面等价于结果不是(t, t)，所以此事件包含三个等可能的结果，即(h, h)，(h, t)，(t, h)，说明 b)部分的概率为 1/3. □

由等式(1-4)得到

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B). \tag{1-5}$$

这表示 A，B 同时发生的概率等于 B 发生的概率乘以 A 在 B 发生下发生的条件概率，这个结果称为*概率的乘法定理*.

例 1.2b　取球试验：一个罐里有 16 个球，9 个蓝球，7 个黄球，以不放回的方式从中任取两个球. 如果罐中每个球被取到的概率相同，问取到的两个球都是蓝球的概率是多少？　7

解：设 B_1，B_2 分别表示第一次和第二次取出的为蓝球. 若已知第一次取出的为蓝球，则第二个球是从剩余 15 个球中取出的，其中 8 个为蓝球，所以 $P(B_2 \mid B_1)=8/15$，$P(B_1)=9/16$，因此

$$P(B_1B_2) = \frac{9}{16}\,\frac{8}{15} = \frac{3}{10}. \qquad \square$$

A 在 B 发生下发生的条件概率不等于 A 的无条件概率. 换句话说，当知道试验的结果为 B 的元素时，通常会改变该结果为 A 的元素这一事件的概率.（如果 A 和 B 相互排斥会出现什么情况？）在 $P(A \mid B)=P(A)$的特殊情形下，我们称

A 独立于 B. 由于

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

所以我们看到，当

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{1-6}$$

时，A 是独立于 B 的. 式(1-6)的关系对于 A，B 是对称的，也就是说当 A 独立于 B 时，B 也独立于 A，即 A，B 是独立事件.

例 1.2c 设一股票当天的收盘价不低于前一天的收盘价的概率为 0.52，且相连两天的价格是相互独立的. 求此后四天内收盘价下跌而第五天不下跌的概率.

解： 记 A_i 表示第 i 天收盘价下跌的事件. 由独立性，我们有

8

$$\begin{aligned}P(A_1A_2A_3A_4A_5^c)&=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5^c)\\&=(0.48)^4(0.52)=0.0276.\end{aligned}$$ □

1.3 随机变量及其期望值

一个数值变量的值若由某个随机试验结果所决定，则称之为**随机变量**. 例如，掷骰子所得点数或多次掷一枚硬币掷出正面的次数，均为随机变量. 由于随机变量的值取决于试验的结果，我们可以赋予它取每个值的概率.

例 1.3a 设随机变量 X 表示掷一对骰子掷出的点数之和. X 可能的取值为 2，3，…，12，且它们有以下概率：

$$P\{X=2\}=P\{(1,1)\}=1/36,$$
$$P\{X=3\}=P\{(1,2),(2,1)\}=2/36,$$
$$P\{X=4\}=P\{(1,3),(2,2),(3,1)\}=3/36,$$
$$P\{X=5\}=P\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}=4/36,$$
$$P\{X=6\}=P\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}=5/36,$$
$$P\{X=7\}=P\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}=6/36,$$
$$P\{X=8\}=P\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}=5/36,$$
$$P\{X=9\}=P\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}=4/36,$$
$$P\{X=10\}=P\{(4,6),(5,5),(6,4)\}=3/36,$$
$$P\{X=11\}=P\{(5,6),(6,5)\}=2/36,$$
$$P\{X=12\}=P\{(6,6)\}=1/36.$$ □

设随机变量 X 的可能取值为 x_1，x_2，…，x_n，则概率集 $P\{X=x_j\}(j=1,\cdots,n)$称为随机变量 X 的**概率分布**. 由于 X 的取值都包含在这些值中，所以有

$$\sum_{j=1}^{n} P\{X = x_j\} = 1.$$

定义　设随机变量 X 取值为 x_1，x_2，…，x_n，X 的期望值记为 $E[X]$，定义如下： 9

$$E[X] = \sum_{j=1}^{n} x_j P\{X = x_j\}.$$

$E[X]$也称为 X 的期望或均值.

换言之，$E[X]$是 X 所有可能取值的加权值，权重等于 X 取相应值的概率.

例 1.3b　随机变量 X 表示我们在一次赌博中所赢的金额．如果我们有 60%的机会输掉 1，有 20%的机会赢得 1，有 20%的机会赢得 2，试求 $E[X]$.

解：

$$E[X] = -1(0.6) + 1(0.2) + 2(0.2) = 0.$$

所以，在这次赌博中我们赢的期望数量为 0．获胜期望值为零的赌博称为公平赌博. □

例 1.3c　随机变量 X 取 1 的概率为 p，取 0 的概率为$(1-p)$，这样的随机变量称为参数为 p 的贝努里随机变量，其期望值为

$$E[X] = 1(p) + 0(1-p) = p.$$ □

期望值的一个简单且有用的结果是：对于常数 a，b，有

$$E[aX + b] = aE[X] + b. \tag{1-7}$$

为证明式(1-7)，设 $Y=aX+b$．由于 $X=x_j$ 时，$Y=ax_j+b$，所以

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{j=1}^{n} (ax_j + b) P\{X = x_j\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} ax_j P\{X = x_j\} + \sum_{j=1}^{n} bP\{X = x_j\} \\ &= a\sum_{j=1}^{n} x_j P\{X = x_j\} + b\sum_{j=1}^{n} P\{X = x_j\} \\ &= aE[X] + b. \end{aligned}$$ 10

另外一个重要的结果是随机变量和的期望值等于随机变量期望值的和.

命题 1.3.1　对于随机变量 X_1，X_2，…，X_k，有

$$E\Big[\sum_{j=1}^{k} X_j\Big] = \sum_{j=1}^{k} E[X_j].$$

例 1.3d　考虑 n 个独立试验，每个试验成功的概率为 p．随机变量 X 等于试验成功的个数，称之为参数为 n，p 的二项随机变量，可用表达式

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j,$$

确定它的期望值，其中当第 j 次试验成功时 $X_j=1$，失败时 $X_j=0$. 由命题 1.3.1，我们得到

$$E[X] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j] = np,$$

最后的等式用到了例 1.3c 的结果. □

如果与随机变量 X_1，X_2，…，X_n 的任何子集有关的概率，其取值不随其他部分概率的取值而改变，则称它们是独立的.

例 1.3e 设 N 个球中有 n 个红球，其余的为黑球，依次从中随机取出 k 个球. 若取出的第 i 个球为红球，令 $X_i=1$，若取出的是黑球，令 $X_i=0(i=1,\cdots,k)$. 如果以放回方式取球，则 X_1，X_2，…，X_k 是独立的，但如果以不放回方式取球，则此 n 个随机变量是不独立的.（为什么?） □

随机变量 X 可能取值的平均值由它的期望值表示，而其散布程度则可由它

11 的方差来度量.

定义 *X 的方差记为 $\mathrm{Var}(X)$，定义为*

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2].$$

换言之，方差等于 X 与它的期望值之差的平方的平均值.

例 1.3f 求参数为 p 的贝努里随机变量 X 的方差 $\mathrm{Var}(X)$.

解： 因为 $E[X]=p$(见例 1.3c)，所以

$$(X - E[X])^2 = \begin{cases} (1-p)^2 & 以概率\ p, \\ p^2 & 以概率\ 1-p. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E[(X - E[X])^2] \\ &= (1-p)^2 p + p^2(1-p) \\ &= p - p^2. \end{aligned}$$

□

如果 a，b 均为常数，则

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(aX+b) &= E[(aX+b-E[aX+b])^2] \\ &= E[(aX - aE[X])^2] \quad (由等式(1\text{-}7)) \\ &= E[a^2(X-E[X])^2] \\ &= a^2\mathrm{Var}(X). \end{aligned} \tag{1-8}$$

虽然不是所有的随机变量之和的方差都等于各随机变量的方差之和，但当这些随机变量独立时，结论成立.