◎大学公共数学系列教材学习指导书

微积分学习指导

武汉大学数学与统计学院
齐民友 主编
杨丽华 孟新焕 编

全国优秀出版社
武汉大学出版社

◎大学公共数学系列教材学习指导书

微积分学习指导

武汉大学数学与统计学院
齐民友 主编
杨丽华 孟新焕 编

全国优秀出版社
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导/齐民友主编；杨丽华，孟新焕编. —武汉：武汉大学出版社，2004.8
ISBN 7-307-04172-3

Ⅰ.微…　Ⅱ.①齐…　②杨…　③孟…　Ⅲ.微积分—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 033589 号

责任编辑：李汉保　　责任校对：汪欣怡　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
印刷：湖北省孝感日报社印刷厂
开本：787×980　1/16　　印张：33.25　　字数：631 千字
版次：2004 年 8 月第 1 版　　2004 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-04172-3/O・294　　定价：45.00 元

前　言

本书可作为武汉大学数学与统计学院齐民友等编写的教材《微积分》的配套学习指导书、习题课的参考书，以及研究生入学考试的复习用书。

微积分是理工科院校的一门重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重要内容。针对学生在学习中出现的常见问题及研究生入学考试中的普遍问题，也为了帮助爱好数学的自学者更有效地学习这门课程，我们编写了这本书。

本书具有如下特点：

1. 根据教学计划和进度，按照知识结构分为二十三讲。每讲中包括：主要内容、注意的问题、例题分析、研究生入学试题分析、练习题及参考答案等。

2. 注重基本概念、基本思想、基本计算的训练。书中通过大量的例题分析、讨论，引导读者学会分析方法。有的例题给出了多种解法，帮助读者学会从不同的角度去分析问题和解决问题，掌握解题的方法、思路及知识点的灵活运用。

3. 本书例题的选取有一定的广度和深度，具有一定的覆盖面和综合性。针对课程中的重点、难点及学生学习中易犯的错误，例题的选择由浅入深，注重解题过程的条理化。部分难度较大的例题，采用先分析、后解题、再小结的方式，帮助读者提高分析问题和解决问题的能力。

4. 各讲中的主要内容，简明扼要地总结了本讲的知识要点。注意的问题中指出了学习及运用中常见的错误及解决此类问题的方法和思想。且各讲的内容都不涉及后面的知识，而后面的内容尽量包括前面的知识的综合运用，以利于读者的复习和对知识点的融会贯通。

5. 本书按照知识点，将近几年(1995～2003 年)的大部分硕士研究生入学试题编入各讲。题号后的编号，如(1999—1)表示此题为 1999 年数学一的试题。希望通过对此类题目的分析，能够让读者对研究生入学考试的要求、知识点的分布及命题的基本思想有一个基本的了解。

6. 本书也可作为习题课的教学参考书。同时对于教材中部分较难的练习题，以例题的形式给出了解答，即本书中标记为【例】的例题。

本书的第一讲～第六讲、第十五讲～第十九讲、第二十一讲由杨丽华编写；第七讲～第十四讲、第二十讲、第二十二讲、第二十三讲由孟新焕编写。

武汉大学数学与统计学院的齐民友教授、黄象鼎教授、姜明启副教授仔细审阅了书稿，提出了很多宝贵的意见和建议；陆君安教授、费浦生教授等为组织筹备本书的编写、出版做了大量的工作，对于他们所付出的辛勤劳动和热情支持表示衷心的感谢！

限于编者的学识及水平，疏漏、谬误与不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2004 年 3 月

目　录

第一讲 集合 函数

一、主要内容

（一）集 合

1. 集合的定义

某些对象的全体称为一个集合：如果这些对象是具有某一共性的全体．记作 $A=\{x|x$ 具有的性质$\}$．x 称为集合的元素．

上述定义只是描述性的．对于集合，没有严格的数学定义．

2. 集合的运算

并集：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$；

交集：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$；

差集：$A\setminus B=\{x|x\in A$ 且 $x\overline{\in} B\}$，特别地，当 $B\subset A$ 时，$A\setminus B=B^C$，称为 B 在 A 中的补集；

积集：$A\times B=\{(x,y)|x\in A$ 且 $y\in B\}$．

3. 数集的界、确界

设 A 为一个所含元素为实数的集合，若存在常数 $M(>0)$，使对集合 A 中的任意元素 x，恒有 $|x|\leqslant M$ 成立，则称集合 A 为有界集，M 称为 A 的界．

若数 β 满足(1) $\forall x\in A$，有 $x\leqslant\beta$；(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in A$，使得 $x_0>\beta-\varepsilon$，则称 β 为集合 A 的上确界．记作 $\beta=\sup A$．

若数 α 满足(1) $\forall x\in A$，有 $x\geqslant\alpha$；(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in A$，使 $x_0<\alpha+\varepsilon$，则称 α 为集合 A 的下确界．记作 $\alpha=\inf A$．

4. 区间、邻域

(1) 区间:满足一定不等式的实数集.如$(a,b)=\{x|a<x<b\}$,a、b为实数,称(a,b)为开区间.

类似可得:闭区间$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;
半开区间$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$;$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

以上区间都称为有限区间.

无限区间:$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}=\{x|x\geqslant a\}$;

$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}=\{x|x<b\}$;$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}$.

(2)邻域:包含点a的开区间,称为点a的邻域.

点a的δ-邻域:$U(a,\delta)=\{x\,\big|\,|x-a|<\delta\}$.

点a的去心δ-邻域:$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,\big|\,0<|x-a|<\delta\}(\delta>0)$.

(二) 函　　数

1. 映射

设X,Y为非空集合.若存在一个法则T,使得X中的每一元素按法则T在Y中有惟一元素与之对应,则称T为从X到Y的映射.记作$T:X\to Y$.

2. 函数

设X,Y为实数集$\mathbf{R}$的子集,映射$f:X\to Y$,即$x\mapsto y=f(x)$,则称映射f为定义在X上的一个一元实函数,简称一元函数.X称为函数的定义域,集合$\{y|y=f(x),x\in X,y\in Y\}$称为函数的值域.

3. 初等函数

(1) 基本初等函数:

幂函数　$y=x^a(x>0,a\in\mathbf{R})$.

指数函数　$y=a^x(a>0,a\neq1)$.

对数函数　$y=\log_a x(x>0,a>0,a\neq1)$.

三角函数　$y=\sin x$;$y=\cos x$;$y=\tan x$;$y=\cot x$等.

反三角函数　$y=\arcsin x$;$y=\arccos x$;

$y=\arctan x$;$y=\operatorname{arccot} x$等.

(2) 反函数:设 $y=f(x),x\in D$ 之值域为 D_y. 若对 D_y 中的每一个 y 值,由 $y=f(x)$ 可惟一地确定一个 x 值与之对应,则得到一个定义在 D_y 上的函数 $x=f^{-1}(y),y\in D_y$,称其为 $y=f(x)$ 的反函数.

(3) 复合函数:设有 $u=\varphi(x)$ 定义在 $x\in D_x$ 上,且其值 $u\in D_u$,而有函数 $y=f(u)$ 定义在 D_u 上,则 $y=f[\varphi(x)]$ 可以定义在 $x\in D_x$ 上,称为由 $u=\varphi(x),y=f(u)$ 构成的关于 x 的复合函数. 记作 $(f\circ\varphi)x=f[\varphi(x)]$.

(4) 初等函数:由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算得到的并可用一个分析式子表示的函数称为初等函数.

二、注意的问题

1. 函数的两个基本要素:定义域,对应法则.

2. 不是任何函数都有反函数存在,注意概念中的“惟一”.

3. 不是任何两个函数都能构成复合函数,且复合运算是有序运算.

4. 函数的表示法:(1)解析法;(2)表格法;(3)图像法.

5. 一个函数在定义域的不同区间可用不同的解析式子表示,称此类函数为分段函数. 注意不要将此类函数理解为多个函数. 分段函数一般不是初等函数.

6. x 与 y 之间的一个方程不是总能确定 x 与 y 之间的关系. 如: $x^2+y^2+1=0$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 内,对 $\forall x$,没有一个确定的 y 值能使此式成立.

三、例题分析

【例1】 证明 $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

证 当 $x\in(A\cup B)\setminus C$,则 $x\in A$ 或 $x\in B$,且 $x\overline{\in}C$;若 $x\in(A\setminus C)$,则 $x\in A$ 且 $x\overline{\in}C$;若 $x\in(B\setminus C)$,则 $x\in B$ 且 $x\overline{\in}C$. 所以当 $x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$ 时, $x\in A$ 或 $x\in B$ 且 $x\overline{\in}C$. 由此得,当 $x\in(A\cup B)\setminus C$ 时,一定有 $x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$;反之,当 $x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$ 时,一定有 $x\in(A\cup B)\setminus C$. 即: $(A\cup B)\setminus C\subset(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$ 且 $(A\setminus C)\cup(B\setminus C)\subset(A\cup B)\setminus C$,所以得到结论: $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

【例2】 对有限集合 A,用 $n(A)$ 表示 A 中元素的个数. 证明:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

证 称 $n(A)$ 为集合 A 的基数. 若 $a\in A$,则说元素 a 对基数 $n(A)$ 的贡献为1;若 $a\overline{\in}A$,则说元素 a 对基数 $n(A)$ 的贡献为0.

设 $x\in A\cup B$,则 x 对 $n(A\cup B)$ 的贡献为1. 又因为 $x\in A\cup B$,则 $x\in A$ 或

$x\in B$.

1. 若 $x\in A$ 但 $x\overline{\in}B$,则 $x\overline{\in}(A\cap B)$,则 x 对 $n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ 的贡献为 $1+0-0=1$;

2. 若 $x\overline{\in}A$ 但 $x\in B$,则 $x\overline{\in}(A\cap B)$,则 x 对 $n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ 的贡献为 $0+1-0=1$;

3. 若 $x\in A$ 且 $x\in B$,则 $x\in(A\cap B)$,则 x 对 $n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ 的贡献为 $1+1-1=1$.

综上所述,$A\cup B$ 中的每个元素对于等式两端的贡献都是 1,所以

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

例 3 求下列函数的定义域

1. $y=\dfrac{1}{x^2-4}+\sqrt{2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$; 2. $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

解 1. $\begin{cases}x^2-4\neq 0\\ 2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\geqslant 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2\neq 4\\ 0<x-1\leqslant 1\end{cases}$

由此解得 $1<x<2$. 所以,此函数的定义域为 $(1,2)$.

2. $\begin{cases}x\neq 0,\\ 1+\dfrac{1}{x}\neq 0,\\ 1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq -1\\ 1+\dfrac{1}{x}\neq -1\end{cases}$

由上述式子得:$x\neq 0$ 且 $x\neq -1$ 且 $x\neq -\dfrac{1}{2}$,

所以此函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$.

例 4 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0\\ -x, & x\leqslant 0\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$,

求 $(g\circ f)x=g[f(x)]$.

解 $g[f(x)]=\begin{cases}2-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 1\\ 2, & |f(x)|>1\end{cases}$

要使 $|f(x)|\leqslant 1$,由 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0\\ -x, & x\leqslant 0\end{cases}$,知

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时,$|f(x)|=|-x|\leqslant 1$,

则 $g[f(x)]=2-(-x)^2=2-x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 0$.

又由 $f(x)$的表达式知,当 $x>0$ 或 $x<-1$ 时,$f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0\\ -x, & x<-1\end{cases}$ 满足$|f(x)|>1$,则有 $g[f(x)]=2, x>0, x<-1$.

综上所述,得

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 2, & x<-1, x>0\end{cases}.$$

【例 5】 设 f, g, h 都是定义在区间 I 上而且其值域也在 I 内的函数,于是它们是可以迭代的,若 g, h 都是单调增加的,且 $\forall x\in I$,有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,证明:

$$g^n(x)\leqslant f^n(x)\leqslant h^n(x)$$

成立.

证 由 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$得,

$g[g(x)]\leqslant g[f(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant h[f(x)]\leqslant h[h(x)]$,

即 $g^2(x)\leqslant f^2(x)\leqslant h^2(x)$成立.

设 $g^k(x)\leqslant f^k(x)\leqslant h^k(x)$成立,则

$g^{k+1}(x)=g[g^k(x)]\leqslant g[f^k(x)]\leqslant f[f^k(x)]\leqslant h[f^k(x)]\leqslant h[h^k(x)]$.

即 $g^{k+1}(x)\leqslant f^{k+1}(x)\leqslant h^{k+1}(x)$.

综上所述,对任意 n,当 g, h 单调增加,且 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$时,必有

$$g^n(x)\leqslant f^n(x)\leqslant h^n(x) \quad \text{成立}.$$

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<-1\\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$

求 $f(x^2+3)\cdot f(\sin x)\cdot f(4x-x^2-6)$.

解 因为 $x^2+3>1$,所以 $f(x^2+3)=1$;

又由 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$,所以 $f(\sin x)=\sin x$;

$4x-x^2-6=-(x^2-4x+6)=-[(x-2)^2+2]\leqslant -2<-1$,

所以 $f(4x-x^2-6)=-1$.

由此得 $f(x^2+3)\cdot f(\sin x)\cdot f(4x-x^2-6)=-\sin x$.

例 7 证明 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$在$[1,+\infty)$上有界.

分析 由 $x\geqslant 1$,则 $\lg x\geqslant 0$,显然有$\dfrac{\lg x}{x}\geqslant 0$,而由直观图形可以看到,对一切$x\in[1,+\infty)$,有 $0\leqslant\dfrac{\lg x}{x}<1$,由此可知只需证明$\dfrac{\lg x}{x}<1$,即证 $\lg x<x$,亦即 $x<10^x$.利用不等式$(1+a)^n>1+na(a>0)$即可找到此题的证明途径.

证 对 $\forall x\in[1,+\infty)$，必存在正整数 n，使得 $n\leqslant x<n+1$，则

$$10^x=(1+9)^x\geqslant(1+9)^n>1+9n>1+n>x,$$

即得 $10^x>x$，亦即 $x>\lg x$.

所以，对 $\forall x\in[1,+\infty)$，有 $\dfrac{\lg x}{x}<1$，又因为 $x\geqslant1$，所以 $\dfrac{\lg x}{x}\geqslant0$. 综上所述，对 $\forall x\in[1,+\infty)$，有 $0\leqslant\dfrac{\lg x}{x}<1$，所以，$\dfrac{\lg x}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 内有界.

例 8 证明 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ 在其定义域内既无上界又无下界.

证 函数的定义域 $D:(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x}=x-1+\frac{1}{1+x}.$$

1. 对 $\forall K>0$，$\exists x_0=K+2\in D$，使 $x_0+1>0$，

$$f(x_0)=x_0-1+\frac{1}{1+x_0}>x_0-1=K+1>K,$$

所以 $f(x)$ 无上界；

2. 对 $\forall M>0$，$\exists x_0=-M-1\in D$，使 $x_0+1=-M<0$，则

$$f(x_0)=x_0-1+\frac{1}{x_0+1}<x_0-1=-M-2<-M,$$

所以，$f(x)$ 无下界.

【例 9】 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 (a,b) 内单调增加，证明函数 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 也在 (a,b) 内单调增加.

证 设 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，由题意得

$$f(x_1)\leqslant f(x_2),\ g(x_1)\leqslant g(x_2),$$

则 $\varphi(x_2)\geqslant f(x_2)\geqslant f(x_1)$，$\varphi(x_2)\geqslant g(x_2)\geqslant g(x_1)$，

即 $\varphi(x_2)=\max\{f(x_2),g(x_2)\}\geqslant\max\{f(x_1),g(x_1)\}=\varphi(x_1)$，所以，$\varphi(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

同理可得，$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 在 (a,b) 内单调增加.

例 10 求 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & -3\leqslant x<0\\ 3^x, & 0\leqslant x<1\\ x^2+2, & 1\leqslant x\leqslant3\end{cases}$ 的反函数.

解 当 $-3\leqslant x<0$ 时，$y=3x+1$，则 $x=\dfrac{1}{3}(y-1)$，$-8\leqslant y<1$，即此时 $y=3x+1$ 的反函数为 $x=\dfrac{1}{3}(y-1)$，$-8\leqslant y<1$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，$y=3^x$，则 $x=\log_3 y$，$1\leqslant y<3$；