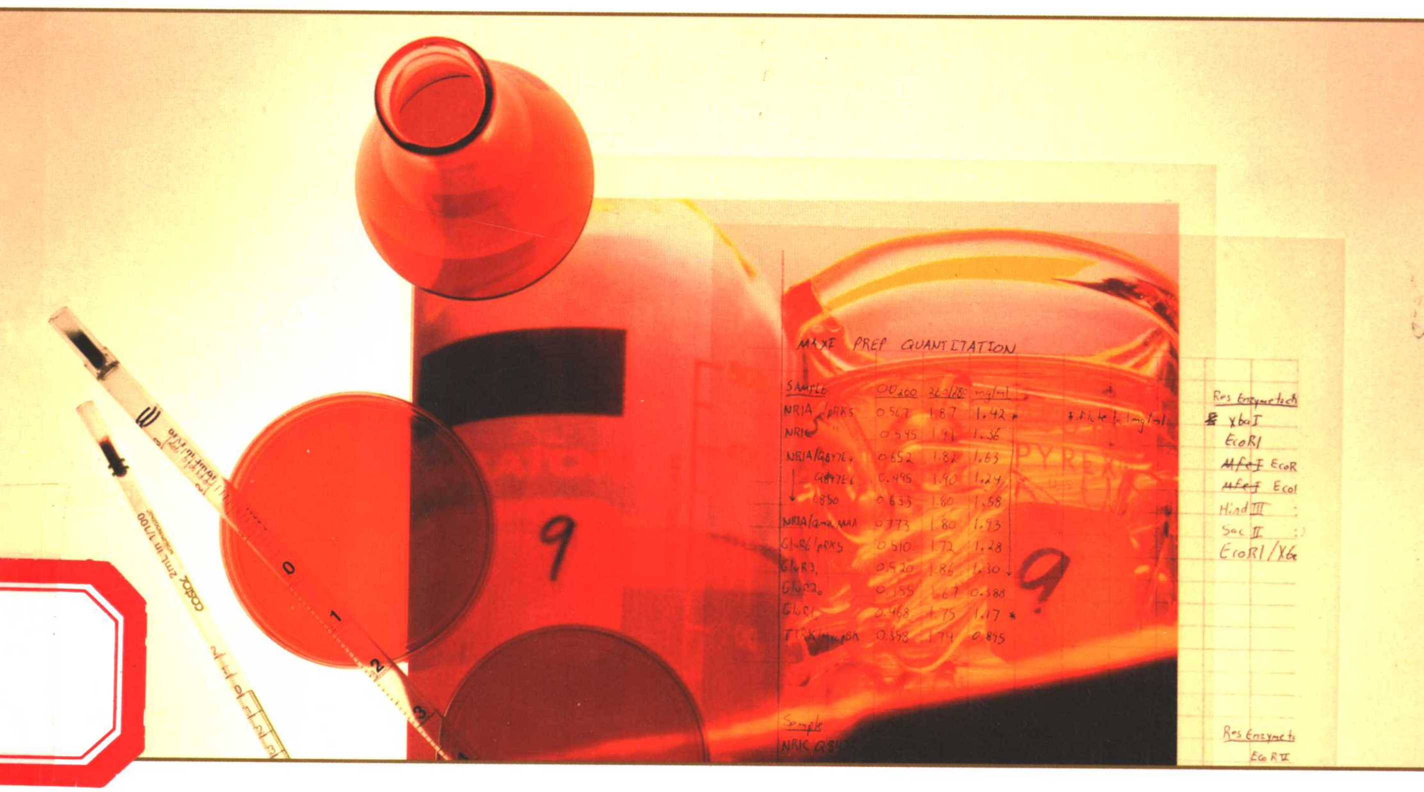
医科高等数学

四川大学数学学院高等数学教研室　编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

医科高等数学

四川大学数学学院高等数学教研室　编

高等教育出版社

内容提要

本书是按照国家教育部医科数学教学指导委员会制定的新世纪医科大学数学教学的基本要求，在原四川大学高等数学教研室编写的面向新世纪改革教材讲义基础上修改而成的。

全书包括高等数学中的微积分、线性代数、概率论与数理统计的基础内容，按照“少而精，突出实效”的原则，侧重介绍基本概念、基本原理和重要的思想方法，强调培养学生用数学思想方法分析与解决医学问题的意识与能力，着重体现与医学结合，但不失去数学本身内容的相应完整性、逻辑性、科学性的特色；在编排上力求做到叙述清楚、深浅适当，文字流畅，例题较多，便于自学，书末附有习题答案。

本书可作为高等医药院校与有关大学医学部(院)临床医学、基础医学、预防医学、药学等各专业本科生、进修生的教材，也可供广大生物和医学工作者作为参考书。

图书在版编目(CIP)数据

医科高等数学/四川大学数学学院高等数学教研室编.
北京:高等教育出版社,2004.7
ISBN 7-04-014428-X

Ⅰ.医...　Ⅱ.四...　Ⅲ 医用数学:高等数学-医学院校-教材　Ⅳ.R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 056904 号

策划编辑 徐　可　**责任编辑** 王文颖　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 杜晓丹
版式设计 张　岚　**责任校对** 杨雪莲　**责任印制** 宋克学

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总　　机 010-82028899

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经　　销 新华书店北京发行所
印　　刷 北京人卫印刷厂

开　　本 850×1168　1/16
印　　张 17.25
字　　数 340 000

版　　次 2004 年 7 月第 1 版
印　　次 2004 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 18.90 元

前　　言

数学在现代医学的发展中起着重要的作用。随着计算机的普及，医学研究的许多课题已经实现了从定性描述到定量研究的转变，即使是非常复杂的生命系统和现象，借助计算机强大的数值分析和图像处理能力，通过建立适当的数学模型，科学工作者就可能得以深入探讨其内在关系与变化规律。当前，无论是临床实践还是基础实验，数学原理和方法的广泛应用，已使医学科学的面貌有了很大的变化，产生了一系列新的边缘交叉学科。从事医学临床实践和基础研究的高层次专门人才需要具备一定水准的现代数学知识，已成为医学教育界的共识。因此，我国卫生部规定，从 1983 年起将高等数学作为高等医学院校的必修课，此后各种不同版本的有关教材相继问世，体现了国内同行对这一工作的努力探索。

进入 21 世纪，随着我国高等教育改革的深化，不少医学院校纷纷与综合性大学合并，成为新型综合性大学的医学部或医学中心，这给医学教育的进一步发展带来新的契机与挑战。如何借助于新型综合性大学强大的理科学术优势，深入进行课程体系与教学内容的改革，提高医学教育的质量，已成为一个重要课题。

为了适应新形势带来的新要求与挑战，我们组织编写了本教材。本教材包括微积分学。线性代数、概率论与数理统计的基础内容。它们不仅是初等数学过渡到高等数学的桥梁，而且也是现代医学中应用最深入、成果最丰富的数学分支；它是许多医学后继课程，如医学统计学、临床流行病学、计算机模拟实验等课程必备的基础知识。基于此，我们力求使本教材既能吸取其他同类教材优点，又能体现改革精神。

本书按“少而精”的原则侧重介绍几部分数学内容的基本概念、基本原理和重要的思想方法，强调培养用数学思想分析医学问题，用数学方法解决医学问题的能力。按照这样的标准，本书不追求有关具体内容知识的完备和有关理论的深入探讨，但凡重要的基本概念、基本理论、基本方法均作了适宜的讲解与介绍，能为广大医科学生所接受。本书特别强调结合医学来讲解数学思想及方法的应用，选编的大量的例题与习题体现这一宗旨。总而言之，本书着重体现了为医学服务，与医学结合但又不失去数学本身内容的相应完整性、逻辑性、科学性的特色；在编排上，本书力求做到叙述清楚，深浅适当，文字流畅，例题较多，便于自学。书末附有习题的答案。

本书可作为高等医药院校与有关大学医学部（院）临床医学、基础医学、预防医学、药学及其他各类专业本科生、进修生和研究生的教材，也可供广大生物

和医学科学工作者参考。

本书按授课总学时102学时(两学期)编写,这对七年制专业医科本科生非常适合。同时本书各部分内容上又保持相对独立,因此对五年制及其他学制的不同授课学时数的学生仍然适合。如第一学期可讲授前三章51学时,第二学期讲授后三章,授课教师可根据各个教学班级的层次、学时对内容作相应处理。

本书自2001年初开始编写。我们广泛地参阅了国内外有关改革教材,也在师生中作了一些调查研究,边写边试用边修改,至今已在两届四川大学医学类本科生1 000多人中试用过两次。

本书的编写是在四川大学教务处的大力支持下,在四川大学数学学院的直接领导下,在很多教师的协助下完成的。数学学院成立了专门的医科数学教改与教材编写小组,杨志和教授、李海教授主持了小组的调研工作与多次讨论,负责全书的统一协调与定稿工作。具体执笔编写的有邓英、吴果生、牛健人、徐小波、毕中胜、冷忠建、熊小林、闵心畅,其中第一章由邓英编写,第二章由吴果生编写,第三章由牛健人编写,第四章由徐小波编写,第五章由毕中胜、冷忠建编写,第六章由熊小林、闵心畅编写。

限于编者水平,书中难免存在不足与错误,极望得到专家、同仁及广大读者的批评指正。

编者
2004年7月

目　　录

第一章

一元函数微分学

微分学是微积分的一个重要组成部分,函数是微分学研究的主要对象,它反映了在运动变化过程中的客观事物之间的数量变化规律.生命科学中的数量关系最常见的一类即为函数关系.一元函数是只有一个自变量和一个因变量的函数关系,它在几何上通常是一条曲线.本章将从生命科学中常见的一元函数出发,逐步介绍研究这类函数变化规律的数学方法,其中包括函数的极限与连续、导数与微分等.

第一节　函数与极限

函数的极限反映了函数在某一变化过程中的变化趋势.本节主要讨论函数极限的概念、计算和函数的连续性.

1.1　函数

(1) 函数的概念

在研究事物变化过程中的数量变化规律时,经常要遇到常量和变量这两种量.常量是在该变化过程中始终保持不变的量,变量则是在该变化过程中可以取不同值的量.函数反映的是变量之间的相互制约关系,通常可用解析法、列表法和图像法来表示.

定义 1.1　对同一变化过程中的两个变量 x 和 y,如果对变量 x 的每一个允许的取值,按照某一确定的规律 f,总有变量 y 的一个确定的值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数(function),记为

$$y=f(x).$$

这时,由于变量 y 的值随变量 x 的值而定,故称变量 x 为自变量(independent variable),其所有允许值的集合为函数的定义域(domain of definition);称变量 y 为因变量(dependent variable),其所有取值的集合为函数的值域(domain of functional value).

若 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域中的一点,则说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义,称 x_0 对应的因变量的值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

实际问题中常用区间来表示函数的定义域和值域，例如：

开区间　　$(a,b)=\{x:a<x<b\}$；

闭区间　　$[a,b]=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开半闭区间　　$[a,b)=\{x:a\leqslant x<b\}$，

或$(a,b]=\{x:a<x\leqslant b\}$；

无穷区间　　$(-\infty,b)=\{x:-\infty<x<b\}$，

或$[a,+\infty)=\{x:a\leqslant x<+\infty\}$，

或$(-\infty,+\infty)=\{x:-\infty<x<+\infty\}$.

（2）生命科学中常见的一元函数举例

例 1.1　由统计规律可得，婴儿出生时的体重平均为 3 000 g，从出生起至 6 个月，平均每月增长 600 g，6 个月后至 12 个月，平均每月增长 500 g. 若设 x 为婴儿出生的月份，则婴儿从出生至 1 岁其体重和月龄的关系为

$$f(x)=\begin{cases}3\,000+600\,x, & 0\leqslant x\leqslant 6,\\ 3\,600+500\,x, & 6<x\leqslant 12.\end{cases}$$

利用此函数关系，可以计算出从出生到 12 个月内任何一个月中婴儿的体重. 例如，出生 5 个月的婴儿体重为 $f(5)=3\,000+600\times5=6\,000$ (g)，出生 8 个月的婴儿体重为 $f(8)=3\,600+500\times8=7\,600$ (g).

例 1.2　婴儿的体表面积 S 和体重 W 的关系可用函数

$$S=0.102\,6\ W^{0.669\,3}$$

来表示. 利用此函数关系，可以算出一个体重为 3.5 kg 的婴儿的体表面积约为

$$S=0.102\,6\times3.5^{0.669\,3}\approx0.237\,3(\mathrm{m}^2).$$

如果婴儿每天每平方米体表面积约散失 7 112.8 J 热量，而每升牛奶可供应 3 079.42 J热量，则该婴儿每天至少需喝牛奶

$$Q=\frac{7\,112.8\times0.237\,3}{3\,079.42}\approx0.55(\mathrm{L})$$

才能维持热量平衡.

例 1.3　当人口的增长不受周围环境的限制，且出生率、死亡率都为常数时，可用马尔萨斯规律(Malthus' law)

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{k(t-t_0)}\quad(t\geqslant t_0)$$

进行短期人口预测，其中，t_0 和 N_0 分别为调查当年的年份和人口数，k 为出生率与死亡率之差，$N(t)$ 为第 $t(t\geqslant t_0)$ 年的人口数. 易见，当 $k>0$ 时人口数为正增长；当 $k=0$ 时人口数恒定不变；当 $k<0$ 时人口数为负增长. 据 1965 年的人口调查资料表明，函数

$$N(t)=33.4\mathrm{e}^{0.02(t-1965)}$$

可用来预测 1965 年以后全球人口数，则 2003 年全球人口数约为

$$N(2003)=33.4\mathrm{e}^{0.02\times38}\approx71.42(\text{亿}).$$

例 1.4　当受到资源短缺、环境污染等外界条件的限制时，人口将不再会是无限制地增长，这时可用逻辑斯谛函数(logistic function)

$$N(t)=\frac{b}{1+a\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}}\quad(t\geqslant t_0)$$

进行较长期人口预测. 其中 a,b,k 为正参数,t_0 为进行人口数据资料调查的初始年份,$N(t)$为第 t 年的人口数.

根据我国 1949 年以来人口调查的数据资料,可用逻辑斯谛函数

$$N(t)=\frac{16.28}{1+1.965\mathrm{e}^{-0.0356(t-1949)}}$$

来预测 1949 年以后各年我国的人口数. 例如:

$$N(2003)=\frac{16.28}{1+1.965\mathrm{e}^{-0.0356\times(2003-1949)}}\approx 12.65(\text{亿}).$$

根据我国 1982 年以来人口调查的数据资料,可用逻辑斯谛函数

$$N(t)=\frac{36}{1+2.545\mathrm{e}^{-0.0195(t-1982)}}$$

来预测 1982 年以后各年我国的人口数. 例如:

$$N(2003)=\frac{36}{1+2.545\mathrm{e}^{-0.0195\times(2003-1982)}}\approx 13.38(\text{亿}).$$

易见,虽然都是用逻辑斯谛函数预测人口数,但参数 a,b,k 的值与调查年份的人口数据统计资料有关. 因此,该函数可以不断地修正.

例 1.5　pH 值的大小是判断酸性、中性、碱性溶液的指标,它可以由函数关系 $y=\lg\frac{1}{x}$来计算. 其中,y 表示溶液的 pH 值,x 表示溶液中$[H_3O]^+$的氢离子浓度,它是生物组织中的一个重要因素. 例如,已知人脑的脑脊液的平均$[H_3O]^+$浓度为 $x=4.8\times10^{-8}$ mol/L,则由该函数关系可计算出其 pH 值为

$$y=\lg\frac{1}{4.8\times10^{-8}}=-\lg 4.8+8\approx 7.32>7.$$

即,人脑的脑脊液呈碱性.

例 1.6　临床上,在对中轻度糖尿病患者进行诊断时,可选用机体内血糖水平 $G(t)$与时间 t 的函数关系

$$G(t)=G_0+A\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega t-\varphi)$$

中血糖水平的波动衰减周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$的大小,作为诊断中轻度糖尿病的一个主要指标. 一般地,波动周期 T 较小时,说明机体将血糖水平调节到平衡值的时间较短,即机体对血糖的调节能力较强. 而波动周期 T 较大时,则说明机体将血糖水平调节到平衡值的时间较长,即机体对血糖的调节能力较差,糖尿病症状较明显. 经临床大量统计调查发现,若患者的血糖波动衰减周期$T>4$ h,则可诊断为中轻度糖尿病,否则为正常.

(3) 函数的基本性质

性质 1.1　函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义. 若存在一个正常数 M,使得对所有

的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界（bounded）. 如果没有这样的正常数 M 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内无界（unbounded）.

例如，$y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界，$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界，在 $(0,1)$ 内无界.

性质 1.2 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，x_1 和 x_2 是该区间内的任意两点. 若 $x_1<x_2$ 时总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的；若 $x_1<x_2$ 时总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的. 单调增加或单调减少的函数又称为递增或递减函数，统称为单调函数（monotone function）.

例如，$y=e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加，$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少.

性质 1.3 函数的奇偶性

设 D 为函数 $y=f(x)$ 的定义域. 若对每一个 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数（even function）. 若对每一个 $x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数（odd function）.

例如，$y=x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上为偶函数，$y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称.

性质 1.4 函数的周期性

设 D 为函数 $y=f(x)$ 的定义域. 若存在一个不等于零的常数 T，使得对每一个 $x\in D$ 都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称 $y=f(x)$ 为周期函数（periodic function），常数 T 称为函数 $y=f(x)$ 的周期. 周期函数的周期不是唯一的，通常所讲的周期是指它的最小正周期.

例如，$y=\sin x$ 的周期有无穷多个，但它的最小正周期只有一个，即 2π.

（4）复合函数、初等函数和分段函数

我们把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数（basic elementary function）.

定义 1.2 设变量 y 是变量 u 的函数，变量 u 又是变量 x 的函数，即

$$y=f(u),\quad u=\varphi(x),$$

如果变量 x 的某些值通过变量 u 可以确定变量 y 的值，则称变量 y 是变量 x 的复合函数（compound function），记为

$$y=f[\varphi(x)],$$

这时，变量 u 称为中间变量.

复合函数的概念可以推广到由多个函数复合的情况，此时，复合函数是通过多个中间变量的传递而形成的. 例如，由函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=x^2+1$ 构成的复合函数为 $y=\sqrt{\sin(x^2+1)}$. 但是，如果由几个函数复合而成的函数的定义域为空集，则称此复合函数无意义. 例如，由 $y=\arccos u$，$u=x^2+2$ 复合而成的函数

$y=\arccos(x^2+2)$无意义.

在后面的很多计算问题中,需要把复合函数的中间变量找出来,即将复合函数分解成若干个基本初等函数的形式或由基本初等函数通过四则运算而得到的简单函数形式,以便利用公式计算.

例 1.7 将复合函数 $y=e^{\arctan\frac{1}{x}}$和 $y=(\ln\cos x^3)^2$ 分解成简单函数.

解 $y=e^{\arctan\frac{1}{x}}$可看成是由 $y=e^u, u=\arctan v, v=\dfrac{1}{x}$复合而成的函数.

$y=(\ln\cos x^3)^2$ 可看成是由 $y=u^2, u=\ln v, v=\cos w, w=x^3$ 复合而成的函数.

定义 1.3 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限的复合运算而得到的(能用一个解析式表达的)函数,称为初等函数(elementary function).

例如,$y=\sqrt{1-e^{2x}}+x\sin x, y=\dfrac{\cos e^x}{(x+1)^2}$等都是初等函数.

在实际问题中,常遇到像例 1.1 中那样的一类函数,对于其定义域内自变量 x 的不同取值,不能用一个统一的解析式表示,而要用两个或两个以上的解析式表示,这类函数,称为分段函数(piecewise function). 例如,

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ 2x, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

是一个分段函数. 它表示,当自变量 x 取小于零的值时,其函数关系由 $f(x)=e^x$ 确定;当自变量 x 取大于等于零的值时,其函数关系由 $f(x)=2x$ 确定. 通常,分段函数不是初等函数,但它的每一分段内的函数表达式一般都是初等函数.

1.2 极限

由前面的例子易见,实际问题中,许多医学数量问题都可以用函数来表示,因此,我们需要对函数及其变化规律作进一步的研究. 首先,我们研究函数的变化趋势.

例如,药物动力学研究表明,周期性地口服药物后,体内的血药浓度随时间的变化规律可近似地表示为

$$c^{(n)}(t)=A\left[\frac{1-e^{-nk_e\tau}}{1-e^{-k_e\tau}}e^{-k_et}-\frac{1-e^{-nk_a\tau}}{1-e^{-k_a\tau}}e^{-k_at}\right]$$

其中,n 为服药次数,τ 为服药周期,A, k_e, k_a 均为正参数,$0\leqslant t\leqslant\tau$.

对于长期服用某种药物的慢性病患者,我们感兴趣的不仅是每次服药后其体内血药浓度的大小,而且我们更关心的是药物是否会在其体内不断累积,直至无限增加,最终导致药物中毒. 这就需要研究函数曲线的变化趋势,即计算极限

$$\lim_{n\to+\infty}c^{(n)}(t)=\lim_{n\to+\infty}A\left[\frac{1-e^{-nk_e\tau}}{1-e^{-k_e\tau}}e^{-k_et}-\frac{1-e^{-nk_a\tau}}{1-e^{-k_a\tau}}e^{-k_at}\right]$$

为此,我们介绍极限的有关知识.

(1) 极限的概念

为了便于理解和精确描述极限概念,我们先讨论数列的极限,然后再研究函

数的极限. 观察数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots,$$

当 n 越变越大时,$\frac{1}{n}$越变越小. 当 n 无限增大时,$\frac{1}{n}$与常数 0 无限接近,即$\frac{1}{n}$与常数 0 的距离可以任意小. 这时,我们说常数 0 是数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$当 n 无限增大时的极限.

一般地,对数列$\{x_n\}$,当 n 无限增大时,若有 x_n 无限趋近于一个常数 A,则称常数 A 为数列$\{x_n\}$当 n 趋近于无穷大时的极限,记为 $n\to\infty$ 时 $x_n\to A$.

n 趋近于无穷大时 x_n 无限趋近于常数 A,应理解为只要 n 充分大,x_n 与常数 A 的距离就可以任意小,即 $|x_n-A|$ 可以达到任何指定的精度.

以 $x_n=\frac{1}{n}$　$(A=0)$为例:

设小正数 ε 为指定精度. 若要 $|x_n-A|=\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$,必须 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 即对预先给定的精度 ε,只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则对一切满足 $n>N$ 的 x_n 都有 $|x_n-A|=\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ 成立. 易见,这样的 ε 有无穷多个,且无论我们预先指定要达到的精度 ε 是多么小的正数,总能找到一个充分大的正整数 N(ε 越小,N 越大),使对一切满足 $n>N$ 的 x_n 都有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立.

这就是 n 趋近于无穷大时,数列$\{x_n\}$以 A 为极限的数学描述.

定义 1.4　若存在常数 A,使数列$\{x_n\}$对预先给定的无论多么小的正数 ε,总存在正整数 N,使得对一切满足 $n>N$ 的 x_n 都有

$$|x_n-A|<\varepsilon$$

成立,则称常数 A 为数列$\{x_n\}$当 n 趋近于无穷大时的极限(limit),记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A.$$

这时,称数列$\{x_n\}$在 $n\to\infty$ 时极限存在(亦称收敛),否则称其极限不存在(亦称发散).

例 1.8　证明数列$\left\{\frac{2n+3}{n+1}\right\}$的极限为 2.

证　要证明该数列的极限是 2,只要对于任意给定的小正数 ε,能找到一个正整数 N,使得 x_N 以后所有的项 x_n 与 2 之差的绝对值都小于 ε 即可.

由于

$$|x_n-A|=\left|\frac{2n+3}{n+1}-2\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},$$

故只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$ 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$,上述不等式就成立.

因此,可取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,对一切满足 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 的 x_n 都有不等式

$$|x_n-A|=\left|\frac{2n+3}{n+1}-2\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

成立.

所以,当 $n\to\infty$ 时,数列$\left\{\frac{2n+3}{n+1}\right\}$的极限为 2,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}=2.$$

易见,对于指定的 ε,N 不是唯一的,在证明中只要能找到其中任意一个就可以了.

前面讨论的数列,其实就是自变量为正整数的函数 $x_n=f(n)$. 对 $x_n=\frac{1}{n}$,只要将正整数 n 换成实数 x,则 $y=\frac{1}{x}$即为一元函数. 从图 1.1 容易看出,当自变量 x 的绝对值$|x|$无限增大时,其对应的函数值$f(x)=\frac{1}{x}$无限趋近于常数 0. 这时,我们说常数 0 是函数$f(x)=\frac{1}{x}$当自变量 $x\to\infty$ 时的极限.

一般地,对于函数 $y=f(x)$,若当自变量 x 的绝对值无限增大时,其对应的函数值无限趋近于一个确定的常数 A,则称常数 A 是函数 $y=f(x)$ 当自变量 $x\to\infty$ 时的极限,记为$x\to\infty$ 时$f(x)\to A$.

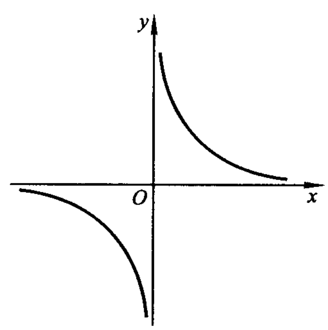


图 1.1

易见,只需将数列极限定义中的 $n>N$ 换成 $|x|>M$(M 为与 ε 有关的正数,ε 越小 M 越大),即可得到当 $x\to\infty$ 时函数极限的定义.

定义 1.5　若存在常数 A,使函数 $y=f(x)$ 对预先任意给定的无论多么小的正数 ε,总能找到一个正数 M,使得对一切满足$|x|>M$ 的 x 所对应的$f(x)$,都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立,则称常数 A 为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

这时,称函数 $y=f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限存在,否则称其极限不存在.

如果将定义中的$|x|>M$ 换成 $x<-M$ 或 $x>M$,则可得到 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义,称其为单侧极限.

在实际问题中遇到更多的情况是自变量在有限区间内变化. 因此,有必要讨论自变量 x 无限趋近于某一确定值 x_0 时,其对应的函数值 $y=f(x)$ 的变化趋势,即讨论当 $x\to x_0$ 时函数的极限问题. 通常,将包含 x_0 的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称

为点 x_0 的 $\delta(\delta>0)$ 邻域，记为 $O(x_0,\delta)$.

一般地，如果自变量 x 无限趋近于 x_0 时，其对应的函数值 $y=f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，我们则说常数 A 是函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $x\to x_0$时 $f(x)\to A$.

这里，x 无限趋近于 x_0 时 $f(x)$ 无限趋近于常数 A 应理解为：只要 x 与 x_0 的距离 $|x-x_0|$ 充分小，就能保证 $f(x)$ 与常数 A 的距离 $|f(x)-A|$ 可以任意小，即 $|f(x)-A|$ 可以达到任意指定的精度.

以 $y=f(x)=2x+2$ 且 $x_0=1, A=4$ 为例：

设小正数 ε 为指定精度. 若要 $|f(x)-A|=|(2x+2)-4|=2|x-1|<\varepsilon$，必须 $|x-x_0|=|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，即只要取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，就能保证对一切满足 $|x-x_0|=|x-1|<\delta$ 的 x 所对应的 $f(x)$ 都有 $|f(x)-A|=|(2x+2)-4|<\varepsilon$ 成立.

显然，这样的 ε 有无穷多个，且无论我们预先指定要达到的精度 ε 是多么小的正数，总能找到一个充分小的正数 δ（ε 越小，δ 越小），使得对一切满足 $|x-x_0|<\delta$ 的 x 所对应的 $f(x)$ 都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

这就是当 x 趋近于 x_0 时，函数 $y=f(x)$ 以 A 为极限的数学描述.

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 邻近有定义，点 x_0 可以除外. 若存在常数 A，使函数 $y=f(x)$ 对预先给定的无论多么小的正数 ε，总能找到一个小正数 δ，使得对一切满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x 所对应的 $f(x)$ 都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

这时，称函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在，否则称其极限不存在.

注意，定义中的 $x\to x_0$ 表示 x 沿 x_0 的左右两侧同时趋近于 x_0. 若 x 只沿 x_0 的左侧或右侧趋近于 x_0，则定义中的 $0<|x-x_0|<\delta$ 应分别改为 $x_0-\delta<x<x_0$ 或 $x_0<x<x_0+\delta$，这时分别称 A 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

易见，函数在点 x_0 处极限存在的充分必要条件是函数在该点的左、右极限均存在且相等.

例 1.9 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=3$.

证 如图 1.2，函数在 $x=1$ 处无定义，取极限时 $x\to 1$ 但 $x\neq 1$，故有

$$\left|\frac{x^2+x-2}{x-1}-3\right|=\left|\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}-3\right|=|x+2-3|=|x-1|,$$

取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时有

$$\left|\frac{x^2+x-2}{x-1}-3\right|=|x-1|<\varepsilon,$$

故