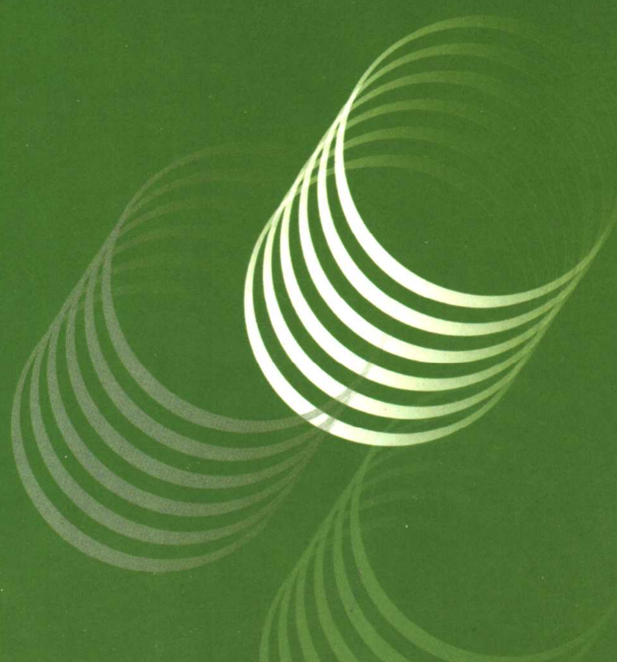
高等学校教材

TANXING LIXUE

弹性力学

王光钦　丁桂保
刘长虹　杨　杰　编



中国铁道出版社

·西南交通大学出版基金资助出版

高 等 学 校 教 材

弹 性 力 学

王光钦 丁桂保 刘长虹 杨 杰 编
陈 虬 审

中 国 铁 道 出 版 社
2004年·北京

内 容 简 介

本书共分十二章，主要内容包括：弹性力学基本方程的建立，应力、应变与本构理论及平面问题、空间问题与扭转问题等基本内容；述及弹性力学问题的微分方程方法、变分方法与复变函数方法及直角坐标解法与曲线坐标解法；弹性力学的哈密顿求解体系等。

本书可供高等学校土木类、机械类相关专业以及力学专业的本科生和研究生使用，还可供相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学/王光钦等编 .—北京：中国铁道出版社，2004.3

ISBN 7-113-05716-0

Ⅰ. 弹… Ⅱ. 王… Ⅲ. 弹性力学 Ⅳ. O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 006684 号

书　　名：弹性力学
作　　者：王光钦　丁桂保　刘长虹　杨　杰　编
出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑：程东海
封面设计：石碧容
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
开　　本：787×1092　1/16　印张：18.5　字数：456 千
版　　本：2004 年 4 月第 1 版　2004 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：1～2 000 册
书　　号：ISBN 7-113-05716-0/O·120
定　　价：35.00 元

前　言

弹性力学是工科力学及工程类相关专业的重要技术基础课程。弹性力学教学内容体系大体上可以划分为两大类：

1. 一般到特殊的课程体系。这种体系一开始就全面阐述应力理论、应变理论和本构关系，其理论系统性强，但起点较高，难点集中，入门难度较大。

2. 特殊到一般的课程体系。它是以弹性力学分类问题为线索编排的，先讲平面问题，然后再讲空间问题，扭转问题等其他问题。平面问题是二维的，起点相对较低，相应的概念比较容易建立。但是，其每类问题都是独立讨论自成体系的，不易把握它们的内在联系。

弹性力学的 15 个基本方程和相应的边界条件构成了弹性力学的基本理论框架，由此可以演绎出其他的描述方法及与各类问题相应的各种求解方法。这一部分内容只涉及到一些简单的平衡关系和几何分析，容易推导。因此，本教材尝试将弹性力学的基本理论框架从弹性力学理论体系中分离出来，形成一套新的内容体系，以求在保证理论系统性的同时，尽量做到由浅入深，由易到难，循序渐进，逐渐展开。

本书的目的是为工程类相关专业研究生和力学专业本科生提供一本难度适中的实用教材。该教材较全面论述弹性力学基本概念、基本理论和基本方法；力求反映弹性力学最新研究成果。本教材共分 12 章，包括弹性力学基本方程的建立，应力、应变与本构理论及平面问题、空间问题与扭转问题等基本内容；述及弹性力学问题的微分方程方法、变分方法与复变函数方法及直角坐标解法与曲线坐标解法。本教材较全面地阐述了弹性力学的经典拉格朗日体系，并适当介绍了弹性力学的最新研究成果——哈密顿新求解体系。在数学工具方面有微分方程、复变函数、变分法、笛卡尔张量及辛数学等。我们注意到，相当一部分读者不具有这方面的系统知识，在编排时特将有关数学基础穿插在相关章节的前面，以便于读者自学和教师组织教学。

本书主要特点：

1. 将弹性力学基本理论框架从弹性力学体系中剥离出来，作为弹性理论展开的发源点和支撑点，既给分类问题的展开创造了条件，又为理论的系统性阐述留有适当空间。

2. 以各类问题的特点为先导，形成各类问题特定的理论提法和解法。在内容安排上，力求由浅入深，由易到难。

3. 在了解弹性力学的基本概念和平面问题求解方法的基础上，集中阐述应力、应变理论和应力-应变关系，既照顾到理论体系的完整性，又达到难点分散，循序渐进的目的。

4. 适当地引入笛卡尔张量工具，既使推导简化，又为读者阅读文献和进一步学习打下基础。

5. 半逆解法是经典弹性力学理论的主流解法，有很大的局限性，本教材尝试编入 Hamilton新求解体系，以突破传统方法的约束，而给读者以新的概念和新的视野。

本书的读者对象主要是土木类、机械类相关专业研究生和力学专业本科生。本书前四章

亦可供工程类相关专业本科生选用，对力学专业研究生和工程技术人员也有一定参考价值。

本书分工如下：第一、二、五、九章由王光钦编写，第三章由杨杰和王光钦共同编写，第四章由杨杰编写，第六章由王光钦和丁桂保共同编写，第七、八、十章由丁桂保编写，第十一、十二章由刘长虹编写。全书由王光钦修改、定稿，陈虬教授主审。

本书由西南交通大学出版基金资助出版，在编写过程中得到西南交通大学教务处、应用力学与工程系及工程力学教研室的大力支持，弹性力学课程教学内容体系的探讨曾列为西南交通大学教改项目，特此鸣谢。

由于编者水平所限，成稿时间较短，错误之处在所难免，恳望有关专家及读者批评指正。

编　者

二〇〇四年二月

目　录

第一章　绪　　论

§1-1　弹性力学的任务和研究对象

弹性力学又称弹性理论，是固体力学的一个分支。它研究弹性体由于载荷作用而引起的内力状态和变形规律。这里的载荷是指机械力、温度、电磁力等各种能导致物体变形和产生内力的物理因素；这里的弹性体是指区别于理论力学中的刚体的一种可变形体，卸载后能完全恢复其初始形态和尺寸。在掌握了物体的内力和变形规律以后，就不难确定结构构件和机器零件的强度、刚度和稳定性，从而达到改进结构和零件设计的目的。

弹性力学与材料力学就基本任务而言是相同的，但它们研究的对象却不尽相同。由于研究对象上的差异，决定了它们要采用不同的研究方法，即便是对于同一个问题，一般地会得到不同的结果，且弹性力学研究问题比材料力学要更深入和更精确。

弹性力学研究的对象包括杆件、板、壳和实体结构(如挡土墙、水坝、地基等)。

杆件是材料力学的主要研究对象，具有细而长的几何特征。杆件的拉压、弯曲、扭转是材料力学研究的几个主要内容。在材料力学中除了必要的基本假设之外，为了简化问题，根据实验观察，还引用了附加的变形假设或附加的应力假设。这样，必然会在结果中产生误差。弹性力学求解这类问题不引进任何附加假设，按照严格的微分方程的边值问题进行求解，所得的解是精确解。对比弹性力学与材料力学的结果，可以确定出材料力学附加假设所带来的局限性。

首先，我们来考察一下变截面杆的拉伸问题[图 1-1(a)]。在研究等截面直杆拉伸时，材料力学引用了平面假设，即横截面变形前为平面，变形后仍为平面。在此假设下推论出横截面上应力均匀分布，并认为纵向纤维间无挤压。变截面杆拉伸时，沿用等截面直杆拉伸的结果，认为横截面应力也是均匀分布的[图 1-1(b)]，纤维间也互不挤压。按照这一假设，在杆的侧面上取出一个微元体，如图 1-1(c)所示。显然，微元体不满足平衡条件，因而是不正确的。要满足平衡条件，微元体的受力应如图 1-1(d)所示，这只有通过弹性力学方法才能求解。弹性力学的求解结果表明，只有当斜角 α 很小时，即接近于等直杆时，材料力学的结果才有被引用的价值。

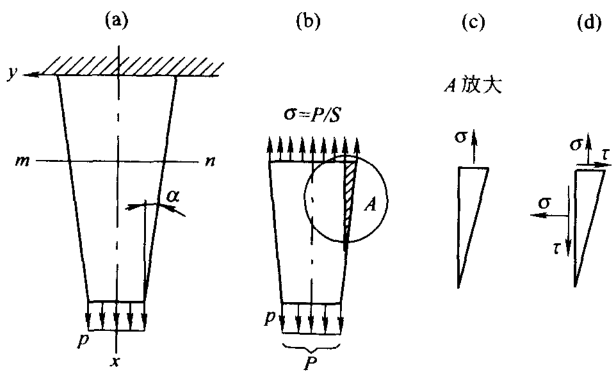


图 1-1

其次，考察均布载荷作用下的简支梁[图 1-2(a)]。对于纯弯曲问题，材料力学引用平面假设，即梁受力弯曲后，横截面保持为平面，且垂直于梁变形后的轴线。在物理性能方面，也认为纵向纤维间无挤压。对横力弯曲问题分两步求解，首先按纯弯曲梁的求解方法，计算横截面上的正应力(σ_x)，结果为线性分布；再在纵向纤维挤压应力 $\sigma_y=0$ 的假设前提下，根据体元的平衡条件，推出剪应力(τ_{xy})为二次抛物线分布，如图 1-2(b)所示。图(b)中还绘出弹性力学的求解结果：横截面上的正应力 σ_x 为 y 的三次曲线；纵向纤维的挤压应力 σ_y 也为 y 的三次曲线分布；而剪应力解，则两者完全相同。严格地讲，在横力弯曲中，由于剪应力的存在横截面要发生翘曲，平面假设已不成立；而横向力的存在本身就意味着纵向纤维的挤压并不为零。与弹性力学精确解比较，当梁的高跨比 $h/l \leqslant 1/5$ 时，材料力学的结果可以认为是足够精确的。对于深梁问题，如图 1-3 所示正方形薄板受均布载荷作用，此时只能用弹性力学方法求解。在图 1-3 中还表示了对称面上正应力分布曲线，A 点处，弹性力学的解为 $\sigma=1.84q$，如果用材料力学方法求解则为 $\sigma=0.75q$，误差为 145%。

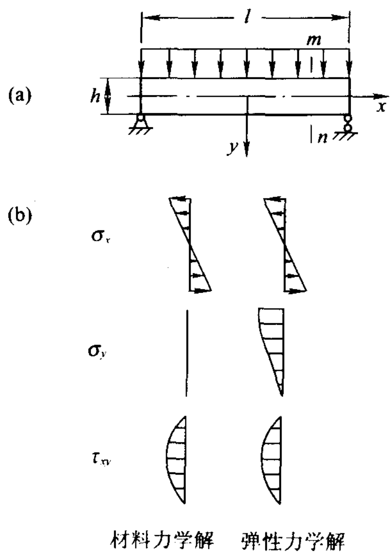


图　1-2

最后，考察非圆截面杆的扭转。借助于平面假设，材料力学研究了圆截面杆的扭转问题，弹性力学解证明了材料力学解是精确的。但非圆截面杆扭转时，横截面要发生翘曲，即平面截面假设不成立。因此，材料力学的方法已失去应用的前提，而必须采用弹性力学方法。

工程上广泛遇到的板、壳及实体结构，已超出了材料力学的研究范围，而只能在弹性力学中加以解决。

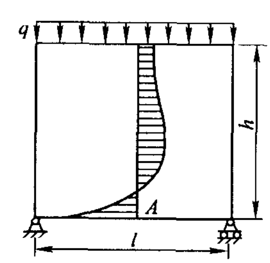


图　1-3

§1-2　弹性力学基本假设

构件或零件是由物质组成的，而物质在构成和性质上是千差万别的。人们在进行零件、构件的内力和变形分析时不可能对问题的每一个细节都加以考虑，而只能按照事物的主要方面进行分析。同时，为了使问题简化，达到数学上容易处理的程度，不得不设定一些前提条件。建立在这种理想化模型基础上的理论，自然也就决定了它所提供解答的适用范围。本书所讨论的问题属于经典弹性力学的范畴，它建立在如下基本假设的基础上：

1. 连续性假设

认为组成物体的介质充满了物体所占的空间，物体中不存在任何间隙。

真实的物质构成是非连续的。微观物理学上已证明，物质是由原子、分子组成，而原子与原子间，分子与分子间是存在着间隙的。固体力学的研究方法是唯象学的方法。它观察宏观现象，并又将其结果用于宏观世界。在进行宏观结构分析时，已无须去涉及微观结构的信息。因此可将物体抽象为连续介质。宏观的物体与微观的粒子之间，显然在结构尺寸上有“粒子间

的间隙远小物体尺寸"的几何特征。类似地，在处理工程问题时，由于研究问题的尺度不同，是否作为连续介质处理，常常根据相对尺寸作出判断。例如，岩体存在着各种各样的不连续面（微裂隙、片理、页理、节理），而作为地基的岩体中的一般微观、亚微观不连续面可以忽略不计，当作连续介质处理。实验观察和运用这一假设导出的结论表明，这一假设是合理的。

按照连续性假设，介质连续化以后，赖以进行强度、刚度和稳定性分析的各种力学参量，比如应力、应变、位移、能量密度等都可以写成坐标的函数，可以运用数学分析中的连续和极限的概念。

2. 均匀性假设

指物体内的每一点都具有相同的力学性质。显然，满足均匀性假设的物体，其材料的力学性质与坐标无关。这样，由物体的某一部分测得的材料性能，对整个物体都适用。

如果物体由同一种材料组成，显然，物体是均匀的。金属材料都可以看作是均匀的。如果物体由两种或两种以上材料组成，只要混合均匀，而且每种材料颗粒尺寸远小于物体尺寸，则宏观上可以认为每点具有相同的力学性质，即宏观上，它是均匀的。比如，混凝土本身为非均质材料。它由水泥、砂和骨料组成，假如不计不同组份交界面上的局部应力，就可以采用在足够大的材料试件上测得的材料参数来代表物体的该参数值。

3. 各向同性假设

指物体内一点的各个方向上的力学性质相同。实际应用的金属材料，绝大多数是多晶体，它由大量的小晶体组成，晶体的尺度与结晶过程中的冷却速度有关，一般晶粒大小从几微米到几厘米。单晶体由于其内部原子排列的位相基本上是一致的，因而呈现各向异性，而多晶体则是由很多微小单晶体杂乱无章地组合而成。因此，多晶体各方向上的性能是单晶体不同方向性能的综合平均值，即当晶粒尺寸远小于物体尺寸时，在宏观上，多晶体就是各向同性的。但是木材、复合材料、地壳结构等必须考虑各向异性。

从以上分析可以看出，无论是连续性假设，还是均匀性假设或各向同性假设，代表材料宏观性质的体元尺寸应该足够大。

4. 完全弹性假设

所谓完全弹性就是物体在载荷作用下发生变形，当这些载荷拆除以后物体能完全恢复到原来的形状和大小，而没有任何残余变形。其应力、应变是一一对应的。它包括线性弹性和非线性弹性，如图 1-4(a)。有一部分材料，当应力较小时表现为线性弹性，而当应力超过弹性极限(σ_e)后表现为非线性弹性，见图 1-4(b)。经典弹性理论研究线性弹性材料。

凡符合以上 4 个假设的物体，称为理想弹性体。

5. 小变形假设

假定物体内各点在载荷作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸，因而应变分量和转角都远小于 1。应用这一假设，可使问题大为简化。例如，在研究物体受力平衡时，可以不考虑由于变形引起的物体尺寸和方位的变化，即按变形前的几何尺寸及载荷状态进行计算。又如，在研究物体的形变和位移时，可以略去应变和转角的二次幂或二次乘积及其以上的项。这样，在小变形条件下，弹性力学的全部基本方程（包括应力-应变关系）都是线性方程，因此，在求解弹性力学问题时，可以采

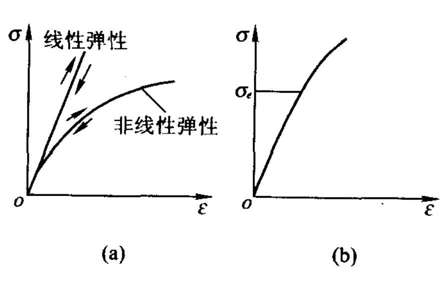


图 1-4

用迭加原理。

6. 无初应力假设

假定物体的初始状态为自然状态，即载荷作用以前物体内没有应力。由载荷引起的应力称为附加应力，弹性力学只研究这部分附加应力，为了方便，以后简称应力。

当初应力存在时，在不违反迭加原理的前提下，物体内实际应力等于初应力加上附加应力。在焊接结构中，初应力一般是有害的。而在土建工程中，却常常采用一些预应力结构，以便更充分地利用材料。

上述基本假设中，小变形假设属几何假设，其余为物理假设。

以上述基本假设为基础建立的固体力学理论，称为线性弹性理论，简称弹性理论或弹性力学。它发展较早、理论严密、体系较完整，在工程实践中有广泛应用。

§1-3 弹性力学的研究方法

学过理论力学，我们已经知道，对机械运动的描述分为静力学、运动学和动力学三大部分。静力学研究处于静止状态物体的力的平衡条件；运动学研究物体运动的几何性质及运动规律；动力学则研究物体的机械运动与物体相互作用力之间的关系。引入的基本力学参量包括力、速度和质量。弹性体与刚体不同，它是可变形固体。但是，弹性体的机械运动仍然必须遵从机械运动的普遍规律。如果把弹性体视为由无穷多个质点组成的质点系，那么，在机械运动中的力就应该包括质点与质点相互作用的内力。作为物体变形的描述，在变形体力学中引入了应变的概念，则内力与变形之间应该满足的关系，就成为变形体力学必须满足的基本关系之一。因此，变形体机械运动应该满足的基本方程包括静力学（动力学问题可根据达朗伯原理按静力学问题处理）、几何学、物理学 3 个方面。材料力学已经按这 3 个方面建立了自己的理论体系，弹性力学也将从这 3 个方面着手建立起自己的理论框架。

如果仅根据上节的基本假设，用严格的数学推演方法来建立理论体系和求解弹性力学问题，这样的弹性力学称为数学弹性力学。本书的内容属于数学弹性力学。如果像材料力学一样，在引入基本假设的同时，还引入变形和应力附加假设的，称为应用弹性力学。比如，在薄板、薄壳问题中有直法线假定。附加假设的引入，使得由数学弹性力学建立的基本方程得到简化。

材料力学在几何方面研究总体的变形，它通过变形假设将问题转化为简单拉压或纯剪切问题；静力学方面，则按分离体平衡，建立起内力与载荷间的积分形式的平衡方程；物理方面则忽略次要的应力，而直接运用 Hooke 定律。弹性力学却不相同，它以一点处的变形、一点处力的平衡及一点处的力与变形的关系为出发点。在几何方面，根据运动变形分析得到一点处的几何方程；静力学方面，则是在一点附近取出一个微元体，研究微元体的平衡，得到该点处的微分形式平衡方程；而物理方面，则引用广义 Hooke 定律。由此建立的一组方程，称为弹性力学的基本方程，它是一组偏微分方程。按照数学理论，可以在给定的边界条件下进行求解。这就是所谓的微分方程边值问题，是弹性力学问题的一种提法。弹性力学问题的另一种提法是泛函的极值问题，即所谓的变分问题。

由于实际结构和载荷的复杂性，能够用严格的数学方法求解的问题非常有限。因此，在求解方法上除了解析法以外，还广泛采用了有限差分法、有限单元法、加权残值法、边界单元法等数值方法，以及电测法、光测法等实验方法。

§1-4　弹性力学的发展简史

弹性力学是在不断解决工程实际问题的过程中得到发展的，大致可以分为以下 4 个时期：

弹性力学理论的萌芽时期　大约经过了 150～160 年的时间，反映了 17～18 世纪资本主义萌芽到开始兴盛时期，水利、造船、机械、军事等生产技术上的需要，是材料力学理论形成和发展的时期。材料力学作为一门科学，一般认为是在 1638 年从意大利科学家伽利略(G.Galileo)时期开始的。为了解决造船和水闸问题，他发表了《两种新科学的叙述与数学证明》一书，第一次提出了梁的弯曲问题及强度计算的概念。1678 年，美国科学家虎克(R.Hooke)在大量实验的基础上，发现了弹性体变形与所受外力成正比的规律。后来，人们称之为 Hooke 定律。此前，他已利用这一关系发明了弹簧，并取代了旧时钟用的重力摆。1680 年，马略特(Mariotte)给出了梁的应力分布，并确定了中性轴的位置。17 世纪末，伯努利(Bernoulli)提出了弹性杆挠曲线的概念；1705 年，他又给出了梁的变形几何假设(平面假设)和弯曲公式。1738 年，瑞士科学家欧拉(Euler)和伯努利得出了梁的方程。1757 年，欧拉又给出压杆稳定公式。法国科学家库仑(Coulomb)1773 年提出了强度理论，1776 年完成了矩形截面梁弯曲的完整理论，1784 年建立了圆轴扭转理论。1807 年，英国科学家杨(Young)给出了弹性模量。

在这一时期，变形体力学的发展虽然都属于材料力学的范畴，但所提出的应力、应变的概念及研究成果为弹性力学理论的建立奠定了坚实的基础。

弹性力学理论基础建立期　到 18 世纪末，工业革命以后，制造业和交通运输业的迅速发展提出了各种各样更加复杂的强度和应力分析问题，例如应力集中问题，平面板件结构的应力分析，非圆截面杆的扭转等。材料力学所依据的理论和方法已经不适用了。同时期，数学理论的发展取得了辉煌的成就，为弹性力学理论的建立提供了有力的工具。

1821 年，法国工程师、桥梁专家纳维叶(Navier)通过对弹性体研究，从牛顿(I.Newton)关于物质构造的概念出发，第一个建立了弹性体平衡(运动)微分方程。1822～1828 年期间，著名数学家柯西(Cauchy)发表了一系列论文，提出了关于一点应变的概念，把一点附近的变形通过 6 个应变分量表示，并导出了运动方程。1828 年，著名数学家泊松(Poisson)又进一步完善了弹性力学的基本方程。在随后的几十年间，对于各向异性和各向同性体的独立弹性系数的个数及泊松比的取值有过长期争论。后来的大量实验，使格林(Green)从能量观点出发得到的应力-应变关系得到普遍承认。1852 年，拉梅(Lamé)出版了第一部关于弹性理论的著作，标志了弹性力学理论框架的形成。

弹性力学理论的发展成熟期　在这个时期，提出了弹性力学的各种解析方法和近似求解方法，并解决了大量的工程实际问题，在理论上也更臻完善。

1855 年，法国的圣维南(Saint Venant)解决了柱体的自由扭转和弯曲问题，并提出了局部性原理(圣维南原理)。1862 年，艾里(Airy)提出了求解平面问题的应力函数方法。1882 年，赫芝(Hertz)解决了接触问题。19 世纪 50 年代，英国麦克斯威尔(J.C.Maxwell)发展了光测弹性应力分析技术，又于 1864 年对只有两个力的简单情况提出了功的互等定理。随后，意大利贝蒂(E.Betti)在 1872 年对该定理作了普遍证明。1850 年，克希霍夫(G.Kirchhoff)解决了平板的平衡和振动问题。1873 年，卡斯提利亚诺(A.Castigliano)提出了卡氏第一和第二定理。1884 年，法国的恩格塞(F.Engesser)提出了余能的概念。1877 年和 1908 年，瑞利(Raylengh)和里兹(W.Ritz)从弹性力学虚功原理和最小势能原理出发提出了后来被称为瑞利-里兹法的

变分问题直接解法。另一个有名的近似解法——伽辽金法是由伽辽金(Галёркин)于 1915 年提出的。20 世纪 30 年代,穆斯海里什维里(Мусхелищвили)发展了弹性力学问题的复变函数求解方法。

弹性力学理论发展的深化期 在这个时期,弹性力学由线性理论向非线性理论发展;另外,随着电子计算机的问世和广泛应用,以变分原理为基础的有限单元法已成为解决工程技术问题和进行科学研究的不可或缺的技术手段;反过来,有限元技术的发展,又推动了变分原理的研究。随着自然科学理论的深入研究,新兴边缘,交叉学科不断涌现,既丰富了弹性力学理论的内容,又体现了它在认识自然规律中不可低估的作用。

1907 年,冯·卡门(Von Karman)提出了薄板大挠度问题。1939 年,冯·卡门和钱学森提出了薄壳的非线性稳定问题。1948～1957 年,钱伟长用摄动法处理了薄板大挠度问题。1954 年和 1955 年,胡海昌和鹫津久一郎分别独立地提出了三类变量的广义变分原理,学术界通常为胡海昌-鹫津久一郎变分原理。1956 年,泰勒(Turner)和克劳夫(Clough)等在分析飞机结构时,首次用三角形单元求得平面应力问题的正确解。1960 年,克劳夫第一次提出了"有限单元法"的名称,开创了有限元的理论和应用研究。钱伟长在 1964～1983 年期间,研究并提出了建立广义变分原理的拉氏乘子法。而拉氏乘子法最早见诸于 1975 年鹫津久一郎的《弹性和塑性力学中的变分法》一书中。

在这个时期中,各向异性弹性理论、非线性弹性理论、热弹性理论、气动弹性理论、粘弹性理论、线弹性断裂力学等弹性理论的交叉学科都得到了蓬勃发展。同时,弹性理论也渗透到物理学、医学、地学等基础学科的研究中。

习 题

1-1 在弹性力学研究的范围内,变形前连续的物体、变形后是否允许出现重叠或产生裂缝?

1-2 土体是由固体颗粒、水和气体三相物质组成的碎散颗粒集合体,是否是连续介质?在建筑物地基沉降问题中,可否作为连续介质处理?

1-3 "单一成分构成的物体是均匀体,也是各向同性体",此话是否正确?

1-4 一般混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体?一般的岩质地基和土质地基能否作为理想弹性体?

1-5 在材料力学问题中,有一类材料称为弹塑性材料,其应力-应变关系也是非线性的,它与非线性弹性有何区别?理想化的弹塑性材料模型主要有哪几类?

1-6 试按分离体平衡条件,列出图 1-1(d)所示微三角元的平衡方程。

第二章　弹性力学的基本方程和一般定理

由于弹性力学的研究对象已由材料力学的单一杆件拓展为一般几何形状的弹性体，对于任意形状物体在任意载荷作用下的几何变形一般就不再具有像杆件拉压、弯曲和扭转时的简单规律，只有通过对每一点的运动分析，才可能建立起相应的几何关系。而正因为几何变形的复杂性，截面上的应力分布已不可能通过变形假设，并辅以 Hooke 定律来加以简单推断，此时用截面法建立的内力与外力的关系(积分形式的平衡方程)就很难用于对每一点的应力大小的计算。于是，不得不研究每一点的平衡状态。再者，一般地，物体的变形已不是单纯的拉压或剪切，因此，Hooke 定律已不能简单地加以应用。本章将依据上述特点，仍然从静力学、几何和物理 3 个方面着手，建立起弹性力学的基本方程及边界条件。并且，为了后面的理论分析和问题求解的需要，还将给出几个弹性力学的最一般的原理。

§2-1　载荷　应力

1. 载荷及其分类

凡是能导致物体变形和产生内力的物理因素都称为载荷。载荷可分为两大类：

第一类载荷：如重力、机械力和电磁力，称为外力。它直接施加在物体上引起物体的变形与内力。

第二类载荷：如温度、中子辐照等物理因素，它直接引起物体变形，仅当变形受到约束(物体内部自身的约束或外部约束)时，物体内才产生内力。

按作用区域的不同，外力又分为体积力和表面力。

体积力，简称体力，分布在物体的体积内，作用在物体内的所有质点上，例如重力、惯性力、电磁力等。

物体内部各质点受到的体力，一般来说是不同的，即体力是空间点位的函数，通常用体力矢量

$$\boldsymbol{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta V}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}V} \tag{1}$$

来表示。其中 ΔV 为受体力作用的微元体体积(图 2-1)，$\Delta \boldsymbol{F}$ 为作用在微元体各质点上体力的合力。$\Delta \boldsymbol{F}/\Delta V$ 表示了体元体力的平均集度，当 ΔV 不断缩小而趋于点 A 时，$\Delta \boldsymbol{F}/\Delta V$ 也不断改变大小和方向，其极限就是 A 点体力的集度，如式(1)所示。用 F_x、F_y、F_z 表示体力矢量沿坐标轴 x、y、z 方向的分量，并规定沿坐标轴的正方向为正，反之为负。由体力的定义可知，体力的量纲是 [力][长度]$^{-3}$。

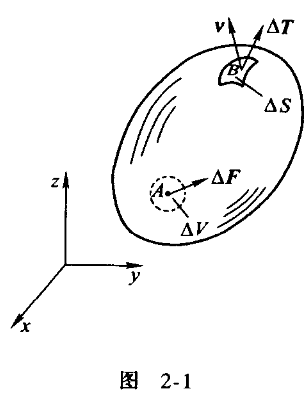


图　2-1

表面力，顾名思义，是作用在物体表面上的外力，简称面力。例如，液体或气体的压力，固

体间的接触力等,通常用面力矢量

$$\boldsymbol{T}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{T}}{\Delta S}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}S} \tag{2}$$

来表示。其中 ΔS 为受面力作用微面元的面积(图 2-1),$\Delta \boldsymbol{T}$ 为作用在 ΔS 上面力的合力,当 ΔS 不断缩小而趋于 B 点时,$\Delta \boldsymbol{T}/\Delta S$ 的极限就表示了面力在 B 点的集度,如式(2)所示。用 T_x、T_y、T_z 表示 $\boldsymbol{T}$ 沿坐标轴 x、y、z 的分量,并同样规定沿坐标轴正方向为正,反之为负。面力的量纲为[力][长度]$^{-2}$。

当面力的作用面积很小时,通常就简化为集中力,其量纲为[力]。

2. 应　　力

在载荷的作用下,物体的各部分之间要产生相互作用,这种物体内的一部分对另一部分的相互作用力,称为内力。

为了研究物体内部某点 P 处的内力,假想由一个过 P 点的截面 π 将物体分为 A、B 两部分(图2-2)。在截面 π 上作用有部分 B 对 A 的连续分布的作用力。取包含点 P 的面元 ΔS,设作用在面元 ΔS 上的内力合力为 $\Delta \boldsymbol{Q}$,则 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta S$ 表示了面元的内力平均集度,当 ΔS 不断缩小而趋于 P 点时,$\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta S$ 的大小和方向不断变化,其极限就表示了 π 平面上内力在 P 点的集度,称为点 P 在 π 平面上的应力矢量,记为

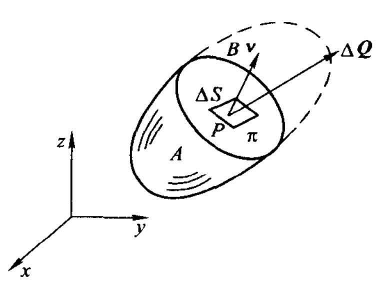


图 2-2

$$\overset{\nu}{\boldsymbol{T}}=\lim_{\Delta S\to 0}=\frac{\Delta Q}{\Delta S}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S} \tag{3}$$

式中,ν 表示应力作用面的法线方向。显然,这个应力矢量的大小和方向除了与点的位置有关外,还与过该点的截面方向有关。

对于应力矢量,通常采用两种分解方法:一是沿坐标轴方向分解,在推导某些公式的过程中使用;二是沿作用面的法线方向和切线方向分解,前者与作用面垂直称为正应力(σ_ν),后者在作用面内称为剪应力(τ_ν),这些分量常常与物体的变形和材料强度相关联,见图2-3。

应力及其分量的量纲是[力][长度]$^{-2}$。

比较(2)式和(3)式可见,应力矢量与面力矢量的数学定义和物理量纲都相同,区别仅在于,应力是作用在物体内截面上的未知内力,而面力是作用在物体表面上的已知外力,当内截面无限趋近于外表面时,应力也趋于外加面力。

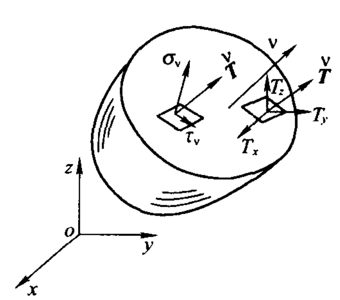


图 2-3

为了问题的描述,我们常常需要给出过一点的与 3 个坐标面平行的微分面上的应力。我们称外法线平行于 x 轴的微分面为 x 面,同样,外法线平行于 y 轴和 z 轴的微分面分别称为 y 面和 z 面;而将外法线与坐标轴正方向一致的微分面又称为正面,反之为负面。设 x 面上作用的应力矢量为 $\overset{x}{\boldsymbol{T}}$,沿 3 个坐标方向分解为一个正应力和两个剪应力,分别用 σ_{xx}、τ_{xy} 和 τ_{xz} 表示,如图2-4(a)。同样,y 面和 z 面上作用的应力矢量为 $\overset{y}{\boldsymbol{T}}$ 和 $\overset{z}{\boldsymbol{T}}$,其相应的沿坐标轴方向的分量分别为 σ_{yy}、τ_{yx}、τ_{yz} 和 σ_{zz}、τ_{zx}、τ_{zy},如图2-4(b)、(c)所示。将