全日制普通高级中学（必修）

数学第二册（上）

教师教学用书

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社

全日制普通高级中学（必修）

数学第二册（上）

教师教学用书

人民教育出版社中学数学室　编著

人民教育出版社

全日制普通高级中学(必修)
数学第二册(上)
教师教学用书
人民教育出版社中学数学室 编著
*
人 民 教 育 出 版 社 出 版
(北京沙滩后街55号 邮编:100009)
网址:http://www.pep.com.cn
北 京 出 版 社 重 印
北 京 市 新 华 书 店 发 行
北京金明盛印刷有限公司印刷
*
890×1194 1/16 印张5.5 字数113 000
2004年6月第1版 2005年6月第2次印刷
印数 1—13 300
ISBN 7—107—17452—5 / G·10542(课) 定价:5.80元
如发现印装质量问题影响阅读请与北京出版社联系
电话:62367356 58572393

说　明

本书是人民教育出版社中学数学室编著的《全日制普通高级中学教科书（必修）数学第二册(上)》的教师教学用书．编写时按教科书分章安排，每章包括概述、内容分析、习题参考解答三个部分．参加编写本书的有颜其鹏、俞求是、李慧君，责任编辑是李海东．

目 录

第六章 不等式

I 概 述

一、教学要求

1. 理解不等式的性质及其证明.

2. 掌握两个（不扩展到三个）正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理，并会简单的应用.

3. 掌握用分析法、综合法、比较法证明简单的不等式.

4. 掌握某些简单不等式的解法.

5. 理解不等式

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

6. 通过不等式的一些应用，使学生进一步理解在现实世界中的量之间，不等是普遍的、绝对的，相等则是局部的、相对的，从而对学生进行辩证唯物主义观点的教育.

二、内容编排

本章教材是在初中介绍了不等式的概念，学习了一元一次不等式，一元一次不等式组的解法，高一学习了一元二次不等式，简单的分式不等式和含绝对值不等式的解法的基础上，研究不等式的性质，不等式的证明和一些不等式的解法.

不等式与数、式、方程、函数、三角等内容有密切的联系. 讨论方程或方程组的解的情况，研究函数的定义域、值域、单调性、最大值、最小值，讨论线性规划问题等，都要经常用到不等式的知识. 不等式在解决各类实际问题时也有广泛的应用. 可见，不等式在中学数学里占有重要地位，是进一步学习数学的基础知识.

本章教材内容分为五部分. 第一部分讲不等式的性质. 首先通过数轴表示数，给出了比较实数大小的方法，在这基础上，给出了不等式的性质，一共讲了五个定理和三个推论，并给出了证明. 不等式的其他性质，都可由它们推导出来. 第二部分讲算术平均数与几何平均数. 教科书首先证明了一个重要的不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，通过这一公式，得出了两个正数的算术平均数与几何平均数的定理，最后，通过几个例题，说明此定理在解决数学问题和实际问题中的应用. 第三部分讲不等式的证明. 通过七个例题，分别介绍了证明不等式的三种基本方法——比较法、综合法和分析法. 第四部分举例介绍不等式的解法. 通过例题，复习、总结了一元二次不等式、一元二次不等式组、含绝对值不等式、简单高次不等式和分式不等式的解法. 第五部分讲含绝对值不等式. 在这一部分里，介绍了含绝对值不等式的一个定理及其证明，并给出它的两个推论，在例题中，介绍了它们的应用.

本章内容中，不等式的证明和不等式的解法是重点. 不等式的性质及其证明，不等式的证明是难点.

掌握不等式的性质是学好本章的关键.

三、课时分配

本章教学时间约需 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

6.1	不等式的性质	约 3 课时
6.2	算术平均数与几何平均数	约 2 课时
6.3	不等式的证明	约 5 课时
6.4	不等式的解法举例	约 2 课时
6.5	含有绝对值的不等式	约 2 课时
小结与复习		约 2 课时

Ⅱ 内容分析

引言

教科书从一个求函数最小值的实际问题出发，引出了本章内容，也说明了不等式的知识可用来解决一些实际问题.

然后，引言指出了不等式在数学学科中的地位和作用，说明了学习本章知识的重要性.

最后，引言概括说明了本章的主要内容，使学生初步了解全章内容的概貌.

6.1 不等式的性质

1. 本小节内容包括比较实数大小的方法，不等式的性质、推论及其证明.

2. 在讲对于任意两个实数 a，b，都有

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b,$$

$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b,$$

$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$$

时，应指出上面等价符号的左式反映的是实数的运算性质，右式反映的则是实数的大小顺序，合起来就成为实数的运算性质与大小顺序之间的关系. 它是不等式这一章内容的理论基础，是不等式性质的证明、证明不等式和解不等式的主要依据. 因此，在教学时必须高度重视.

比较两个实数 a 与 b 的大小，归结为判断它们的差 $a-b$ 的符号（注意是指差的符号，至于差的值究竟是多少，在这里无关紧要），而这又必然归结到实数运算的符号法则. 因此，实数运算的符号法则是学习不等式的基础，可以根据实际情况作简要的复习.

3. 本节的例 1 和例 2 是比较两个代数式的大小. 教学时应指出，比较两个代数式的大小，实际上是比较它们的值的大小，而这又归结为判断它们的差的符号. 在讲这两个例题时，一定要说明代数式字母的取值范围，取值范围是实数集的可以省略不写，但最好强调一下，提醒学生不要忘记字母的取值范围.

4. 关于 $a \geqslant b$ 或 $a \leqslant b$ 的含义.

$a>b$ 或 $a<b$，表示严格的不等式.

$a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$，表示非严格的不等式.

不等式 $a\geqslant b$ 读作“a 大于或者等于 b”，其含义是指“或者 $a>b$，或者 $a=b$”，等价于“a 不小于 b”，即若 $a>b$ 或 $a=b$ 中，有一个正确，则 $a\geqslant b$ 正确.

不等式 $a\leqslant b$ 读作“a 小于或者等于 b”，其含义是指“或者 $a<b$，或者 $a=b$”，等价于“a 不大于 b”，即若 $a<b$ 或 $a=b$ 中，有一个正确，则 $a\leqslant b$ 正确.

5. 定理 1（反对称性）和定理 2（传递性），学生是容易理解的. 但对它们进行证明，却是比较困难的. 一是学生可能认为没有必要进行证明，二是学生可能不知道如何证明. 为了引起重视，养成学生用逻辑推理进行数学证明的习惯，教学时可以向学生提出如下问题：“如果 $a>b$，$\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 谁大?”针对学生回答中可能出现的错误，来说明证明的必要性. 然后，可以让学生回顾一下实数的运算性质与大小顺序之间的关系，以及实数运算的符号法则，最后再引导学生进行证明. 这里要使学生明确证明的依据是实数大小的比较与实数运算的符号法则，要引导学生说清每一步推理的理由和关键性步骤.

6. 定理 3 及其推论，学生也是容易理解的. 在这里应该着重向学生指出：

(1) 定理 3 是不等式移项法则的基础；

(2) 定理 3 的推论是同向不等式相加法则的依据. 它是连续两次运用定理 3，然后由定理 2 证出的. 但两个同向不等式的两边分别相减时，就不能作出一般的结论，这点可以举出反例向学生说明；

(3) 定理 3 可以推广到任意有限个同向不等式的两边分别相加，所得不等式与原不等式同向；

此外，定理 3 的逆命题也正确.

7. 定理 4 有两种不同的结果，学生不易理解，使用时容易出错. 讲解时，可先用具体数，让学生分析比较，得出结论后，再给予一般的证明，对于定理 4 还必须注意：

(1) 其证明过程中的关键步骤是根据“同号相乘得正，异号相乘得负”来完成的；

(2) 要强调 c 的符号，因为符号不同，结论也不同；

(3) 其中 a，b 可以是实数，也可以是式子，不要在强调 c 的符号时，又使学生误解，从而限制 a，b，缩小了定理的应用范围.

8. 定理 4 的推论 1，说明将两边都是正数的两个同向不等式的两边分别相乘，所得不等式与原不等式同向. 教学时要强调指出：

(1) 它是连续两次运用定理 4 先后得出 $ac>bc$，$bc>bd$，再用定理 2 证出的；

(2) 所有的字母都表示正数，如果仅有 $a>b$，$c>d$（而不是 $a>b>0$，$c>d>0$），就推不出 $ac>bd$ 的结论. 同时还要强调，由两个异向不等式，例如 $a>b>0$，$0<c<d$，也推不出 $ac>bd$ 的结论. 这两点可以举出反例向学生说明.

9. 定理 4 的推论 2，教科书中没有给出严格的证明，是把它作为推论 1 的特殊情形给出的. 应注意 n 为大于 1 的正整数这一条件. 例如，当 $a>b>0$，$n=-1$ 时，$a^{-1}>b^{-1}$不成立.

10. 定理 5 的证明用的是反证法. 因为$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$的反面有两种情形，即$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$和$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$，所以不能仅仅否定了$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，就“归谬”了事，而必须进行“穷举”，把这两种情形都否定才能得出$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$正确的结论. 把定理 4 的推论 2 和定理 5 结合起来，还很容易把这一性质推广到正有理指数幂的情形，即如果 $a>b>0$，s 为正有理数，那么 $a^s>b^s$.

11. 教科书中的例 3 和例 4 是用不等式的性质及其推论来证明的. 这可以使学生初步接触不等式的证明，为以后学习不等式的证明打下基础.

讲解这两个例题后，应向学生指出：学完不等式的性质后，就可以利用它们来证明不等式.

12. 在不等式性质的教学中，还要注意将不等式的性质与等式的性质进行类比，特别要指出它们之间的区别，这样可避免解题中的一些错误.

不等式性质与等式性质的不同点主要发生在与数相乘（除）时，不等式两边所乘（除）的数的符号不同，结论是不同的. 应让学生理解这些变化.

6.2 算术平均数与几何平均数

1. 本小节内容包括两个正数的算术平均数与几何平均数的定理及其证明，此定理在解决数学问题和实际问题中的应用.

2. 在公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 以及算术平均数与几何平均数的定理的教学中，要让学生注意以下两点：

（1）$a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 成立的条件是不同的：前者只要求 a，b 都是实数，而后者要求 a，b 都是正数. 例如 $(-1)^2+(-4)^2\geqslant 2\times(-1)\times(-4)$ 成立，而 $\frac{(-1)+(-4)}{2}\geqslant\sqrt{(-1)\times(-4)}$ 不成立.

（2）这两个公式都是带有等号的不等式，因此对其中的“当且仅当……时取‘=’号”这句话的含义要搞清楚. 教学时，要提醒学生从以下两个方面来理解这句话的含义：

当 $a=b$ 时取等号，其含义就是

$$a=b\Rightarrow\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab};$$

仅当 $a=b$ 时取等号，其含义就是

$$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}\Rightarrow a=b.$$

综合起来，其含义就是：$a=b$ 是 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ 的充要条件.

3. 此定理可以进一步引申出定理“n 个（n 是大于 1 的整数）正数的算术平均数不小于它们的几何平均数”（见“小结与复习”前的“阅读材料”）.

$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 的几何意义是“半径不小于半弦”（见教科书中的几何意义及其说明）.

4. 当用公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 证明不等式时，应该使学生认识到，它们本身也是根据不等式的意义、性质或用比较法（将在下一小节学习）证出的. 因此，凡是用它们可以获证的不等式，一般也可以直接根据不等式的意义、性质或用比较法证明.

5. 利用正数的算术平均数与几何平均数之间的关系，我们可以求某些非二次函数的最大值、最小值. 例如教科书第 3 页上的引例，题中的函数 $x+\frac{1\,600}{x}$ 不是二次函数，要求它在定义域（0，$+\infty$）内的最小值，仅用学生过去学过的二次函数的知识是无法解决的，现在从 x 与 $\frac{1\,600}{x}$ 的积为常数（即它们的几何平均数为常数）这一点出发，问题就很容易解决了.

在利用算术平均数与几何平均数的关系求某些函数的最大值、最小值时，应该使学生注意以下两点：

（1）函数式中，各项（必要时，还要考虑常数项）必须都是正数. 例如对于函数式 $x+\frac{1}{x}$，当 $x<0$ 时，不能错误地认为关系式 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$ 成立，并由此得出 $x+\frac{1}{x}$ 的最小值是 2. 事实上，当 $x<0$ 时，$x+$

$\frac{1}{x}$的最大值是-2，这是因为

$$x<0\Rightarrow -x>0,-\frac{1}{x}>0$$

$$\Rightarrow -\left(x+\frac{1}{x}\right)=(-x)+\left(-\frac{1}{x}\right)\geqslant 2$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{x}\leqslant -2.$$

可以看出，最大值是-2，它在$x=-1$时取得.

(2) 函数式中，含变数的各项的和或积必须是常数，并且只有当各项相等时，才能利用算术平均数与几何平均数的关系求某些函数的最大值或最小值.

以上两点都是学生容易疏忽的地方，必须予以注意.

6. 教科书在例2之后解决了本章引例中的问题. 在应用两个正数的算术平均数与几何平均数的定理解决这类实际问题时，要让学生注意：

(1) 先理解题意，设变量，设变量时一般把要求最大值或最小值的变量定为函数；

(2) 建立相应的函数关系式，把实际问题抽象为函数的最大值或最小值问题；

(3) 在定义域内，求出函数的最大值或最小值；

(4) 正确写出答案.

6.3 不等式的证明

1. 这一小节内容较多，既是本章的重点，也是本章的难点. 证明不等式就是要证明所给不等式在给定条件下恒成立. 由于不等式的形式多种多样，所以不等式的证明的方法也就灵活多样，具体问题具体分析是证明不等式的精髓. 本小节教材通过七个例题，分别介绍了证明不等式最常用的方法——比较法、综合法、分析法.

2. 教科书首先指出了比较法的依据，接着通过四个例题介绍了用比较法证明不等式的具体步骤. 在教学时，应强调：

(1) 在证明不等式的各种方法中，比较法是最基本、最重要的方法. 比较法是利用不等式两边的差是正数或负数来证明不等式，因而其应用非常广泛. 在这之前，比较两个数或式子的大小，证明不等式的性质等，都用过这种方法. 在证明算术平均数与几何平均数的定理时也用过这种方法. 因此，要求学生熟练掌握.

(2) 不等式两边的差的符号是正或负，一般必须利用不等式的性质经过变形后，才能判断. 在这里，变形的目的全在于判断差的符号，而不必考虑差的值是多少. 至于怎样变形，教科书作了示范，有的用配方法（例1），有的用通分的方法（例2），有的用因式分解法（例3）等，为此，有时把差变形为一个常数，或者变形为一个常数与一个或几个数的平方和的形式，或者变形为一个分式，或者变形为几个因式的积的形式等. 总之，能够判断出差的符号是正或负即可.

3. 讲完例3后，可以提问，如果取消“$a\neq b$”这个条件，其结论如何.

4. 证明不等式，也可根据不等式的性质和已经证明过的不等式来进行. 这就是用综合法来证明不等式. 在6.1节中证明不等式的性质，第6.2节中证明两个正数的算术平均数与几何平均数的定理时，实际上已用过这种方法. 在讲用综合法证明不等式时，应向学生说明：

(1) 用综合法证明不等式的逻辑关系是：

$$A\Rightarrow B_1\Rightarrow B_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow B_n\Rightarrow B.$$

（已知）（逐步推演不等式成立的必要条件）（结论）

由此可见，综合法是“由因导果”，即由已知条件出发，推导出所要证明的不等式成立.

（2）运用不等式的性质和已证明过的不等式时，要注意它们各自成立的条件，这样才能使推理正确，结论无误.

5. 分析法也是证明不等式时一种常用的基本方法. 当证题不知从何入手时，有时可以运用分析法而获得解决. 特别对于条件简单而结论复杂的题目往往更是行之有效. 另外对于恒等式的证明，也同样可以运用.

用分析法论证“若 A 则 B”这个命题的模式是：

为了证明命题 B 为真，

这只需证明命题 B_1 为真，从而有……

这只需证明命题 B_2 为真，从而又有

……

这只需证明命题 A 为真.

而已知 A 为真，故 B 必真.

可见分析法是“执果索因”，步步寻求上一步成立的充分条件，它与综合法是对立统一的两种方法.

用分析法证明不等式的逻辑关系是：

$$B \Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \cdots \Leftarrow B_n \Leftarrow A.$$

（结论）（步步寻求不等式成立的充分条件）（已知）

6. 有时，我们也可以首先假定所要证明的不等式成立，逐步推出一个已知成立的不等式，只要这个推出过程中的每一步都是可以逆推的，那么就可以断定所给的不等式成立. 这也是用分析法. 注意应强调“以上每一步都可逆”，并说出可逆的根据.

教科书中例 7 所用的方法就是如此. 这是一道不等式证明的实际应用题，教学时，应先让学生分析题意，找出已知条件和要证明的结论，然后，依题意设字母，列出不等式，再进行证明.

7. 分析法是教学中的一个难点，一是难在初学时不易理解它的本质是从结论分析出使结论成立的“充分”条件，二是不易正确使用连接有关（分析推理）步骤的关键词. 如“为了证明”“只需证明”“即”以及“假定……成立”等，一定要在教学中帮助学生克服运用分析法的困难.

8. 一般来说，对于较复杂的不等式，直接运用综合法往往不易入手. 因此，通常用分析法探索证题途径，然后用综合法加以证明，所以分析法和综合法经常是结合在一起使用的.

证明不等式的方法，教科书只介绍了三种基本方法. 教学中，主要应着眼于培养学生的能力，使学生能针对具体问题进行具体分析，灵活地运用各种证法. 对于这几种证明方法，只是为了教学的需要，才把它们分开来讲. 在运用时，不仅可以根据实际情况灵活选择，而且必要时，可以并且应该综合运用它们去证明同一个问题.

6.4 不等式的解法举例

1. 本小节通过二个例题，进一步学习了一元二次不等式、分式不等式、含绝对值不等式的解法.

2. 等与不等是对立统一的两个概念. 研究相等关系，反映在教学上就是证明恒等式与解方程；研究不等关系，反映在教学上就是证明不等式与解不等式. 解方程（组）与解不等式（组）有很多类似之处，也有不少不同之点. 教学时，一方面应指出二者类似之处，以便学生从二者的联系上，建立有关解不等式的类似于解方程的观念；但更应指出二者不同之点，以便学生从二者的区别上掌握解不等式的方法.

3. 解其他各种类型的不等式，关键要善于根据有关性质或定理，把它等价变形为一次、二次不等式

（组）．等价变形过程大体是这样的：如果不等式是超越不等式，则把它等价变形为代数不等式；如果代数不等式是无理不等式，则把它等价变形为有理不等式；如果有理不等式是分式不等式，则把它等价变形为整式不等式；如果整式不等式是高次不等式，则把它等价变形为一次、二次不等式（组）．在教学中特别要强调指出，每一步变形，都应是不等式的等价变形．

4．一元二次不等式，简单的含绝对值不等式，简单的分式不等式的解法，学生在高一时已经学过，在这里则应要求达到正确、熟练的程度．教学时，可先让学生做例1后练习的第1题，或补充一些练习题，以便达到复习、巩固的目的．

5．例1是一个含绝对值不等式．教学时，应先复习解不等式组的思路和含绝对值不等式 $|x|<a$、$|x|>a$ $(a>0)$ 的解法．然后指出，解含绝对值不等式，关键是要把它化为不含绝对值的不等式．在具体求解时，应让学生注意：

（1）先用 x^2-5x+5 替换 $|x|<a(a>0)$ 的解集中的 x，这时，原不等式转化为 $-1<x^2-5x+5<1$，而 $-1<x^2-5x+5<1$ 又可转化为不等式组

$$\begin{cases}x^2-5x+5<1,\\x^2-5x+5>-1.\end{cases}$$

（2）对于上面的不等式组，应分别解出其中的各个一元二次不等式，其解集的交集就是一元二次不等式组的解集．

（3）题目所给的含绝对值不等式的解集，就是上述一元二次不等式组的解集．

6．例2是一个分式不等式．处理这一类问题的基本思路是：在解不等式 $f(x)>0(<0)$ 时，如果 $f(x)$ 可以表示成几个代数式的商或积，那么根据实数运算的符号法则，可以把它等价转化成两个或更多个不等式组（由各因式的符号所有可能的组合决定）．于是原不等式的解集就是各不等式组的解集的并集．解简单的高次不等式的思路也是如此．

教学时，应向学生说明：

（1）把不等式等价转化为不等式组的理由．遇到分式不等式时，应先把不等式化成一边是分式，一边是0的形式，再变形为不等式组（例如习题6.4的第3题的第（2）小题）．

（2）什么时候取并集，什么时候取交集，以及为什么要取交集、为什么要取并集等关键问题．由于各个不等式组的解集是本组各不等式解集的交集，计算较繁，且容易出错，一定要让学生细心．另外，在取交集、并集时，可以利用数轴表示，这样可避免出错．

（3）对于分式不等式，不能用在不等式的两边同乘各分式的公分母，化成整式不等式的方法来解不等式．例如 $\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0$ 不能变形为 $x^2-3x+2<0$．其理由可让学生自己说明．

6.5 含有绝对值的不等式

1．本小节的内容是含绝对值不等式的一个定理及其证明．

2．本小节的定理是含绝对值不等式的一个重要性质，在以后解决各类含绝对值不等式的问题时经常用到，一定要让学生掌握．对于这个定理的证明，学生可能不易接受．为此，教学时要注意：

（1）讲清楚为什么 $|x|=|-x|$，$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$．

（2）此定理实际上包括两部分，即

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|; \qquad ①$$

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|. \qquad ②$$

而②式与$|a|\leqslant|a+b|+|b|$等价，再把它改写成

$$|(a+b)+(-b)|\leqslant|a+b|+|-b|$$

以后，就可发现本质上与①式一样，所以主要是证明①式.

(3) 为了加深对定理的理解，可以向学生指出：定理的左、中、右三部分中，右边是绝对值的和，肯定是非负的；中间是和的绝对值，可能因为a，b一正一负要抵消一部分，但由于是绝对值，仍是非负的；左边是绝对值的差，当$b\neq0$时，肯定要抵消一部分，而且还可能是负的. 这样大、中、小的关系也就容易理解与记忆了. 至于其中的等号在什么情况下成立，问题比较复杂（特别是左面部分中的等号），不必要求学生掌握，以免增加负担.

还应该指出，此定理在后面学习复数时，可以推广到比较复数的模长，并有其几何意义.

3. 推论1还可以推广到n（n是大于2的自然数）个数（或式）的和的绝对值小于或等于这n个数的绝对值的和.

推论2与定理虽然形式上有所不同，但实质上是等价的. 因为这里a，b是任意实数，所以只要用$-b$代替b，就可以由其中任一个推得另一个，因此推论2不必要求学生记忆.

4. 教科书中的三道例题，都是讲含绝对值不等式的证明.

在例1中，还有意使用了字母“ε”，其目的是为学生以后学习微积分作点准备.

例2、例3中，都没有使用到刚学过的含绝对值不等式的定理，而是用绝对值的性质、不等式的性质、算术平均数与几何平均数的定理证得的. 这又一次说明，证明不等式的方法是多样的，一定要灵活掌握.

阅读材料　n个正数的算术平均数与几何平均数

1. 本阅读材料介绍了$n(n\geqslant2)$个正数的算术平均数与几何平均数的公式.

2. 阅读这篇材料时，应注意：

(1) 先复习两个正数的算术平均数与几何平均数的定理；

(2) $n(n\geqslant2)$个正数的算术平均数与几何平均数的公式，都是两个正数的算术平均数与几何平均数的定理的推广，它们在证明不等式和解决有关最大值与最小值的实际问题中都有着重要的应用；

(3) 要正确理解公式成立的条件以及公式中“当且仅当……时取‘＝’号”这句话的含义.

小结与复习

1. 小结与复习分为三个部分：第一部分概括了本章学过的主要内容，包括不等式的性质，证明不等式的依据等；第二部分分别提出了学习本章的五条学习要求和学习中需要注意的几个问题；第三部分给出

了两道参考例题.

2. 复习本章时，应与以前学过的知识（如初一学过的不等式的基本性质，解一元一次不等式与一元一次不等式组，高一学过的解一元二次不等式、简单的分式不等式和含绝对值不等式等）联系起来进行，这样才能使学生对不等式有较完整的认识.

3. 本章的参考例题仅供教师选用，复习时，可以根据学生学习的实际进行调整.

Ⅲ 习题参考解答

练习（第5页）

1. $\because \quad (x+5)(x+7)-(x+6)^2$
$=(x^2+12x+35)-(x^2+12x+36)$
$=-1<0$,
$\therefore \quad (x+5)(x+7)<(x+6)^2$.

2. $\because \quad (\sqrt{x}-1)^2-(\sqrt{x}+1)^2$
$=x-2\sqrt{x}+1-x-2\sqrt{x}-1$
$=-4\sqrt{x}$,
由 $x>0$，知$\sqrt{x}>0$，所以$-4\sqrt{x}<0$.
$\therefore \quad (\sqrt{x}-1)^2<(\sqrt{x}+1)^2$.

3. 因为
$$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)-(a^2+a+1)(a^2-a+1)$$
$$=[(a^2+1)^2-(\sqrt{2}a)^2]-[(a^2+1)^2-a^2]=-a^2,$$
由 $a\neq 0$，知$-a^2$ 是一个负数，所以
$$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)<(a^2+a+1)(a^2-a+1).$$

练习（第7页）

1. (1) 真命题.
(2) 假命题. 因为如果 $c<0$，那么$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.
(3) 假命题. 因为如果 $c<0$，那么 $a>b$.
(4) 真命题.

2. (1) 不能断定；　　(2) 不能断定；
(3) 不能推出；　　(4) 不能推出.
(举例略)

3. (1) $\because \quad a>b$,

$\therefore\ a-d>b-d;$

又 $c>d$，

$\therefore\ -d>-c$，

$b-d>b-c.$

$\therefore\ a-d>b-c.$

(2) $\because\ a>b, ab>0$，

两边同乘正数$\frac{1}{ab}$，得

$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，

$\therefore\ \frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$

(3) $\because\ a>b>0, c<d<0$，

$\therefore\ ac<bc$，

$bc<bd.$

$\therefore\ ac<bd.$

(4) $\because\ a>b$，

$\therefore\ -2a<-2b.$

$\therefore\ c-2a<c-2b.$

习题 6.1

1. $\because\ (2a+1)(a-3)-[(a-6)(2a+7)+45]$

$=2a^2-5a-3-(2a^2-5a+3)$

$=-6<0$，

$\therefore\ (2a+1)(a-3)<(a-6)(2a+7)+45.$

2. $\because\ (x+1)\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)$

$=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1-\left(x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}>0$，

$\therefore\ (x+1)\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)>\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1).$

3. $\because\ x^3-(x^2-x+1)$

$=x^3-x^2+x-1$

$=x^2(x-1)+(x-1)$

$=(x^2+1)(x-1)$，

且由 $x\geqslant 1$ 知，$(x^2+1)(x-1)\geqslant 0$，

$\therefore\ x^3\geqslant x^2-x+1.$

4. (1) $<$； (2) $>$；

(3) $<$； (4) $>,>$.

5. (1) $\because \quad a>b, c>0$,

$\therefore \quad -ac<-bc$.

又 $\quad f<e$,

$\therefore \quad f-ac<e-bc$.

(2) $\because \quad a>b>0, ab>0$,

$\therefore \quad 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

$\therefore \quad \frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$.

(3) $\because \quad c>d>0$,

$\therefore \quad \frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$.

又 $\quad a>b>0$,

$\therefore \quad \frac{a}{d}>\frac{b}{c}>0$.

$\therefore \quad \sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

*6. 由 $30<x<42, 16<y<24$,可得

$-48<-2y<-32$,

$\frac{1}{24}<\frac{1}{y}<\frac{1}{16}$.

$\therefore \quad 30+16<x+y<42+24$,

即 $\quad 46<x+y<66$;

$30-48<x-2y<42-32$,

即 $\quad -18<x-2y<10$;

$\frac{30}{24}<\frac{x}{y}<\frac{42}{16}$,

即 $\quad \frac{5}{4}<\frac{x}{y}<\frac{21}{8}$.

练习(第 11 页)

1. 由 $a>0, b>0, c>0$,可知

$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,

$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$,

$c+a\geqslant 2\sqrt{ac}$,

$\therefore \quad (a+b)(b+c)(c+a)$

$\geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}$

$=8abc$.

2. 由 $x>0, y>0$,可知:

(1) $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=2$;

(2) $(x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3)$

$\geqslant 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{x^2y^2}\cdot 2\sqrt{x^3y^3}$

$=8x^3y^3$.

3. ∵ $x^2+\frac{81}{x^2}\geqslant 2\sqrt{x^2\cdot\frac{81}{x^2}}=18$,

∴ 当且仅当 $x^2=\frac{81}{x^2}$，即 $x=\pm 3$ 时，$x^2+\frac{81}{x^2}$ 的值最小，最小值是 18.

4. 设矩形中与墙相对的边长为 x m，则另一边为 $\frac{L-x}{2}$ m，面积为

$$\frac{x(L-x)}{2}=\frac{(\sqrt{x}\cdot\sqrt{L-x})^2}{2}$$

$$\leqslant\frac{\left(\frac{x+L-x}{2}\right)^2}{2}=\frac{L^2}{8}(\mathrm{m}^2).$$

当且仅当 $x=L-x$，即 $x=\frac{L}{2}$(m)时，矩形的面积最大. 也就是菜园的长为 $\frac{L}{2}$ m，宽为 $\frac{L}{4}$ m 时，菜园的面积最大，最大面积为 $\frac{L^2}{8}$ m^2.

习题 6.2

1. ∵ $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\leqslant\frac{a^2+(a^2+b^2)+b^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{2}$,

∴ $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$.

(用比较法也可)

2. ∵ $a\neq b, a>0, b>0$,

∴ $a+b>2\sqrt{ab}$,

∴ $\frac{2ab}{a+b}<\frac{2ab}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$.

3. 当 $a>0, b>0$ 时，显然有

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}.$$

现证 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$.

∵ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$,

∴ $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{ab}}}$,

即 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$.

由第 1 题的结果，可知