图书在版编目(CIP)数据

科学解题方法系列：**2005年全国及各省市高考试题全解 / 薛金星主编.**
—北京：人民日报出版社，2002.6
ISBN 7-80153-523-5
Ⅰ.科... Ⅱ.薛... Ⅲ.课程—解题—高中—升学参考资料
Ⅳ.G632.479
中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第039770号

书　　名： 科学解题方法系列：**2005**年全国及各省市高考试题全解——数学卷

总 主 编： 薛金星
责任编辑： 原　野
封面设计： 曲利杰

出版发行： 人民日报出版社
社　　址： 北京金台西路2号
邮政编码： 100733
发行热线： (010)65369529　65369527
经　　销： 各地书店
印　　刷： 北京市梦宇印务有限公司

开　　本： 787×1092　1/16
字　　数： 700千
印　　张： 53
印　　数： 5000册
印　　次： 2005年7月第1版　第2次印刷

书　　号： ISBN 7—80153—523—5/G·303
总 定 价： 65.00元

责任编辑：原　野
封面设计：曲利杰

2005年全国及各省市高考试题全解

2005NIANQUANGUOJIGESHENGSHIGAOKAOSHITIQUANJIE

拨开高考迷雾　步入高等学府

出版说明

2005年的高考已尘埃落定，纵观本次高考，全国有14个省市自主命题，使高考命题多元化，命题形式多样化。这就对2006年的高考参与者提出了新的挑战。为此，我们与各地考试机构密切配合，在第一时间获得试题，第一时间组织全国著名的考试专家、命题专家对三套全国卷和北京、上海、天津、重庆、广东、湖北、湖南、江苏、浙江、辽宁、福建、山东、安徽、江西14个省市高考试题进行分科汇总，逐一点明了每道题的考点，一一点拨思维切入点，详尽透彻地给出了解析过程，准确无误地提供了标准答案。在体例设计上，采用了“高考真题”后面紧跟“真题全解”的结构形式，避免了前后翻阅之苦，为师生的研究提供了方便。这种结构形式和编写内容在众多的试题汇编图书中独树一帜，真正做到了“一册在手，高考试题全有；一册在手，考点、思维、解析、答案无忧”。

ISBN 7-80153-523-5
9 787801 535238 >

ISBN 7-80153-523-5
G · 303 总定价：65.00元

科学解题方法系列

KEXUEJIETIFANGFAXILIE

2005年全国及各省市高考试题全解

数学卷

总主编／薛金星

人民日报出版社

2005年普通高等学校招生全国统一考试

全国卷Ⅰ（理工农医类）

2005年全国高考，教育部考试中心统一命题，本卷为其中之一，被河北、河南、山西等省采用.

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试时间120分钟.

高考真题

第Ⅰ卷

参考公式

如果事件A、B互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件A、B相互独立，那么

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

如果事件A在一次试验中发生的概率是p，那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

其中R表示球的半径

球的体积公式

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

其中R表示球的半径

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 复数$\dfrac{\sqrt{2}-i^3}{1-\sqrt{2}i}=$（　　）

A. i　　B. $-i$

C. $2\sqrt{2}-i$　　D. $-2\sqrt{2}+i$

2. 设I为全集，S_1、S_2、S_3是I的三个非空子集且$S_1\cup S_2\cup S_3=I$，则下面论断正确的是（　　）

A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$

B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$

D. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

3. 一个与球心距离为1的平面截球所得的圆面面积为π，则球的表面积为（　　）

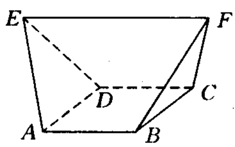
A. $8\sqrt{2}\pi$　　B. 8π　　C. $4\sqrt{2}\pi$　　D. 4π

4. 已知直线l过点$(-2,0)$，当直线l与圆$x^2+y^2=2x$有两个交点时，其斜率k的取值范围是（　　）

A. $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$　　B. $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

C. $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$　　D. $\left(-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{8}\right)$

5. 如图，在多面体$ABCDEF$中，已知$ABCD$是边长为1的正方形，且$\triangle ADE$、$\triangle BCF$均为正三角形，$EF\parallel AB$，$EF=2$，则该多面体的体积为（　　）



A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\dfrac{4}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

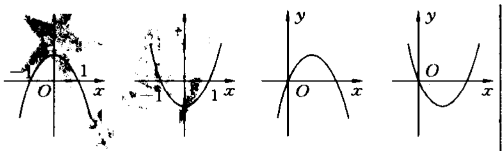
6. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的一条准线与抛物线$y^2=-6x$的准线重合，则该双曲线的离心率为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，函数$f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$的最小值为（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{3}$

8. 设$b>0$，二次函数$y=ax^2+bx+a^2-1$的图像为下列之一：



则 a 的值为(　　)

A. 1　　　　B. -1

C. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$　　　　D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

9. 设 $0<a<1$，函数 $f(x)=\log_a(a^{2x}-2a^x-2)$，则使 $f(x)<0$ 的 x 取值范围是(　　)

A. $(-\infty,0)$　　　　B. $(0,+\infty)$

C. $(-\infty,\log_a 3)$　　D. $(\log_a 3,+\infty)$

10. 在坐标平面上，不等式组

$$\begin{cases} y\geqslant x-1, \\ y\leqslant -3|x|+1 \end{cases}$$

所表示的平面区域的面积为(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. 2

11. 在△ABC 中，已知 $\tan\frac{A+B}{2}=\sin C$，给出以下四个论断：

①$\tan A\cdot\cot B=1$；

②$0<\sin A+\sin B\leqslant\sqrt{2}$；

③$\sin^2 A+\cos^2 B=1$；

④$\cos^2 A+\cos^2 B=\sin^2 C$.

其中正确的是(　　)

A. ①③　　B. ②④　　C. ①④　　D. ②③

12. 过三棱柱任意两个顶点的直线共 15 条，其中异面直线有(　　)

A. 18 对　B. 24 对　C. 30 对　D. 36 对

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分. 把答案填在题中横线上)

13. 若正整数 m 满足 $10^{m-1}<2^{512}<10^m$，则 $m=$________. ($\lg 2\approx 0.3010$)

14. $\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式中，常数项为________. (用数字作答)

15. △ABC 的外接圆的圆心为 O，两条边上的高的交点为 H，$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，则实数 $m=$________.

16. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，过对角线 BD' 的一个平面交 AA' 于 E，交 CC' 于 F，则

①四边形 $BFD'E$ 一定是平行四边形；

②四边形 $BFD'E$ 有可能是正方形；

③四边形 $BFD'E$ 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形；

④平面 $BFD'E$ 有可能垂直于平面 $BB'D$.

以上结论正确的为________. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题(本大题共 6 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 12 分) 设函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(-\pi<\varphi<0)$，$y=f(x)$ 图像的一条对称轴是直线 $x=\frac{\pi}{8}$.

(1) 求 φ；

(2) 求函数 $y=f(x)$ 的单调增区间；

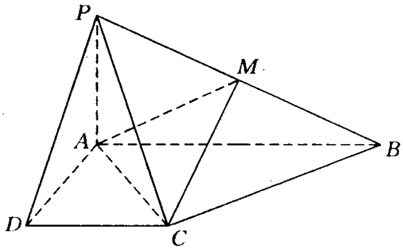
(3) 证明直线 $5x-2y+c=0$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像不相切.

18. (本小题满分 12 分) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形，$AB\parallel DC$，$\angle DAB=90°$，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PA=AD=DC=\frac{1}{2}AB=1$，M 是 PB 的中点.

(1) 证明：面 $PAD\perp$ 面 PCD；

(2) 求 AC 与 PB 所成的角；

(3) 求面 AMC 与面 BMC 所成二面角的大小.



19. (本小题满分 12 分) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和 $S_n>0(n=1,2,\cdots)$.

(1) 求 q 的取值范围；

(2) 设 $b_n=a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}$，记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，试比较 S_n 和 T_n 的大小.

20. (本小题满分 12 分) 9 粒种子分种在 3 个坑内，每坑 3 粒，每粒种子发芽的概率为 0.5，若一个坑内至少有 1 粒种子发芽，则这个坑不需要补种；若一个坑内的种子都

没发芽，则这个坑需要补种.假定每个坑至多补种一次，每补种 1 个坑需 10 元，用 ξ 表示补种费用，写出 ξ 的分布列并求 ξ 的数学期望.(精确到 0.01)

21.(本小题满分 14 分)已知椭圆的中心为坐标原点 O，焦点在 x 轴上，斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\boldsymbol{a}=(3,-1)$ 共线.

(1)求椭圆的离心率；

(2)设 M 为椭圆上任意一点，且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值.

22.(本小题满分 12 分)(1)设函数 $f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)(0<x<1)$，求 $f(x)$ 的最小值；

(2)设正数 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_{2^n}$ 满足 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{2^n}=1$，证明 $p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+p_3\log_2 p_3+\cdots+p_{2^n}\log_2 p_{2^n}\geqslant -n$.

真题全解

1. **解析:** 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1-\sqrt{2}\mathrm{i}}=\mathrm{i}$.

答案: A

命题立意: 本题考查复数的代数运算.

2. **解析:** 利用文氏图可排除 A、B、D.

答案: C.

命题立意: 本题考查集合运算、文氏图等知识.

3. **解析:** 连结球心和截面圆心得直角三角形，$\therefore R=\sqrt{2}$，$\therefore S=4\pi R^2=8\pi$.

答案: B

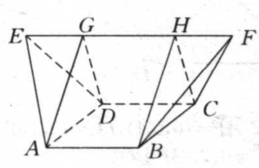
命题立意: 考查球的基本知识.

4. **解析:** 设 l 的方程 $y=k(x+2)$，由直线与圆相交，故 $\dfrac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}<1$，$\therefore -\dfrac{\sqrt{2}}{4}<k<\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

答案: C

命题立意: 本题考查直线与圆的位置关系、解不等式等基础知识.

5. **解析:** 分别过 A、B 作 EF 的垂线，垂足分别为 G、H，连 DG、CH.



$V=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times1+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}\times2=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

答案: A

命题立意: 本题考查割补法求多面体体积.

6. **解析:** 由题意 $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore a^2=3,c=2$，故 $e=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

答案: D

命题立意: 本题考查双曲线、抛物线的有关性质.

7. **解析:** $f(x)=\dfrac{2\cos^2 x+8\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\cot x+4\tan x$.(*)

$\because x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \cot x>0,\tan x>0$，

故(*)$\geqslant 2\sqrt{4\tan x\cot x}=4$.

答案: C

命题立意: 考查二倍角公式、同角三角函数基本关系式、均值不等式等基础知识.

8. **解析:** $\because b>0$，$\therefore$ 不是前两个图形.

从后两个图形看 $-\dfrac{b}{2a}>0$，$\therefore a<0$.

故应是第 3 个图形，因过原点，

$\therefore a^2-1=0$，结合 $a<0$，$\therefore a=-1$.

答案: B

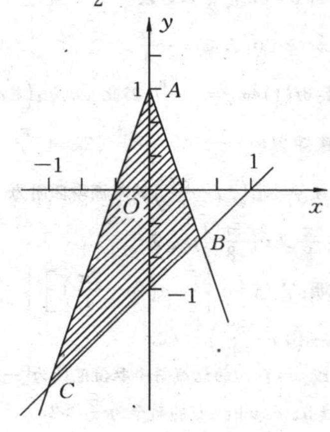
命题立意: 本题综合考查二次函数的有关知识，具有一定的综合性.

9. **解析:** 由 $a^{2x}-2a^x-2>1$ 得 $a^x>3$，$\therefore x<\log_a 3$.

答案: C

命题立意: 考查简单的指数、对数不等式.

10. **解析:** 由题意得图中阴影部分面积即为所求.B、C 两点横坐标分别为 $\dfrac{1}{2}$、-1.



$\therefore S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}\times2\times\left|\dfrac{1}{2}-(-1)\right|=\dfrac{3}{2}$.

答案: B

命题立意: 本题考查线性规划有关知识.

11. **解析:** 由 $\tan\dfrac{A+B}{2}=\sin C\Rightarrow C=\dfrac{\pi}{2}$，

显然①③不正确.

答案:B

命题立意:本题考查诱导公式、倍角公式、同角三角函数基本关系式.

12. **解析:**把直线分为上、中、下三部分:
上下 $3\times2=6$ 对;上中 $3\times3=9$ 对;中下 $3\times3=9$ 对;中中(侧棱与对角线 6 对,对角线与对角线 6 对)12 对,共 36 对.
答案:D
命题立意:考查两个基本原理.

13. **解析:**原不等式化为 $512\lg 2<m<512\lg 2+1$,
即 $154.112<m<155.112$,$\therefore m=155$.
答案:155
命题立意:考查对数函数的单调性.

14. **解析:**$T_{常}=C_9^3\cdot 2^3\cdot(-1)^6=672$.
答案:672
命题立意:考查二项式定理.

15. **解析:**特殊法.设$\triangle ABC$为 Rt$\triangle$,则 O 为斜边 BC 中点,H 与 A 重合,$\therefore \overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OA}$,$\therefore m=1$.
答案:1
命题立意:本题考查向量的有关运算.

16. **解析:**由平行平面的性质可得①,当 E、F 为棱中点时,四边形为菱形,但不可能为正方形.③④显然正确.
答案:①③④
命题立意:本题考查正方体的有关知识、面面平行的性质、射影、截面、面面垂直的知识.

17. (1)**解:**$\because x=\dfrac{\pi}{8}$是函数 $y=f(x)$的图像的对称轴.

$\therefore \sin\left(2\times\dfrac{\pi}{8}+\varphi\right)=\pm1$,

$\therefore \dfrac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

$\because -\pi<\varphi<0$,$\therefore \varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$.

(2)**解:**由(1)知 $\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$,因此 $y=\sin\left(2x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

由题意得 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x-\dfrac{3\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore$ 函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$的单调增区间为

$\left[k\pi+\dfrac{\pi}{8},k\pi+\dfrac{5\pi}{8}\right],k\in\mathbf{Z}$.

(3)**证明:**$\because |y'|=\left|\left[\sin\left(2x-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]'\right|$

$=\left|2\cos\left(2x-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right|\leqslant 2$,

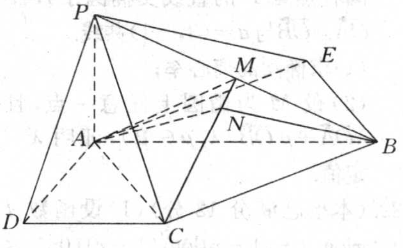
$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$的切线斜率取值范围为$[-2,2]$.

而直线 $5x-2y+c=0$ 的斜率为$\dfrac{5}{2}>2$,

$\therefore$ 直线 $5x-2y+c=0$ 与函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$的图像不相切.

命题立意:主要考查三角函数性质及图像基本知识,考查推理和运算能力.

18. **方法 1:**
(1)**证明:**$\because PA\perp$面 $ABCD$,$CD\perp AD$,
$\therefore$ 由三垂线定理得 $CD\perp PD$.
因而,CD 与面 PAD 内两条相交直线 AD、PD 都垂直,
$\therefore CD\perp$面 PAD.
又 $CD\subsetneqq$面 PCD,$\therefore$ 面 $PAD\perp$面 PCD.
(2)**解:**过点 B 作 $BE/\!/CA$,且 $BE=CA$,
则$\angle PBE$是 AC 与 PB 所成的角.
连结 AE,可知 $AC=CB=BE=AE=\sqrt{2}$,又 $AB=2$,
$\therefore$ 四边形 $ACBE$ 为正方形.
由 $PA\perp$面 $ABCD$ 得$\angle PEB=90^\circ$,



在 Rt$\triangle PEB$ 中 $BE=\sqrt{2}$,$PB=\sqrt{5}$,

$\therefore \cos\angle PBE=\dfrac{BE}{PB}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$,

$\therefore AC$ 与 PB 所成的角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

(3)**解:**作 $AN\perp CM$,垂足为 N,连结 BN.
在 Rt$\triangle PAB$ 中,$AM=MB$,又 $AC=CB$,
$\therefore \triangle AMC\cong\triangle BMC$,
$\therefore BN\perp CM$,故$\angle ANB$为所求二面角的平面角.
$\because CB\perp AC$,由三垂线定理,得 $CB\perp PC$.
在 Rt$\triangle PCB$ 中,$CM=MB$,$\therefore CM=AM$.
在等腰三角形 AMC 中,

$AN\cdot MC=\sqrt{CM^2-\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2}\cdot AC$,

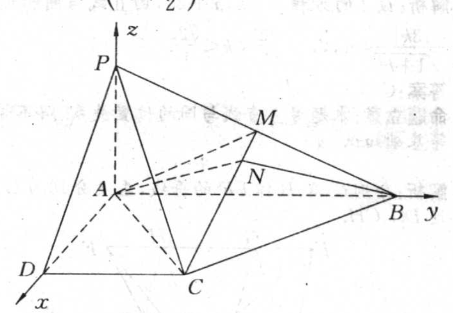
$\therefore AN=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$,

$\because AB=2$,

$\therefore \cos\angle ANB=\dfrac{AN^2+BN^2-AB^2}{2\times AN\times BN}=-\dfrac{2}{3}$.

故所求的二面角为 $\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)$.

方法 2:因为 $PA\perp AD$,$PA\perp AB$,$AD\perp AB$,以 A 为坐标原点,AD 长为单位长度,如图建立空间直角坐标系,则各点坐标为 $A(0,0,0)$、$B(0,2,0)$、$C(1,1,0)$、$D(1,0,0)$、$P(0,0,1)$、$M\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$.



(1)**证明:**$\because \overrightarrow{AP}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$,
故$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=0$,$\therefore AP\perp DC$.

又由题设知：$AD\perp DC$，且 AP 与 AD 是平面 PAD 内的两条相交直线，由此得 $DC\perp$面 PAD.
又 DC 在面 PCD 上，故面 $PAD\perp$面 PCD.
(2)**解**：$\because \overrightarrow{AC}=(1,1,0),\overrightarrow{PB}=(0,2,-1)$，
故 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2},\overrightarrow{PB}=\sqrt{5},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}=2$，
$\therefore \cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.
由此得 AC 与 PB 所成的角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.
(3)**解**：在 MC 上取一点 $N(x,y,z)$，
则存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\overrightarrow{NC}=\lambda\overrightarrow{MC}$，
$\overrightarrow{NC}=(1-x,1-y,-z),\overrightarrow{MC}=\left(1,0,-\dfrac{1}{2}\right)$，
$\therefore x=1-\lambda,y=1,z=\dfrac{1}{2}\lambda$.
要使 $AN\perp MC$，只需 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$，即
$x-\dfrac{1}{2}z=0$，解得 $\lambda=\dfrac{4}{5}$.
可知当 $\lambda=\dfrac{4}{5}$ 时，N 点坐标为 $\left(\dfrac{1}{5},1,\dfrac{2}{5}\right)$，
能使 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$.
此时，$\overrightarrow{AN}=\left(\dfrac{1}{5},1,\dfrac{2}{5}\right),\overrightarrow{BN}=\left(\dfrac{1}{5},-1,\dfrac{2}{5}\right)$，
有 $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$.
由 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}=0,\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$ 得 $AN\perp MC,BN\perp MC$.
$\therefore \angle ANB$ 为所求二面角的平面角.
$\because |\overrightarrow{AN}|=\dfrac{\sqrt{30}}{5},|\overrightarrow{BN}|=\dfrac{\sqrt{30}}{5},\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BN}=-\dfrac{4}{5}$.
$\therefore \cos\langle\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BN}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AN}|\cdot|\overrightarrow{BN}|}=-\dfrac{2}{3}$.
故所求的二面角为 $\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)$.
命题立意：主要考查线面垂直、线面所成角的有关知识及思维能力和空间想象能力，考查应用向量知识解决数学问题的能力.

19. **解**：(1)因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，$S_n>0$，
可得 $a_1=S_1>0,q\neq0$.
当 $q=1$ 时，$S_n=na_1>0$；
当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}>0$，
即 $\dfrac{1-q^n}{1-q}>0(n=1,2,\cdots)$，
上式等价于不等式组 $\begin{cases}1-q<0,\\1-q^n<0\end{cases}(n=1,2,\cdots)$， ①
或 $\begin{cases}1-q>0,\\1-q^n>0\end{cases}(n=1,2,\cdots)$. ②
解①式得 $q>1$；
解②，由于 n 可为奇数，可为偶数，得 $-1<q<1$.
综上所述，q 的取值范围是 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$.
(2)由 $b_n=a_{n+2}-\dfrac{3}{2}a_{n+1}$ 得
$b_n=a_n\left(q^2-\dfrac{3}{2}q\right),T_n=\left(q^2-\dfrac{3}{2}q\right)S_n$.
于是 $T_n-S_n=S_n\left(q^2-\dfrac{3}{2}q-1\right)$
$=S_n\left(q+\dfrac{1}{2}\right)(q-2)$.
又 $S_n>0$，且 $-1<q<0$ 或 $q>0$，则
当 $-1<q<-\dfrac{1}{2}$ 或 $q>2$ 时，$T_n-S_n>0$，即 $T_n>S_n$；
当 $-\dfrac{1}{2}<q<2$ 且 $q\neq0$ 时，$T_n-S_n<0$，即 $T_n<S_n$；
当 $q=-\dfrac{1}{2}$，或 $q=2$ 时，$T_n-S_n=0$，即 $T_n=S_n$.
命题立意：考查等比数列的基本知识，考查分析问题能力和推理能力.

20. **解**：因为单个坑内的 3 粒种子都不发芽的概率为 $(1-0.5)^3=\dfrac{1}{8}$，
所以单个坑不需要补种的概率为 $1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$.
3 个坑都不需要补种的概率为
$C_3^0\times\left(\dfrac{1}{8}\right)^0\times\left(\dfrac{7}{8}\right)^3\approx0.670$.
恰有 1 个坑需要补种的概率为
$C_3^1\times\dfrac{1}{8}\times\left(\dfrac{7}{8}\right)^2\approx0.287$，
恰有 2 个坑需要补中的概率为
$C_3^2\times\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\times\dfrac{7}{8}\approx0.041$，
3 个坑都需要补种的概率为
$C_3^3\times\left(\dfrac{1}{8}\right)^3\times\left(\dfrac{7}{8}\right)^0\approx0.002$.
补种费用 ξ 的分布列为

ξ	0	10	20	30
P	0.670	0.287	0.041	0.002

ξ 的数学期望为
$E\xi=0\times0.670+10\times0.287+20\times0.041+30\times0.002=3.75$.
命题立意：考查相互独立事件和互斥事件有一个发生的概率的计算方法，考查随机变量、数学期望等知识，考查运用概率知识解决实际问题的能力.

21. (1)**解**：设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0),F(c,0)$，
则直线 AB 的方程为 $y=x-c$.
代入 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，化简得
$(a^2+b^2)x^2-2a^2cx+a^2c^2-a^2b^2=0$.
令 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，
则 $x_1+x_2=\dfrac{2a^2c}{a^2+b^2},x_1x_2=\dfrac{a^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2}$.
则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，$\boldsymbol{a}=(3,-1)$，
由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，得
$3(y_1+y_2)+(x_1+x_2)=0$.
又 $y_1=x_1-c,y_2=x_2-c$，
$\therefore 3(x_1+x_2-2c)+(x_1+x_2)=0$，
$\therefore x_1+x_2=\dfrac{3c}{2}$，即 $\dfrac{2a^2c}{a^2+b^2}=\dfrac{3c}{2}$，$\therefore a^2=3b^2$.
$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$，
故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
(2)**证明**：由(1)知 $a^2=3b^2$，
$\therefore$ 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可化为 $x^2+3y^2=3b^2$.
设 $\overrightarrow{OM}=(x,y)$，由已知得
$(x,y)=\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)$，
$\therefore \begin{cases}x=\lambda x_1+\mu x_2,\\y=\lambda y_1+\mu y_2.\end{cases}$

$\because M(x,y)$ 在椭圆上，

$\therefore (\lambda x_1+\mu x_2)^2+3(\lambda y_1+\mu y_2)^2=3b^2$. 即

$\lambda^2(x_1^2+3y_1^2)+\mu^2(x_2^2+3y_2^2)+2\lambda\mu(x_1x_2+3y_1y_2)=3b^2$. ①

由(1)知 $x_1+x_2=\dfrac{3}{2}c, a^2=\dfrac{3}{2}c^2, b^2=\dfrac{1}{2}c^2$.

$\therefore x_1x_2=\dfrac{a^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{3}{8}c^2$.

$\therefore x_1x_2+3y_1y_2=x_1x_2+3(x_1-c)(x_2-c)$

$=4x_1x_2-3(x_1+x_2)c+3c^2$

$=\dfrac{3}{2}c^2-\dfrac{9}{2}c^2+3c^2=0$.

又 $x_1^2+3y_1^2=3b^2, x_2^2+3y_2^2=3b^2$,

代入①得 $\lambda^2+\mu^2=1$.

故 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值，定值为 1.

命题立意：考查直线方程、平面向量，及椭圆的几何性质，考查运用数学知识解决问题及推理的能力.

---

22. (1)**解**：对函数 $f(x)$ 求导数：

$f'(x)=(x\log_2x)'+[(1-x)\log_2(1-x)]'$

$=\log_2x-\log_2(1-x)+\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 2}$.

$=\log_2x-\log_2(1-x)$.

于是 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\log_2x-\log_2(1-x)<0$,

$f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 是减函数，

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\log_2x-\log_2(1-x)>0$,

$f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 是增函数.

所以 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 时取得最小值，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$.

(2)**证法 1**：用数学归纳法证明.

①当 $n=1$ 时，由(1)知命题成立.

②假定当 $n=k$ 时命题成立，即若正数 $p_1,p_2,\cdots,p_{2^k}$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_{2^k}=1$，则

$p_1\log_2p_1+p_2\log_2p_2+\cdots+p_{2^k}\log_2p_{2^k}\geqslant -k$.

当 $n=k+1$ 时，若正数 $p_1,p_2,\cdots,p_{2^{k+1}}$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_{2^{k+1}}=1$，令

$x=p_1+p_2+\cdots+p_{2^k}, q_1=\dfrac{p_1}{x}, q_2=\dfrac{p_2}{x},\cdots,$

$q_{2^k}=\dfrac{p_{2^k}}{x}$.

则 $q_1,q_2,\cdots,q_{2^k}$ 为正数，且 $q_1+q_2+\cdots+q_{2^k}=1$.

由归纳假定知

$q_1\log_2q_1+q_2\log_2q_2+\cdots+q_{2^k}\log_2q_{2^k}\geqslant -k$.

$p_1\log_2p_1+p_2\log_2p_2+\cdots+p_{2^k}\log_2p_{2^k}$

$=x(q_1\log_2q_1+q_2\log_2q_2+\cdots+q_{2^k}\log_2q_{2^k}+\log_2x)$

$\geqslant x(-k)+x\log_2x$, ①

同理，由 $p_{2^k+1}+p_{2^k+2}+\cdots+p_{2^{k+1}}=1-x$，可得

$p_{2^k+1}\log_2p_{2^k+1}+\cdots+p_{2^{k+1}}\log_2p_{2^{k+1}}$

$\geqslant(1-x)(-k)+(1-x)\log_2(1-x)$.

综合①②两式，得

$p_1\log_2p_1+p_2\log_2p_2+\cdots+p_{2^{k+1}}\log_2p_{2^{k+1}}$

$\geqslant[x+(1-x)](-k)+x\log_2x+(1-x)\log_2(1-x)$

$\geqslant-(k+1)$.

即当 $n=k+1$ 时命题也成立.

所以对一切正整数 n 命题成立.

证法 2：令函数 $g(x)=x\log_2x+(c-x)\log_2(c-x)$（常数 $c>0, x\in(0,c)$），那么 $g(x)=$

$c\left[\dfrac{x}{c}\log_2\dfrac{x}{c}+\left(1-\dfrac{x}{c}\right)\log_2\left(1-\dfrac{x}{c}\right)+\log_2c\right]$,

利用(1)知，当 $\dfrac{x}{c}=\dfrac{1}{2}$ $\left(\text{即 } x=\dfrac{c}{2}\right)$ 时，函数 $g(x)$ 取得最小值.

于是对任意 $x_1>0, x_2>0$，都有

$x_1\log_2x_1+x_2\log_2x_2\geqslant 2\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}\log_2\dfrac{x_1+x_2}{2}$

$=(x_1+x_2)[\log_2(x_1+x_2)-1]$. ①

下面用数学归纳法证明结论.

①当 $n=1$ 时，由(1)知命题成立.

②设当 $n=k$ 时，命题成立，即若正数 $p_1,p_2,\cdots\cdots p_{2^k}$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_{2^k}=1$，有

$p_1\log_2p_1+p_2\log_2p_2+\cdots+p_{2^k}\log_2p_{2^k}\geqslant -k$.

当 $n=k+1$ 时，$p_1,p_2,\cdots,p_{2^{k+1}}$ 满足

$p_1+p_2+\cdots+p_{2^{k+1}}=1$.

令 $H=p_1\log_2p_1+p_2\log_2p_2+\cdots+p_{2^{k+1}-1}\cdot\log_2p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}}\log_2p_{2^{k+1}}$,

由①得到

$H\geqslant(p_1+p_2)[\log_2(p_1+p_2)-1]+\cdots+(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})[\log_2(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})-1]$,

因为 $(p_1+p_2)+\cdots+(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})=1$,

由归纳假设

$(p_1+p_2)\log_2(p_1+p_2)+\cdots+(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})\cdot\log_2(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})\geqslant -k$，得到

$H\geqslant -k-(p_1+p_2+\cdots+p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})$

$=-(k+1)$.

即当 $n=k+1$ 时命题也成立.

所以对一切正整数 n 命题成立.

命题立意：考查数学归纳法及导数的应用等知识，考查综合运用数学知识解决问题的能力.

2005年普通高等学校招生全国统一考试

全国卷Ⅰ（文史类）

2005年全国高考，教育部考试中心统一命题，本卷为其中之一，被河北、河南、山西等省采用.

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试时间120分钟.

高考真题

第Ⅰ卷

参考公式

如果事件 A、B 互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设直线 l 过点 $(-2,0)$，且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，则 l 的斜率是（　　）

A. ± 1　　B. $\pm\frac{1}{2}$　　C. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\pm\sqrt{3}$

2. 设 I 为全集，S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$，则下面论断正确的是（　　）

A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$

B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$

D. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

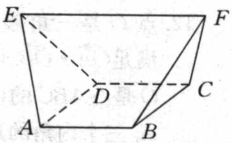
3. 一个与球心距离为1的平面截球所得的圆面面积为 π，则球的表面积为（　　）

A. $8\sqrt{2}\pi$　　B. 8π　　C. $4\sqrt{2}\pi$　　D. 4π

4. 函数 $f(x)=x^3+ax^2+3x-9$，已知 $f(x)$ 在 $x=-3$ 时取得极值，则 $a=$（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

5. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，已知 $ABCD$ 是边长为1的正方形，且 $\triangle ADE$、$\triangle BCF$ 均为正三角形，$EF/\!/AB$，$EF=2$，则该多面体的体积为（　　）



A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的一条准线为 $x=\frac{3}{2}$，则该双曲线的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)=\frac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$ 的最小值为（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{3}$

8. $y=\sqrt{2x-x^2}(1\leqslant x\leqslant 2)$ 的反函数是（　　）

A. $y=1+\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$

B. $y=1+\sqrt{1-x^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$

C. $y=1-\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$

D. $y=1-\sqrt{1-x^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$

9. 设 $0<a<1$，函数 $f(x)=\log_a(a^{2x}-2a^x-2)$，则使 $f(x)<0$ 的 x 取

值范围是(　　)

A. $(-\infty,0)$　　　　B. $(0,+\infty)$

C. $(-\infty,\log_a 3)$　　D. $(\log_a 3,+\infty)$

10. 在坐标平面上,不等式组

$$\begin{cases} y\geqslant x-1, \\ y\leqslant -3|x|+1 \end{cases}$$

所表示的平面区域的面积为(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. 2

11. 在$\triangle ABC$中,已知$\tan\frac{A+B}{2}=\sin C$,给出以下四个论断:

①$\tan A\cdot\cot B=1$;

②$0<\sin A+\sin B\leqslant\sqrt{2}$;

③$\sin^2 A+\cos^2 B=1$;

④$\cos^2 A+\cos^2 B=\sin^2 C$.

其中正确的是(　　)

A. ①③　B. ②④　C. ①④　D. ②③

12. 点O是三角形ABC所在平面内的一点,满足$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$,则点$O$是$\triangle ABC$的(　　)

A. 三个内角的角平分线的交点

B. 三条边的垂直平分线的交点

C. 三条中线的交点

D. 三条高的交点

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共4小题,每小题4分,共16分.把答案填在题中横线上)

13. 若正整数m满足$10^{m-1}<2^{512}<10^m$,则$m=$________($\lg 2\approx0.3010$)

14. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$的展开式中,常数项为______.(用数字作答)

15. 从6名男生和4名女生中,选出3名代表,要求至少包含1名女生,则不同的选法共有________种.

16. 在正方体$ABCD$—$A'B'C'D'$中,过对角线BD'的一个平面交AA'于E,交CC'于F,则

①四边形$BFD'E$一定是平行四边形;

②四边形$BFD'E$有可能是正方形;

③四边形$BFD'E$在底面$ABCD$内的投影一定是正方形;

④平面$BFD'E$有可能垂直于平面$BB'D$.

以上结论正确的为________.(写出所有正确结论的编号)

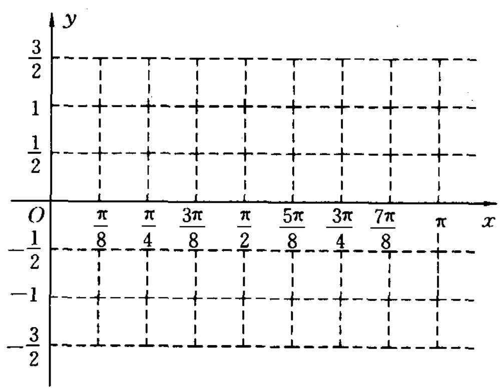
三、解答题(本大题共6小题,共74分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分12分)设函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)(-\pi<\varphi<0)$,$y=f(x)$图像的一条对称轴是直线$x=\frac{\pi}{8}$.

(1)求φ;

(2)求函数$y=f(x)$的单调增区间;

(3)画出函数$y=f(x)$在区间$[0,\pi]$上的图象.

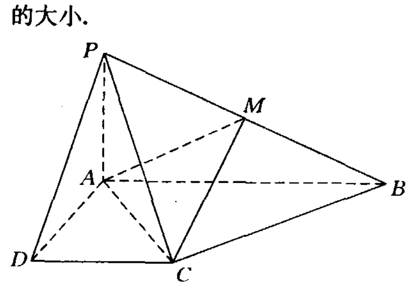


18. (本小题满分12分)已知四棱锥$P-ABCD$的底面为直角梯形,$AB\parallel DC$,$\angle DAB=90^\circ$,$PA\perp$底面$ABCD$,且$PA=AD=DC=\frac{1}{2}AB=1$,M是PB的中点.

(1)证明:面$PAD\perp$面PCD;

(2)求AC与PB所成的角;

(3)求面AMC与面BMC所成二面角的大小.



19. (本小题满分12分)已知二次函数$f(x)$的二次项系数为a,且不等式$f(x)>-2x$的解集为$(1,3)$.

(1)若方程 $f(x)+6a=0$ 有两个相等的根,求 $f(x)$ 的解析式;

(2)若 $f(x)$ 的最大值为正数,求 a 的取值范围.

20.(本小题满分 12 分)9 粒种子分种在甲、乙、丙 3 个坑内,每坑 3 粒,每粒种子发芽的概率为 0.5. 若一个坑内至少有 1 粒种子发芽,则这个坑不需要补种;若一个坑内的种子都没发芽,则这个坑需要补种.

(1)求甲坑不需要补种的概率;

(2)求 3 个坑中恰有 1 个坑不需要补种的概率;

(3)求有坑需要补种的概率.

(精确到0.001)

21.(本小题满分 12 分)设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{1}{2}$,前 n 项和为 S_n,且 $2^{10}S_{30}-(2^{10}+1)S_{20}+S_{10}=0$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项;

(2)求 $\{nS_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22.(本小题满分 14 分)已知椭圆的中心为坐标原点 O,焦点在 x 轴上,斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点,$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\boldsymbol{a}=(3,-1)$ 共线.

(1)求椭圆的离心率;

(2)设 M 为椭圆上任意一点,且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$,证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值.

真题全解

1. 解析:由圆与直线相切的充要条件 $d=r\Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

答案:C

命题立意:考查直线与圆的位置关系.

2. 同理科卷 2.

答案:C

3. 同理科卷 3.

答案:B

4. 解析:由 $f'(-3)=0$ 得 $a=5$.

答案:D

命题立意:本题考查导数的应用.

5. 同理科卷 5.

答案:A

6. 答案:D

7. 同理科卷 7.

答案:C

8. 解析:$y^2=-(x-1)^2+1,(x-1)^2=1-y^2,x-1=\sqrt{1-y^2}$,即 $y=1+\sqrt{1-x^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$.

答案:B

命题立意:考查反函数的求法.

9. 同理科卷 9.

答案:C

10. 同理科卷 10.

答案:B

11. 同理科卷 11.

答案:B

12. 解析:由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$得$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,即$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AC}$. 同理可得$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$.

答案:D

命题立意:本题考查数量积的运算以及向量垂直的充要条件等基础知识.

13. 同理科卷 13.

答案:155

14. 解析:$T_{常}=C_8^4(-1)^4=70$.

答案:70

命题立意:考查二项式定理的有关知识.

15. 解析:$C_{10}^3-C_6^3=120-20=100$.

答案:100

命题立意:本题考查组合的有关知识.

16. 同理科卷 16.

答案:①③④

17. 解:(1)∵ $x=\frac{\pi}{8}$是函数 $y=f(x)$ 的图像的对称轴.

∴ $\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}+\varphi\right)=\pm 1$.

∴ $\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

∵ $-\pi<\varphi<0$,∴ $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$.

(2)由(1)知 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$,因此 $y=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$.

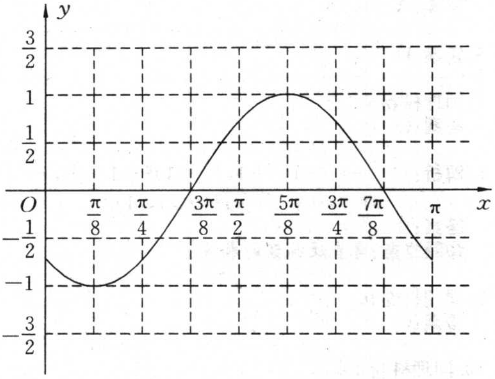
由题意得 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{3\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

∴ 函数 $y=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{5\pi}{8}\right],k\in\mathbf{Z}$.

(3)由 $y=\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$ 知

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

故函数 $y=f(x)$ 在区间$[0,\pi]$上的图像是



命题立意:本题考查三角函数性质及图像的基本知识,考查推理和运算能力.

18. 同理科卷18.

19. **解**:(1)∵ $f(x)+2x>0$ 的解集为$(1,3)$,
设 $f(x)+2x=a(x-1)(x-3)$,且$a<0$.因而
$f(x)=a(x-1)(x-3)-2x=ax^2-(2+4a)x+3a$. ①
由方程 $f(x)+6a=0$ 得 $ax^2-(2+4a)x+9a=0$. ②
∵ 方程②有两个相等的根,
∴ $\Delta=[-(2+4a)]^2-4a\cdot 9a=0$,
即 $5a^2-4a-1=0$,解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{1}{5}$.
由于$a<0$,舍去$a=1$.
将 $a=-\frac{1}{5}$ 代入①得 $f(x)$的解析式
$f(x)=-\frac{1}{5}x^2-\frac{6}{5}x-\frac{3}{5}$.
(2)由 $f(x)=ax^2-2(1+2a)x+3a$
$=a\left(x-\frac{1+2a}{a}\right)^2-\frac{a^2+4a+1}{a}$.
又 $a<0$,可得 $f(x)$的最大值为$-\frac{a^2+4a+1}{a}$.
由$\begin{cases}-\frac{a^2+4a+1}{a}>0,\\ a<0,\end{cases}$
解得 $a<-2-\sqrt{3}$或$-2+\sqrt{3}<a<0$.
故当 $f(x)$的最大值为正数时,实数 a 的取值范围是
$(-\infty,-2-\sqrt{3})\cup(-2+\sqrt{3},0)$.

命题立意:考查二次函数、方程根与系数的关系,考查运用数学知识解决问题的能力.

20. (1)**解**:因为甲坑内的 3 粒种子都不发芽的概率为
$(1-0.5)^3=\frac{1}{8}$,
所以甲坑不需要补种的概率为 $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=0.875$.
(2)**解**:3 个坑恰有 1 个坑不需要补种的概率为
$C_3^1\times\frac{7}{8}\times\left(\frac{1}{8}\right)^2\approx 0.041$.
(3)**解法 1**:因为 3 个坑都不需要补种的概率为$\left(\frac{7}{8}\right)^3$,
所以有坑需要补种的概率为
$1-\left(\frac{7}{8}\right)^3\approx 0.330$.
解法 2:3 个坑中恰有 1 个坑需要补种的概率为
$C_3^1\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{7}{8}\right)^2\approx 0.287$.
恰有 2 个坑需要补种的概率为
$C_3^2\times\left(\frac{1}{8}\right)^2\times\frac{7}{8}\approx 0.041$,
3 个坑都需要补种的概率为
$C_3^3\times\left(\frac{1}{8}\right)^3\times\left(\frac{7}{8}\right)^0\approx 0.002$.
所以有坑需要补种的概率为
$0.287+0.041+0.002=0.330$.

命题立意:本小题主要考查相互独立事件和互斥事件有一个发生的概率的计算方法.考查运用概率知识解决实际问题的能力.

21. **解**:(1)由 $2^{10}S_{30}-(2^{10}+1)S_{20}+S_{10}=0$ 得
$2^{10}(S_{30}-S_{20})=S_{20}-S_{10}$,
即 $2^{10}(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30})=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$,
可得 $2^{10}\cdot q^{10}(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20})$
$=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$.
因为 $a_n>0$,所以 $2^{10}q^{10}=1$,解得 $q=\frac{1}{2}$.
因而 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2^n}$,$n=1,2,\cdots$.
(2)因为$\{a_n\}$是首项 $a_1=\frac{1}{2}$、公比 $q=\frac{1}{2}$ 的等比数列,故
$S_n=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$,$nS_n=n-\frac{n}{2^n}$.
则数列$\{nS_n\}$的前 n 项和
$T_n=(1+2+\cdots+n)-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}\right)$,
$\frac{T_n}{2}=\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}\right)$.
前两式相减,得
$\frac{T_n}{2}=\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{n}{2^{n+1}}$
$=\frac{n(n+1)}{4}-\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{n}{2^{n+1}}$,
即 $T_n=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}-2$.

命题立意:本题主要考查等比数列的基本知识,考查分析问题能力和推理能力.

22. 同理科卷21.

2005 年普通高等学校招生全国统一考试

全国卷 Ⅱ（理工农医类）

2005 年全国高考，教育部考试中心统一命题，本卷为其中之一，被黑龙江、吉林、广西等省采用.

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟.

高考真题

第Ⅰ卷

参考公式

如果事件 A、B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|$ 的最小正周期是（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

2. 正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，P、Q、R 分别是 AB、AD、B_1C_1 的中点. 那么，正方体的过 P、Q、R 的截面图形是（　　）

A. 三角形　　B. 四边形

C. 五边形　　D. 六边形

3. 函数 $y=\sqrt[3]{x^2}-1(x\leqslant 0)$ 的反函数是（　　）

A. $y=\sqrt{(x+1)^3}(x\geqslant -1)$

B. $y=-\sqrt{(x+1)^3}(x\geqslant -1)$

C. $y=\sqrt{(x+1)^3}(x\geqslant 0)$

D. $y=-\sqrt{(x+1)^3}(x\geqslant 0)$

4. 已知函数 $y=\tan\omega x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是减函数，则（　　）

A. $0<\omega\leqslant 1$　　B. $-1\leqslant\omega<0$

C. $\omega\geqslant 1$　　D. $\omega\leqslant -1$

5. 设 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$，若 $\frac{a+bi}{c+di}$ 为实数，则（　　）

A. $bc+ad\neq 0$　　B. $bc-ad\neq 0$

C. $bc-ad=0$　　D. $bc+ad=0$

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点为 F_1、F_2，点 M 在双曲线上且 $MF_1\perp x$ 轴，则 F_1 到直线 F_2M 的距离为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{6}}{5}$　　B. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$

C. $\frac{6}{5}$　　D. $\frac{5}{6}$

7. 锐角三角形的内角 A、B 满足 $\tan A-\frac{1}{\sin 2A}=\tan B$，则有（　　）

A. $\sin 2A-\cos B=0$

B. $\sin 2A+\cos B=0$

C. $\sin 2A-\sin B=0$

D. $\sin 2A+\sin B=0$

8. 已知点 $A(\sqrt{3},1)$，$B(0,0)$，$C(\sqrt{3},0)$. 设 $\angle BAC$ 的平分线 AE 与 BC 相交于 E，那么有 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{CE}$，其中 λ 等于（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -3　　D. $-\frac{1}{3}$

9. 已知集合 $M=\{x \mid x^2-3x-28\leqslant 0\}$，$N=\{x|x^2-x-6>0\}$，则 $M\cap N$ 为(　　)

A. $\{x|-4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 7\}$

B. $\{x|-4<x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x<7\}$

C. $\{x|x\leqslant -2$ 或 $x>3\}$

D. $\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant 3\}$

10. 点 P 在平面上作匀速直线运动，速度向量 $\boldsymbol{v}=(4,-3)$（即点 P 的运动方向与 $\boldsymbol{v}$ 相同，且每秒移动的距离为 $|\boldsymbol{v}|$ 个单位）. 设开始时点 P 的坐标为 $(-10,10)$，则 5 秒后点 P 的坐标为(　　)

A. $(-2,4)$　　B. $(-30,25)$

C. $(10,-5)$　　D. $(5,-10)$

11. 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 为各项都大于零的等差数列，公差 $d\neq 0$，则(　　)

A. $a_1a_8>a_4a_5$

B. $a_1a_8<a_4a_5$

C. $a_1+a_8>a_4+a_5$

D. $a_1a_8=a_4a_5$

12. 将半径都为 1 的 4 个钢球完全装入形状为正四面体的容器里，这个正四面体的高的最小值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$　　B. $2+\frac{2\sqrt{6}}{3}$

C. $4+\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分. 把答案填在题中横线上)

13. 圆心为 $(1,2)$ 且与直线 $5x-12y-7=0$ 相切的圆的方程为________.

14. 设 α 为第四象限的角，若 $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}=\frac{13}{5}$，则 $\tan 2\alpha=$________.

15. 在由数字 0,1,2,3,4,5 所组成的没有重复数字的四位数中，不能被 5 整除的数共有______个.

16. 下面是关于三棱锥的四个命题：

①底面是等边三角形，侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.

②底面是等边三角形，侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥.

③底面是等边三角形，侧面的面积都相等的三棱锥是正三棱锥.

④侧棱与底面所成的角都相等，且侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.

其中，真命题的编号是________.（写出所有真命题的编号）

三、解答题(本大题共 6 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.（本小题满分 12 分）设函数 $f(x)=2^{|x+1|-|x-1|}$，求使 $f(x)\geqslant 2\sqrt{2}$ 的 x 取值范围.

18.（本小题满分 12 分）已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列，$\lg a_1$、$\lg a_2$、$\lg a_4$ 成等差数列. 又 $b_n=\frac{1}{a_{2^n}}$，$n=1,2,3,\cdots$.

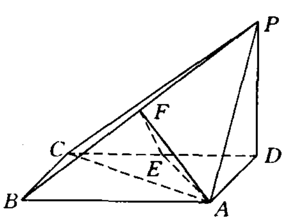
(1)证明 $\{b_n\}$ 为等比数列；

(2)如果无穷等比数列 $\{b_n\}$ 各项的和 $S=\frac{1}{3}$，求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公差 d.

（注：无穷数列各项的和即当 $n\to\infty$ 时数列前 n 项和的极限）

19.（本小题满分 12 分）甲、乙两队进行一场排球比赛，根据以往经验，单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6. 本场比赛采用五局三胜制. 即先胜三局的队获胜，比赛结束. 设各局比赛相互间没有影响. 令 ξ 为本场比赛的局数，求 ξ 的概率分布和数学期望.（精确到 0.000 1）

20.（本小题满分 12 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$AD=PD$，E、F 分别为 CD、PB 的中点.



(1)求证：$EF\perp$ 平面 PAB；

(2)设 $AB=\sqrt{2}BC$，求 AC 与平面 AEF 所成的角的大小.

21.（本小题满分 14 分）P、Q、M、N 四点都在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 上，F 为椭圆在 y 轴正半

轴上的焦点. 已知$\overrightarrow{PF}$与$\overrightarrow{FQ}$共线,$\overrightarrow{MF}$与$\overrightarrow{FN}$共线,且$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. 求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值和最大值.

22.(本小题满分 12 分)已知 $a\geqslant 0$,函数 $f(x)=(x^2-2ax)e^x$.

(1)当 x 为何值时,$f(x)$取得最小值? 证明你的结论;

(2)设 $f(x)$在$[-1,1]$上是单调函数,求 a 的取值范围.

真题全解

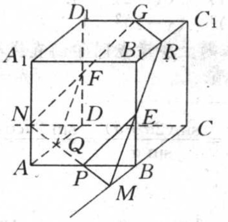
1. **解析**:$y=|\sin x+\cos x|=\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

$\because$ $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的周期为 2π(加绝对值后周期减半),$\therefore$ $T=\pi$.

答案:C

命题立意:本题主要考查周期的求法及三角式的化简.

2. **解析**:如图,作 $RG/\!/PQ$ 交 C_1D_1 于 G,



连结 QP 与 CB 交于 M,连结 MR 交 BB_1 于 E,连结 PE、RE 为截面的部分外形.

同理连 PQ 交 CD 于 N,

连 NG 交 DD_1 于 F,连 QF,FG.

$\therefore$ 截面为 $PQFGRE$ 为六边形.

答案:D

命题立意:本题主要考查同学们空间想象能力,属中档题.

3. **解析**:$y=\sqrt[3]{x^2}-1(x\leqslant 0)$,$\therefore$ $y+1=\sqrt[3]{x^2}$,

$\therefore$ $(y+1)^3=x^2$,$\therefore$ $x=\pm\sqrt{(y+1)^3}$. $\because$ $x\leqslant 0$,$\therefore$ $x=-\sqrt{(y+1)^3}$.

互换 x,y 知 $y=-\sqrt{(x+1)^3}$.

原函数中 $y=\sqrt[3]{x^2}-1$,$\therefore$ $y\geqslant -1$,

$\therefore$ 反函数中 $y=-\sqrt{(x+1)^3}$,$x\geqslant -1$.

答案:B

命题立意:本题主要考查反函数的求法. 注意原函数和反函数值域和定义域的互逆性.

4. **解析**:ω 只是变换函数的周期并将函数图象进行伸缩. 若 ω 使函数在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上递减,则 ω 必小于 0. 而当$|\omega|>1$ 时,图象将缩小其周期,故$-1\leqslant\omega<0$.

答案:B

命题立意:本题主要考查正切函数的性质,同时考查函数图象的变换,属中档题(一般题).

5. **解析 1**:a、b、c、$d\in\mathbf{R}$ 时,若$\frac{a+bi}{c+di}$为实数,则有

$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2}$,

其中虚部$\frac{bc-ad}{c^2+d^2}=0$.

解析 2:若$\frac{a+bi}{c+di}$为实数,则运用实数的充要条件

有$\frac{a+bi}{c+di}=\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)}$.

$\therefore$ $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a-bi}{c-di}$,$\therefore$ $\frac{a+bi}{c+di}-\frac{a-bi}{c-di}=0$,

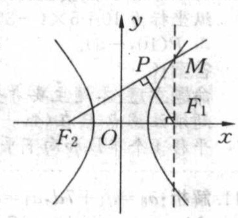
$\therefore$ $(a+bi)(c-di)-(a-bi)(c+di)=0$.

整理知 $bc=ad$.

答案:C

命题立意:本题主要考查复数代数形式下的运算,考查基本变形能力和复数的概念.

6. **解析**:如图,设 F_1 为右焦点,F_2 为左焦点,P 为垂足,则$|F_1M|=\frac{b^2}{a}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$(半通径).



由双曲线的第一定义知$|MF_2|-|MF_1|=2a=2\sqrt{6}$,

$\therefore$ $|MF_2|=2\sqrt{6}+|MF_1|=2\sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$.

在$\triangle F_1F_2M$ 中,

$S=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|F_1M|=\frac{1}{2}|F_2M|\cdot|PF_1|$

$\therefore$ $6\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{2}\times|PF_1|$,$\therefore$ $|PF_1|=\frac{6}{5}$.

答案:C

命题立意:本题主要考查双曲线的第一定义、通径及三角形中的等积转化法求距离,综合性较强.

7. **解析**:$\tan A-\frac{1}{\sin 2A}=\tan B$,

$\therefore$ $\frac{1-2\cos^2 A}{\sin 2A}=\tan B$,

即$\frac{-\cos 2A}{\sin 2A}=\tan B$,

$\therefore$ $-\cot 2A=\tan B$,

即 $\cot 2A=-\tan B=\tan(-B)=\cot\left(\frac{\pi}{2}+B\right)$.

$\because$ 在$\triangle ABC$ 中各角为锐角,

$\therefore$ $2A<\pi$,$\frac{\pi}{2}+B<\pi$,

$\therefore$ $2A=\frac{\pi}{2}+B$,

$\therefore$ $\sin 2A=\sin\left(\frac{\pi}{2}+B\right)=\cos B$,